УДК 519.816

# АНАЛИЗ ИЕРАРХИЧЕСКИХ МНОГОКРИТЕРИАЛЬНЫХ ЗАДАЧ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ МЕТОДАМИ ТЕОРИИ ВАЖНОСТИ КРИТЕРИЕВ[1]

О.В. Подиновская, В.В. Подиновский

Предложены решающие правила, позволяющие в рамках разработанной ранее авторами модели ситуации принятия решений при многих критериях, образующих многоуровневую систему, сравнивать по предпочтительности варианты решения с учетом различных видов информации о важности критериев и о характере роста предпочтений вдоль их шкалы. Создана методология, свободная от неустранимых принципиальных недостатков, присущих методу анализа иерархий и всем другим известным методам, ориентированным на решение задач с иерархической структурой.

**Ключевые слова:** многокритериальные задачи принятия решений, иерархическая структура, важность критериев, шкалы критериев, теория важности критериев, метод анализа иерархий.

## ВВЕДЕНИЕ

Сложные многокритериальные задачи принятия решений часто формализуются с помощью иерархических структур. Для анализа таких задач в 1980 г. Т. Саати представил метод анализа иерархий [1], который стал одним из наиболее известных и распространенных методов решения практических многокритериальных задач самого различного характера и сложности. Это объясняется привлекательными для пользователей достоинствами, присущими самому методу, наличием отработанных коммерческих компьютерных систем поддержки принятия решений, реализующих этот метод, а также активным его продвижением.

К сожалению, этот, по сути, эвристический метод, а также все его модификации и обобщения обладают рядом принципиальных, причем неустранимых недостатков. Это отмечалось во многих работах (см., например, [2—6]). К основным таким недостаткам относятся отсутствие точного определения понятия важности критериев, а также независимость процедур оценивания важности критериев и нормализации критериальных оценок альтернатив, что нарушает требование математической теории измерений (такой недостаток назван «интеллектуальной ошибкой» [7]). Более того, в свете современных исследований по теории измерений возможность оценивания предпочтений в шкале отношений (на что претендует метод анализа иерархий) исключается [8]. Все это не позволяет считать рекомендации, получаемые при решении практических задач этим методом, научно обоснованными.

Поэтому актуальной является проблема разработки корректных методов анализа многокритериальных задач с иерархической критериальной структурой. Для ее решения авторами была предложена новая математическая модель с иерархической системой критериев [9]. Она свободна от указанных недостатков и позволяет применять подходы теории важности критериев (ТВК) [10—12] для анализа задач с иерархической структурой. В настоящей статье изложен ряд решающих правил (методов сравнения вариантов решений по предпочтительности), разработанных в рамках этой модели на основе ТВК.

## 1. ИЕРАРХИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ И СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ ВАЖНОСТИ КРИТЕРИЕВ

**1.1.** В качестве исходной принимается математическая модель ситуации принятия индивидуаль-

[1] Работа выполнена в рамках Программы «Научный фонд НИУ ВШЭ» в 2013—2014 гг. (проект № 12-01-0059).

ного решения в условиях определенности, положенная в основу ТВК:

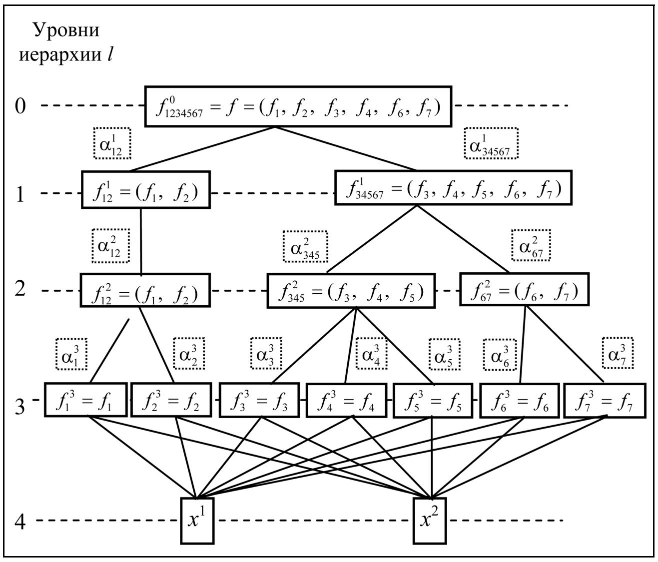
$$\langle X, f, Z_0, R \rangle, \qquad (1)$$

где $X$ — множество *альтернатив* (в конкретных задачах это могут быть варианты решения, стратегии, планы и др.), $f = (f_1, ..., f_m)$ — *векторный критерий*, $m \geq 2$, $f_i$ — *частные критерии*, $Z_0$ — общая область значений («шкала») частных критериев, $R$ — *отношение нестрогого предпочтения*. Под критерием $f_i$ понимается функция с областью определения $X$ и областью значений $Z_0 \subseteq (-\infty, +\infty)$. Таким образом, каждый вариант $x$ характеризуется $m$ числами — значениями $f_i(x)$ всех критериев, образующими *векторную оценку* этого варианта $y = f(x) = (f_1(x), ..., f_m(x))$. Сравнение вариантов по предпочтительности сводится к сопоставлению их векторных оценок. Множество всех векторных оценок (как реальных, т. е. соответствующих вариантам из множества $X$, так и гипотетических) есть $Z = Z_0^m$. Предпочтения лица, принимающего решение (ЛПР), моделируются с использованием отношения нестрогого предпочтения $R$ на множестве векторных оценок $Z$: запись $yRz$ означает, что векторная оценка $y$ не менее предпочтительна, чем $z$. Отношение $R$ считается (частичным) квазипорядком: оно рефлексивно ($zRz$ верно для всех $z \in Z$) и транзитивно (из $yRz$ и $zRu$ следует $yRu$ при любых $y$, $z$, $u \in Z$). Отношение $R$ порождает отношения (строгого) предпочтения $P$ и безразличия $I$. Соотношение $yPz$ (которое означает, что векторная оценка $y$ предпочтительнее, чем $z$) верно, когда верно $yRz$, а $zRy$ неверно. Соотношение $yIz$ (т. е. $y$ и $z$ одинаковы по предпочтительности), когда верны $yRz$ и $zRy$. Если неверно ни $yRz$, ни $zRy$, то $y$ и $z$ несравнимы по $R$ (несравнимы по предпочтительности).

В модели (1) все частные критерии $f_i$ однородны, т. е. имеют общую шкалу. В практических задачах однородными являются, например, критерии, имеющие общую балльную или же вербальную шкалу. Если изначально критерии имеют разные шкалы, то их нужно привести к единой шкале специальными приемами [11, 13].

**1.2.** Иерархическая модель, предложенная в работе [9], предполагает, что частные критерии $f_i$ формируют критерии всех уровней критериальной структуры. Под критерием любого уровня понимается группа составляющих его частных критериев. Критерии каждого уровня в совокупности охватывают все частные критерии, и каждый частный критерий входит в состав только одного критерия этого уровня.

**Пример 1.** Рассмотрим иерархическую модель, приведенную на рисунке. Она содержит две альтернативы $x^1$ и $x^2$, расположенные на нижнем уровне иерархии ($l = 4$), и семь частных критериев, образующих четырехуровневую критериальную структуру (уровни $l = 0, 1, 2, 3$). Обозначения критериев включают в себя два индекса: верхний указывает номер уровня, на котором находится критерий, а нижний содержит номера частных критериев, которые входят в его состав. Нижний уровень критериальной структуры ($l = 3$) образуют семь частных критериев $f_1^3 = f_1, ..., f_7^3 = f_7$ (для простоты обозначений они занумерованы слева направо в порядке расположения их на этом уровне). На уровне $l = 2$ частные критерии сгруппированы так, что они образуют три группы — критерии $f_{12}^2 = \{f_1, f_2\}$, $f_{345}^2 = \{f_3, f_4, f_5\}$ и $f_{67}^2 = \{f_6, f_7\}$. Уровень $l = 1$ составляют два критерия $f_{12}^1 = \{f_1, f_2\}$ и $f_{34567}^1 = \{f_3, f_4, f_5, f_6, f_7\}$, полученные группированием критериев $f_{12}^2$, $f_{345}^2$ и $f_{67}^2$ уровня $l = 2$. Наконец, верхний уровень $l = 0$ образуется только одним критерием, который включает в свой состав все частные критерии: $f_{1234567}^0 = \{f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6, f_7\}$. Каждый критерий удобно рассматривать не только как группу из составляющих его частных критериев, но и как векторный критерий, образованный этими частными критериями. Например, $f_{12}^1 = \{f_1, f_2\}$ или $f_{12}^1 = (f_1, f_2)$. На рисунке указаны также коэффициенты важности $\alpha_{12}^2, ..., \alpha_7^3$ критериев всех уров-




**Пример пятиуровневой иерархической системы с коэффициентами важности критериев $\alpha$**

ней, кроме верхнего (формально можно положить $\alpha^0_{1234567} = 1$). Точный их смысл определяется согласно ТВК, о чем речь пойдет далее. ♦

Подчеркнем, что описанная критериальная система *принципиально отличается* от принятой в методе анализа иерархий, так как в нем (как и во всех других предлагавшихся методах анализа иерархических систем) понятие критерия, не находящегося на нижнем уровне, не структурируется и поэтому не определено, какие значения он может принимать.

**1.3.** При решении практических задач иерархическая критериальная система может формироваться как «сверху вниз» (критерии рассматриваемого уровня «делятся» на несколько критериев следующего, более низкого уровня), так и «снизу вверх» (критерии очередного уровня «группируются» в критерии следующего, более высокого уровня). Каждый критерий любого уровня должен иметь содержательный смысл, понятный ЛПР. Поясним это на примере.

**Пример 2.** Предположим, что надо выбрать одно из двух мест (альтернатив $x^1$ и $x^2$) для расположения нового химического предприятия и необходимо учесть экономические (критерий $f^1_{(1)}$) и экологические (критерий $f^1_{(2)}$) последствия выбора конкретного места. При более подробном анализе этих критериев выясняется, что критерий $f^1_{(2)}$ можно представить в виде двух критериев, отражающих влияние предприятия на среду обитания и здоровье людей (критерий $f^2_{(2)}$) и влияние на существующие отрасли хозяйства (критерий $f^2_{(3)}$), а критерий $f^1_{(1)}$ на данном этапе можно не конкретизировать (так что $f^2_{(1)} = f^1_{(1)}$). Наконец, полученные критерии второго уровня можно разложить на более простые. Критерий $f^2_{(1)}$ можно представить в виде совокупности двух критериев $f^3_{(1)}$ и $f^3_{(2)}$, учитывающих стоимость и срок создания предприятия соответственно. Критерий $f^2_{(2)}$ можно рассматривать как совокупность трех критериев $f^3_{(3)}$, $f^3_{(4)}$ и $f^3_{(5)}$, характеризующих соответственно загрязнение атмосферного воздуха, источников воды и почвы. А критерий $f^3_{(2)}$ можно представить в виде совокупности двух критериев — $f^3_{(6)}$ (отражает влияние нового предприятия на сельскохозяйственное производство) и $f^3_{(7)}$ (характеризует его влияние на туризм). Таким образом, для первоначально принятых обозначений критериев разных уровней имеем:

$$f^3_{(1)} = f^3_1 = f_1, \quad f^3_{(2)} = f^3_2 = f_2, \quad f^3_{(3)} = f^3_3 = f_3,$$
$$f^3_{(4)} = f^3_4 = f_4, \quad f^3_{(5)} = f^3_5 = f_5, \quad f^3_{(6)} = f^3_6 = f_6,$$
$$f^3_{(7)} = f^3_7 = f_7; \quad f^2_{(1)} = f^2_{12}, \quad f^2_{(2)} = f^2_{345},$$
$$f^2_{(3)} = f^2_{67}; \quad f^1_{(1)} = f^1_{12}, \quad f^1_{(2)} = f^1_{34567}.$$

Полученная многоуровневая критериальная структура соответствует рисунку. ♦

**1.4.** Приведем необходимые для дальнейшего изложения сведения из ТВК [13—15], которая была разработана для задач с одноуровневой критериальной системой, т. е. применительно к модели (1). Далее примем, что множество значений критериев $Z_0$ конечно: $Z_0 = \{1, ..., k, ..., q\}$, $q \geq 2$, и будем называть его *множеством градаций*. Если не оговорено иное, то шкала критериев полагается порядковой (т. е. числа $k$ — это номера градаций в порядке возрастания их предпочтительности: их можно только сравнивать по величине). Например, для задачи со структурой, изображенной на рисунке, все критерии могут быть приведены к единой вербальной шкале (и тогда $k$ — номер словесной градации, скажем, 1 — «очень плохо», ..., 5 — «очень хорошо») или же к $q$-балльной шкале (в частности, для пятибалльной шкалы $q = 5$). Будем считать, что бóльшие значения критериев предпочтительнее меньших. Поэтому на множестве векторных оценок $Z$ определено отношение нестрогого предпочтения $R^0$ — отношение Парето (частичный квазипорядок):

$$yR^0z \Leftrightarrow y_i \geq z_i, \quad i = 1, ..., m.$$

Обычно этого отношения для получения требуемого решения задачи недостаточно: остается слишком много пар альтернатив, чьи векторные оценки несравнимы по $R^0$. Поэтому его нужно расширить. Для этого требуется дополнительная информация о предпочтениях ЛПР. В качестве такой информации выступают сведения о важности критериев и о росте предпочтений вдоль их шкалы [11].

В ТВК предложены строгие определения понятий качественной и количественной важности критериев [13—15]. Информация о качественной важности Ω состоит из сообщений вида «обе группы критериев равноважны» и «одна группа критериев важнее другой», а информация о количественной важности — из сообщений вида «одна группа критериев важнее другой в $h$ раз». Информация о количественной важности состоит из сообщений вида «одна группа критериев важнее другой во столько-то раз». Отметим, что группа может содержать только один критерий. Качественная информация о важности $\Omega$ и количественная информация о важности $\Theta$ порождают на множестве векторных оценок $Z$ отношения нестрогого предпочтения $R^\Omega$ и $R^\Theta$ соответственно.

Далее полагаем, что количественная информация $\Theta$ является *непротиворечивой* и *полной*, т. е. позволяет для любой пары критериев $f_i$ и $f_j$ установить степень $h_{ij}$ превосходства в важности первого из них над вторым (т. е. что критерий $f_i$ важнее, чем $f_j$, в $h_{ij}$ раз). Такая информация порождает *количественные*, или *кардинальные коэффициенты важности* критериев $\alpha_i$ — положительные числа, в сумме равные единице и удовлетворяющие условию: $\alpha_i/\alpha_j = h_{ij}$, $i, j = 1, ..., m$. Коэффициенты важности $\alpha_i$ единственны.

Для векторной оценки $y$ вводятся в рассмотрение пороговые коэффициенты важности отдельных критериев для градаций их шкалы

$$\alpha_{ik}(y) = \begin{cases} \alpha_i, y_i \le k, \\ 0, y_i > k, \end{cases}$$
$$i = 1, ..., m; \quad k = 1, ..., q - 1, \tag{2}$$

и суммарные пороговые коэффициенты важности всех критериев для каждой градации

$$\alpha_k(y) = \alpha_{1k}(y) + ... + \alpha_{mk}(y), \quad k = 1, ..., q - 1. \tag{3}$$

Решающее правило, задающее отношение $R^\Theta$, таково [15]:

$$yR^\Theta z \Leftrightarrow \alpha_k(y) \le \alpha_k(z), \quad k = 1, ..., q - 1. \tag{4}$$

Пусть число градаций $q > 2$ и дополнительно стало известно, что рост предпочтений вдоль множества градаций $Z_0$ замедляется (информация $\Delta\downarrow$). Это означает, что при переходе от градации $k$ к градации $k + 1$ предпочтения возрастают больше, чем при переходе от $k + 1$ к $k + 2$, $k = 1, ..., q - 2$. Разработаны специальные способы получения такой информации [11].

Введем в рассмотрение кумулятивные суммарные коэффициенты важности критериев $\alpha^{1-k}(y) = \alpha_1(y) = ... + \alpha_k(y)$, $k = 1, ..., q - 1$. Решающее правило для отношения $R^{\Theta\Delta\downarrow}$, задаваемого информацией $\Theta\&\Delta\downarrow$, имеет вид [16]:

$$yR^{\Theta\Delta\downarrow}z \Leftrightarrow \alpha^{1-k}(y) \le \alpha^{1-k}(z), \quad k = 1, ..., q - 1. \tag{5}$$

Если в правилах (4) или (5) хотя бы одно неравенство выполняется как строгое, то векторная оценка $y$ предпочтительнее оценки $z$. А если все нестрогие неравенства оказываются равенствами, то оценки $y$ и $z$ одинаковы по предпочтительности.

## 2. РЕШАЮЩИЕ ПРАВИЛА ДЛЯ ЗАДАЧ С ИЕРАРХИЧЕСКОЙ СТРУКТУРОЙ

**2.1.** В задачах с иерархической структурой под критериями $f^l_{i_1 \dots i_l}$ можно понимать, как указывалось выше, группы, состоящие из частных критериев $f_{i_1}$, ..., $f_{i_l}$. При анализе практических задач вопросы ЛПР можно задавать о сравнении по важности критериев одного и того же уровня с общим «родителем». При сравнениях таким критериям можно приписывать значения шкалы частных критериев следующим образом: считать, что значение критерия $f^l_{i_1 \dots i_l}$ соответствует градации $k \in Z_0$, когда значения всех входящих в его состав частных критериев $f_{i_1}$, ..., $f_{i_l}$ равны $k$. Например, если градации являются лингвистическими и оценка $k$ — это номер градации «хорошо», то при выполнении указанного условия критерию $f^l_{i_1 \dots i_l}$ можно приписать «интегральную» оценку $k$ — «хорошо».

Для получения качественной информации о важности $\Omega$ можно исходить непосредственно из определений понятий равенства и превосходства в важности для групп критериев [11, 13]. На основе собранной информации $\Omega$ с учетом наличия сведений о характере роста предпочтений вдоль шкалы критериев определяется отношение нестрогого предпочтения $R^\Omega$. Для его построения, в принципе, можно воспользоваться общим методом из работы [17]. Однако он предполагает матричное представление бинарных отношений, и поэтому уже при сравнительно небольшом числе критериев и небольшом числе градаций оказывается неподъемным даже для современной вычислительной техники. К сожалению, разработать аналитические методы построения таких отношений нам пока не удалось. Однако при некотором дополнительном предположении несложно сконструировать оптимизационные методы (см. далее пример 4).

Количественную информацию о важности критериев можно собирать с помощью методов из работ [11, 13], используя «интегральные» оценки сравниваемых критериев. Информацию о степенях превосходства в важности можно получать как в виде точных, так и интервальных оценок путем попарного сравнения критериев, а затем рассчитывать коэффициенты важности методом главного собственного вектора [1] или другим подходящим методом, например, из работы [18].

**2.2.** Для построения отношения нестрогого предпочтения, порождаемого собранной количественной информацией о важности критериев и имеющихся сведений о характере роста предпочтений вдоль их шкалы, согласно результатам работ [19, 20], можно вначале рассчитать коэффициенты важности критериев разных уровней и вычислить итоговые коэффициенты важности частных критериев по обычным правилам, используемым при анализе иерархических систем. (Обоснование такого способа расчета применительно к используемой нами иерархической модели дано в работах [19, 20].) А затем для сравнения альтернатив по предпочтительности следует воспользоваться подходящим аналитическим решающим правилом, например, (4) или (5), в которых под коэффициентами важности $\alpha_i$ следует понимать итоговые коэффициенты важности частных критериев. Сформулированные положения иллюстрирует

**Пример 3.** Пусть в задаче из примера 1 множество градаций $Z_0 = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ и имеется количественная информация о важности критериев:

$$f^1_{12} \succ^{3/2} f^1_{34567}; \quad f^2_{345} \succ^{7/3} f^2_{67}; \quad f^3_1 \succ^1 f^3_2, \\ f^3_3 \succ^1 f^3_4, \quad f^3_4 \succ^2 f^3_5, \quad f^3_6 \succ^1 f^3_7, \qquad (6)$$

т. е., например, критерий $f^1_{12}$ важнее критерия $f^1_{34567}$ (иначе говоря, группа критериев $\{f_1, f_2\}$ важнее группы критериев $\{f_3, f_4, f_5, f_6, f_7\}$) в 1,5 раза, а критерии $f^3_1$ и $f^3_2$ (т. е. частные критерии $f_1$ и $f_2$ равноважны). На основе этих данных получаются значения коэффициентов важности, представленных на рисунке:

$$\alpha^1_{12} = 0{,}6; \quad \alpha^1_{34567} = 0{,}4; \quad \alpha^2_{12} = 1; \quad \alpha^2_{345} = 0{,}7; \\ \alpha^2_{67} = 0{,}3; \quad \alpha^3_1 = 0{,}5; \quad \alpha^3_2 = 0{,}5; \quad \alpha^3_3 = 0{,}4; \\ \alpha^3_4 = 0{,}4; \quad \alpha^3_5 = 0{,}2; \quad \alpha^3_6 = 0{,}5; \quad \alpha^3_7 = 0{,}5.$$

Действительно, например, $\alpha^1_{12}/\alpha^1_{34567} = 3/2$. Полученные коэффициенты важности позволяют рассчитать итоговые коэффициенты важности $\alpha_i$ частных критериев $f_i$ (см. рисунок):

$$\alpha_1 = 0{,}6 \cdot 1 \cdot 0{,}5 = 0{,}3; \\ \alpha_2 = 0{,}6 \cdot 1 \cdot 0{,}5 = 0{,}3; \\ \alpha_3 = 0{,}4 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}4 = 0{,}112; \\ \alpha_4 = 0{,}4 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}4 = 0{,}112; \\ \alpha_5 = 0{,}4 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}2 = 0{,}056; \\ \alpha_6 = 0{,}4 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}5 = 0{,}06; \\ \alpha_7 = 0{,}4 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}5 = 0{,}06.$$

Пусть для альтернатив $x^1$ и $x^2$ значения векторного критерия $f$ таковы:

$$y = f(x^1) = (4, 4, 3, 5, 3, 1, 2), \\ z = f(x^2) = (5, 3, 2, 4, 4, 3, 1). \qquad (7)$$

Если информации о характере роста предпочтений вдоль шкалы критериев нет, т. е. она является порядковой, то для сравнения альтернатив можно воспользоваться решающим правилом (4). Поскольку

$$\alpha_1(y) = 0{,}06 = \alpha_1(z); \\ \alpha_2(y) = 0{,}12 < \alpha_2(z) = 0{,}172; \\ \alpha_3(y) = 0{,}288 < \alpha_3(z) = 0{,}532; \\ \alpha_4(y) = 0{,}888 > \alpha_4(z) = 0{,}7,$$

то, согласно правилу (4), неверно ни $yR^{\Theta}z$, ни $zR^{\Theta}y$, т. е. альтернативы $x^1$ и $x^2$ несравнимы по предпочтительности.

Пусть теперь стало известно, что рост предпочтений вдоль шкалы критериев замедляется. Тогда для чисел

$$\alpha^{1-1}(y) = 0{,}06; \quad \alpha^{1-2}(y) = 0{,}18; \quad \alpha^{1-3}(y) = 0{,}468; \\ \alpha^{1-4}(y) = 1{,}356; \quad \alpha^{1-1}(z) = 0{,}06; \quad \alpha^{1-2}(z) = 0{,}232; \\ \alpha^{1-3}(z) = 0{,}764; \quad \alpha^{1-4}(z) = 1{,}464$$

справедливо

$$\alpha^{1-1}(y) = \alpha^{1-1}(z), \quad \alpha^{1-2}(y) < \alpha^{1-2}(z), \\ \alpha^{1-3}(y) < \alpha^{1-3}(z), \quad \alpha^{1-4}(y) < \alpha^{1-4}(z).$$

Поэтому, согласно правилу (5), альтернатива $x^1$ предпочтительнее альтернативы $x^2$. ♦

**Замечание 1.** Анализ чувствительности полученной оптимальной альтернативы к изменению значений коэффициентов важности можно провести с помощью метода из работы [21].

**2.3.** Ранее предполагалось, что коэффициенты важности критериев известны точно. Однако при получении количественной информации о важности естественным образом возникают не точные (точечные), а множественные (в частности, интервальные) оценки [11]. Поэтому, если не принимать дополнительных допущений, позволяющих рассчитать точные значения коэффициентов важности, то приходится признать, что для вектора коэффициентов важности $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m)$ известно лишь некоторое (непустое) множество возможных его значений $A$. В этом случае, согласно известному в теории принятия решений подходу (см., например, статьи [22, 23]) отношение нестрогого предпочтения $R(A)$, порождаемое на множестве $Z$ информацией о важности критериев с использованием множества $A$, определяется так:

$$yR(A)z \Leftrightarrow yR(\alpha)z \text{ верно при любом } \alpha \in A, \qquad (8)$$

где $R(\alpha)$ — отношение нестрогого предпочтения, задаваемое подходящим решающим правилом при известном значении $\alpha$. Рассматриваемый подход позволяет, в частности, построить решающие правила и для качественной информации о важности критериев.

**Пример 4.** Пусть в задаче из примера 3 вместо количественной информации (6) имеется лишь качественная информация:

$$f^1_{12} \succ f^1_{34567}; \quad f^2_{345} \succ f^2_{67}; \quad f^3_1 \approx f^3_2; \quad f^3_3 \approx f^3_4;$$
$$f^3_4 \succ f^3_5; \quad f^3_6 \succ f^3_7,$$

т. е. известно только, что критерий $f^1_{12}$ важнее критерия $f^1_{34567}$, критерии $f^3_1$ и $f^3_2$ равноважны и т. д. Для этой информации множество $A$ возможных значений количественных коэффициентов важности частных критериев задается системой соотношений (см. рисунок):

$$\alpha_1 > 0,\ \alpha_2 > 0,\ \alpha_3 > 0,\ \alpha_4 > 0,\ \alpha_5 > 0,\ \alpha_6 > 0,\ \alpha_7 > 0,$$
$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_6 + \alpha_7 = 1,$$
$$\alpha_1 + \alpha_2 > \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_6 + \alpha_7,$$
$$\alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 > \alpha_6 + \alpha_7, \quad \alpha_1 = \alpha_2, \quad \alpha_3 = \alpha_4,$$
$$\alpha_4 > \alpha_5, \quad \alpha_6 = \alpha_7. \qquad (9)$$

Если шкала критериев порядковая, то, согласно правилу (4) и отношению (8), отношение $R(A)$ задается так:

$$yR(A)z \Leftrightarrow \text{при любом } \alpha \in A \text{ верны неравенства}$$
$$\alpha_k(y) \le \alpha_k(z), \quad k = 1, ..., q - 1. \qquad (10)$$

Сравним по предпочтительности альтернативы $x^1$ и $x^2$ с векторными оценками (7). Согласно выражениям (2) и (3) для $y$ имеем:

$$\alpha_{11}(y) = 0, \quad \alpha_{21}(y) = 0, \quad \alpha_{31}(y) = 0, \quad \alpha_{41}(y) = 0,$$
$$\alpha_{51}(y) = 0, \quad \alpha_{61}(y) = \alpha_6, \quad \alpha_{71}(y) = 0;$$
$$\alpha_{12}(y) = 0, \quad \alpha_{22}(y) = 0, \quad \alpha_{32}(y) = 0, \quad \alpha_{42}(y) = 0,$$
$$\alpha_{52}(y) = 0, \quad \alpha_{62}(y) = \alpha_6, \quad \alpha_{72}(y) = \alpha_7;$$
$$\alpha_{13}(y) = 0, \quad \alpha_{23}(y) = 0, \quad \alpha_{33}(y) = \alpha_3, \quad \alpha_{43}(y) = 0,$$
$$\alpha_{53}(y) = \alpha_5, \quad \alpha_{63}(y) = \alpha_6, \quad \alpha_{73}(y) = \alpha_7;$$
$$\alpha_{14}(y) = \alpha_1, \quad \alpha_{23}(y) = \alpha_2, \quad \alpha_{33}(y) = \alpha_3, \quad \alpha_{43}(y) = 0,$$
$$\alpha_{53}(y) = \alpha_5, \quad \alpha_{63}(y) = \alpha_6, \quad \alpha_{73}(y) = \alpha_7;$$
$$\alpha_1(y) = \alpha_6, \quad \alpha_2(y) = \alpha_6 + \alpha_7,$$
$$\alpha_3(y) = \alpha_3 + \alpha_5 + \alpha_6 + \alpha_7,$$
$$\alpha_4(y) = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_5 + \alpha_6 + \alpha_7.$$

Аналогично для $z$ получаем

$$\alpha_1(z) = \alpha_7, \quad \alpha_2(z) = \alpha_3 + \alpha_7,$$
$$\alpha_3(z) = \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_6 + \alpha_7,$$
$$\alpha_4(z) = \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_6 + \alpha_7.$$

Теперь (10) можно записать в развернутом виде: $yR(A)z$ верно тогда и только тогда, когда для любого $\alpha \in A$ справедливы неравенства

$$\alpha_6 \le \alpha_7, \quad \alpha_6 + \alpha_7 \le \alpha_3 + \alpha_7,$$
$$\alpha_3 + \alpha_5 + \alpha_6 + \alpha_7 \le \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_6 + \alpha_7,$$
$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_5 + \alpha_6 + \alpha_7 \le \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 +$$
$$+ \alpha_5 + \alpha_6 + \alpha_7.$$

Поскольку, согласно соотношениям (9), $\alpha_6 = \alpha_7$, то последнее условие равносильно выполнению трех неравенств

$$\max_{\alpha \in \bar{A}} (\alpha_6 - \alpha_3) \le 0, \quad \max_{\alpha \in \bar{A}} (\alpha_5 - \alpha_2) \le 0,$$
$$\max_{\alpha \in \bar{A}} (\alpha_1 + \alpha_5 - \alpha_4) \le 0, \qquad (11)$$

где $\bar{A}$ — множество, определяемое системой, получаемой из соотношений (9) заменой всех строгих неравенств на нестрогие (эту замену можно сделать, так как множество $A$ не пусто [23]). Для проверки справедливости неравенств (11) нужно решить три задачи линейного программирования. Первая из них записывается так:

$$\alpha_6 - \alpha_3 \to \max \qquad (12)$$

при ограничениях:

$$\alpha_1 \ge 0,\ \alpha_2 \ge 0,\ \alpha_3 \ge 0,\ \alpha_4 \ge 0,\ \alpha_5 \ge 0,\ \alpha_6 \ge 0,\ \alpha_7 \ge 0,$$
$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_6 + \alpha_7 = 1,$$
$$\alpha_1 - \alpha_2 = 0, \quad \alpha_3 - \alpha_4 = 0, \quad \alpha_6 - \alpha_7 = 0,$$
$$-\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_6 + \alpha_7 \le 0,$$
$$-\alpha_3 - \alpha_4 - \alpha_5 + \alpha_6 + \alpha_7 \le 0, -\alpha_4 + \alpha_5 \le 0. \qquad (13)$$

Решив задачу (12), (13) на компьютере (например, с помощью программы MS Excel), найдем, что максимальное значение целевой функции равно 0,4166667 > 0, так что уже первое неравенство в системе (12) не выполнено. Поэтому $yR(A)z$ неверно. Аналогично можно убедиться в том, что и $zR(A)y$ неверно. Следовательно, альтернативы $x^1$ и $x^2$ несравнимы по предпочтительности. Этот результат ожидаем, так как даже при точных значениях коэффициентов важности эти альтернативы несравнимы по предпочтительности (см. пример 2).

**Замечание 2.** Рассмотренный в примере 3 подход к построению решающих правил для качественной информации о важности критериев Ω предполагает существование количественных коэффициентов важности. Полезно иметь в виду, что при порядковой шкале критериев принятие допущения о существовании количественных коэффициентов важности не приводит к расширению отношения $R^{\Omega}$. Но если известно, что рост предпочтений вдоль шкалы критериев замедляется, то такое допущение расширяет отношение $R^{\Omega\Delta\downarrow}$ (см. работу [24]).

**Замечание 3.** Были рассмотрены только те случаи, когда шкала критериев порядковая или же известно, что рост предпочтений вдоль множества градаций $Z_0$ замедляется. Понятно, конечно, что для анализа многокритериальных задач в рамках предложенной иерархической модели можно использовать и другие решающие правила, разработанные в ТВК для случаев, когда критерии имеют более совершенную шкалу [25].

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Решающие правила, базирующиеся на новой иерархической модели, целесообразно применять для решения практических многокритериальных задач в соответствии с итеративно-фрагментарным подходом [25], согласно которому вначале следует получать и использовать простую и потому надежную информацию о предпочтениях (в частности, качественную информацию о важности критериев). И лишь затем, если этой информации недостаточно для получения решения в требуемом виде (например, для выделения одной наилучшей альтернативы), нужно собирать и использовать более сложную, но менее надежную информацию (например, количественную информацию о важности критериев; при этом вначале следует получать интервальные, а затем уже точные оценки важности).

*Авторы благодарны Л.Г. Егоровой и А.П. Нелюбину за полезные замечания.*

## ЛИТЕРАТУРА


1. *Саати Т.* Принятие решений. Метод анализа иерархий / Пер. с англ. — М.: Радио и связь, 1993. — 320 с.
2. *Belton V., Stewart T.J.* Multiple criteria decision analysis: an integrated approach. — Boston: Cluwer, 2003. — 372 p.
3. *Подиновская О.В.* Метод анализа иерархий как метод поддержки принятия многокритериальных решений // Информационные технологии моделирования и управления. — 2010. — № 1 (60). — С. 71—80.
4. *Barzilai J.* Notes on the analytic hierarchy process // Proc. of the NSF design and manufacturing research conference. — Tampa, Florida, 2001. — P. 1—6. — URL: http://scientific-metrics.com/downloads/publications/Barzilai_2001_Notes_on_the_Analytic_Hierarchy_Process.pdf (дата обращения: 20.11.2014).
5. *Подиновский В.В., Подиновская О.В.* О некорректности метода анализа иерархий // Проблемы управления. — 2011. — № 1. — С. 8—13.
6. *Подиновский В.В., Подиновская О.В.* Еще раз о некорректности метода анализа иерархий // Проблемы управления. — 2012. — № 4. — С. 75—78.
7. *Edwards W., Barron F.H.* SMARTS and SMARTER: improved simple methods for multiattribute utility measurement // Organization behavior and human processes. — 1994. — Vol. 60. — P. 306—325.
8. *Barzilai J.* Preference function modelling: the mathematical foundations of decision theory // Trends in multiple criteria decision analysis / M. Ehrgott, J.R. Figueira, S. Greco (Eds.). — New York: Springer, 2010. — P. 57—86.
9. *Подиновский В.В., Подиновская О.В.* Подход теории важности критериев к задачам принятия решений с иерархической критериальной структурой // Научно-техническая информация. Сер. 2. Информационные процессы и системы. — 2014. — № 1. — С. 1—6.
10. *Podinovski V.V.* Multicriteria optimization problems involving importance-ordered criteria // Modern mathematical methods of optimization / Elster K.-H. (Ed.). — Berlin: Akademie Verlag, 1993. — P. 254—267.
11. *Подиновский В.В.* Введение в теорию важности критериев в многокритериальных задачах принятия решений / Учебное пособие. — М.: Физматлит, 2007. — 64 с.
12. *Подиновский В.В., Потапов М.А.* Важность критериев в многокритериальных задачах принятия решений: теория, методы, софт и приложения // Открытое образование. — 2012. — № 2. — С. 55—61.
13. *Подиновский В.В.* Аксиоматическое решение проблемы оценки важности критериев в многокритериальных задачах принятия решений // Современное состояние теории исследования операций / Под ред. Н.Н. Моисеева. — М.: Наука, 1979. — С. 117—145.
14. *Подиновский В.В.* Многокритериальные задачи с упорядоченными по важности однородными критериями // Автоматика и телемеханика. — 1976. — № 11. — С. 118—127.
15. *Podinovski V.V.* The quantitative importance of criteria for MCDA // Journal of multi-criteria decision analysis. — 2002. — Vol. 11. — P. 1—15.
16. *Podinovski V.V.* On the use of importance information in MCDA problems with criteria measured on the first ordered metric scale // Journal of multi-criteria decision analysis. — 2009. — Vol. 15. — P. 163—174.
17. *Осипова В.А., Подиновский В.В., Яшина Н.П.* О непротиворечивом расширении отношений предпочтения в задачах принятия решений // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 1984. — № 6. — С. 831—840.
18. *Podinovski V.V.* Interval articulation of superiority and precise elicitation of priorities // European journal of operational research. — 2007. — Vol. 180. — P. 406—417.
19. *Подиновский В.В., Подиновская О.В.* Информация о важности групп критериев в многокритериальных задачах принятия решений. I. Качественная информация. Равноважные группы критериев равной важности // Информационные технологии моделирования и управления. — 2014. — № 1 (85). — С. 58—67.
20. *Подиновский В.В., Подиновская О.В.* Информация о важности групп критериев в многокритериальных задачах принятия решений. II. Количественная важность // Там же. — № 3 (87). — С. 238—247.
21. *Podinovski V.V.* Sensitivity analysis for choice problems with partial preference relations // European journal of operational research. — 2012. — Vol. 221. — P. 198—204.
22. *Weber M.* Decision making with incomplete information // European journal of operational research. — 1987. — Vol. 28. — P. 44—57.
23. *Подиновский В.В.* Анализ решений при множественных оценках коэффициентов важности критериев в целевой функции и вероятностей значений неопределенных факторов // Автоматика и телемеханика. — 2004. — № 11. — С. 141—159.
24. *Нелюбин А.П., Подиновский В.В.* Взаимосвязь качественной и количественной важности критериев в многокритериальных задачах принятия решений // Открытое образование. — 2011. — № 6 (89). — С. 108—115.
25. *Подиновский В.В.* Анализ задач многокритериального выбора методами теории важности критериев при помощи компьютерных систем поддержки принятия решений // Известия РАН. Теория и системы управления. — 2008. — № 2. — С. 64—68.


*Статья представлена к публикации членом редколлегии Ф.Т. Алескеровым.*

**Подиновская Ольга Владиславна** — мл. специалист,
Мак-Кинзи и Компания СиАйЭс, г. Москва,
✉ podinovskaya@mail.ru,

**Подиновский Владислав Владимирович** — д-р техн. наук,
профессор, Национальный исследовательский университет
«Высшая школа экономики», г. Москва,
☎ (495) 621-13-42, ✉ podinovski@mail.ru.