

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ТЕПЛОВЫМ ИСТОЧНИКОМ ВОЗДЕЙСТВИЯ В ПРОЦЕССАХ ПАРОФАЗНОГО ОСАЖДЕНИЯ

В.П. Первадчук, Д.Б. Владимирова, Д.Н. Дектярев

Аннотация. Рассмотрена математическая модель, описывающая процесс нагрева кварцевой трубы подвижным источником тепла, представленная в виде одномерного уравнения теплопроводности. На основе этой модели сформулирована и решена задача оптимального стабилизирующего управления с распределенным управлением и распределенным наблюдением для линеаризованной задачи. В качестве управляющего воздействия выбрана величина расхода газовой смеси, определяющая мощность теплового источника. Цель управления заключается в минимизации возможных температурных отклонений от программных режимов процесса легирования кварцевых труб. Получены необходимые условия оптимальности в форме оптимизационной системы, состоящей из двух дифференциальных уравнений в частных производных, а также закон нахождения функции оптимального управления, явно зависящий от решения этой системы уравнений. Проведено численное решение оптимизационной системы, получены новые количественные результаты для функции управляющего воздействия, рассчитаны и проанализированы распределения температуры при различных режимах управления.

Ключевые слова: оптимальное управление, процесс MCVD, распределенная система, оптимизационная система.

ВВЕДЕНИЕ

Теория оптимального управления распределенными системами интенсивно развивается на протяжении нескольких последних десятилетий. Основу исследований в большинстве случаев составляют функциональные уравнения, в том числе дифференциальные уравнения с частными производными. Большой вклад в развитие этой проблемы принадлежит А.Г. Бутковскому и Ж.-Л. Лионсу [1, 2].

Основной целью теории оптимального управления является исследование вопроса о существовании оптимального управления, доставляющего минимум целевому функционалу, а также получение необходимых и, если это возможно, достаточных условий оптимальности управления.

В общем виде задачу оптимального управления можно сформулировать так:

$$I(y, u) \rightarrow \inf, \quad (1)$$

$$F(y, u) = 0, \quad u \in U_d, \quad (2)$$

где $I: Y \times U \rightarrow \bar{R}$ — целевой функционал; $F: Y \times U \rightarrow V$ — оператор с частными производными или интегро-дифференциальный оператор; y — параметр состояния системы; u — функция управ-

ления; U_d — выпуклое подмножество пространства U , содержащее более одной точки; Y, U, V — банаховы пространства; \bar{R} — расширенная числовая прямая, т. е. множество вещественных чисел, дополненное двумя бесконечно удаленными точками $\{+\infty\}$ и $\{-\infty\}$. Таким образом, уравнение (2) представляет собой уравнение состояния, к которому необходимо добавить граничные условия, а также условия в начальный момент времени для случая, когда F — эволюционный оператор. Определив множество допустимых пар (процессов) управление — состояние как множество $\Delta = \{(y, u) \in Y \times U_d: F(y, u) = 0, I(y, u) < \infty\}$, назовем $(\hat{y}, \hat{u}) \in \Delta$ оптимальной парой (процессом), если $I(\hat{y}, \hat{u}) = \inf_{(y, u) \in \Delta} I(y, u)$.

Среди достаточных условий существования оптимального управления основными являются условия нетривиальности [3], коэрцитивности, компактности. Условие нетривиальности состоит в предположении, что множество Δ не пусто. Условие коэрцитивности требует ограниченности множества $\{(y, u) \in \Delta: I(y, u) \leq M\}$ в пространстве $Y \times U$ для некоторого числа M . Условие компактности предполагает компактность любого ограниченного подмножества в множестве Δ . Кроме этого,

функционал $I(y, u)$ предполагают ограниченным снизу и полунепрерывным снизу на $Y \times U_d$.

В некоторых случаях проверка указанных условий сложна и оказывается проще применить метод доказательства теоретического существования решения абстрактной задачи [3]. Впервые этот метод был предложен А.В. Фурсиковым [4, 5] для задач оптимального управления системой Навье — Стокса. Ж.-Л. Лионс [6] аналогичным методом исследовал широкий класс задач оптимального управления с сингулярностями.

Набор соотношений, описывающих необходимые условия для задачи (1) вместе с ограничениями (2) исходной задачи, называют системой оптимальности [7]. В случае линейных задач оптимального управления с выпуклым целевым функционалом система оптимальности обычно является не только необходимым, но и достаточным условием отыскания минимума экстремальной задачи. К настоящему времени в теории оптимального управления распределенными системами разработано множество методов получения систем оптимальности, к ним можно отнести принцип максимума Понтрягина, принцип Беллмана, принцип Лагранжа. В работе [3] для вывода систем оптимальности применяются различные варианты известного принципа Лагранжа, сформулированного впервые самим Ж.Л. Лагранжем [8]. Обоснованию и развитию этого принципа посвящены работы В.М. Алексеева, В.М. Тихомирова, С.В. Фомина [9], а также А.И. Егорова [10]. Современный вариант принципа Лагранжа, удобный для применения в широком классе задач оптимального управления, доказан А.Д. Иоффе и В.М. Тихомировым [11]. Весьма существенный шаг в обосновании этого принципа сделал Люстерник и Варга [12]. Этот же принцип в новом изложении описан А.В. Фурсиковым [3].

В настоящей работе будет предложен подход к получению и численной реализации системы оптимальности для задачи оптимального управления технологическим процессом получения кварцевых труб. Задача управления будет представлять собой задачу с компромиссным распределенным управлением и распределенным наблюдением. Система оптимальности будет получена в сильной форме [3], т. е. в форме системы дифференциальных уравнений в частных производных, функция оптимального управления будет определяться явной зависимостью из решения полученной системы.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В процессе изготовления специальных оптических световодов одним из ключевых звеньев в технологической цепи производства является процесс легирования кварцевого стекла. Один из наиболее современных способов легирования — мо-

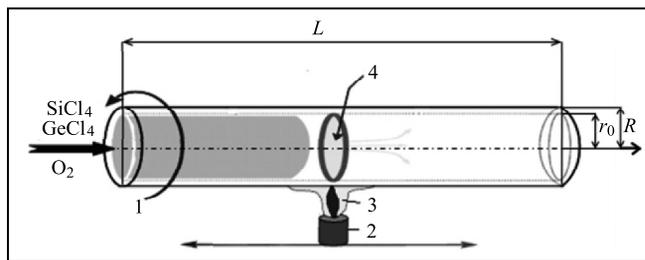


Рис. 1. Схематическое изображение процесса MCVD: 1 — вращающаяся кварцевая труба; 2 — движущаяся горелка (стрелки показывают направление движения); 3 — пламя горелки; 4 — зона реакции

дифицированный метод химического парофазного осаждения (Modified Chemical Vapor Deposition, далее процесс MCVD) [13]. Его суть заключается в следующем (рис. 1). Во вращающуюся на станке кварцевую трубку подают очищенный кислород и парообразные хлориды (Si, Ge, P и др. элементов). Температура движущегося газового потока увеличивается, достигая своего максимального значения в зоне нагрева кислородно-водородной горелки, где и происходит реакция окисления легирующих компонентов. Далее оксиды осаждаются на холодной поверхности опорной трубки перед горелкой под действием сил термофореза. Подбирая параметры этого технологического процесса, можно получить требуемую концентрацию легирующих элементов, а значит, и соответствующий коэффициент преломления света.

Для обеспечения однородности оптических и геометрических параметров изготавливаемой заготовки по длине требуется точная настройка системы управления параметрами процесса, в первую очередь, скоростью движения горелки и распределением температуры в зоне протекания химических реакций, образования оксидов и осаждения оксидов на стенки опорной трубы.

Основная проблема заключается в сложности контроля температуры в зоне реакции, где протекают физико-химические процессы. В то же время, распределение температурного поля в зоне образования оксидов определяет не только размеры и концентрацию коагулированных частиц, но и направление их движения под действием сил термофореза, так как термофоретическая сила, действующая на каждую частицу, пропорциональна градиенту температурного поля в данной точке [7]. На практике в процессе MCVD температуру на поверхности кварцевой трубы контролируют с помощью бесконтактных инфракрасных пирометров.

Построим математическую модель нагрева кварцевой трубы подвижным тепловым источником, которая с достаточной точностью опишет температурное поле в кварцевой трубе, формируемое в ходе реального технологического процесса.



Предположения, при которых получена математическая модель, таковы: температурное поле кварцевой трубки осесимметричное (это обеспечивается вращением трубки); теплообмен с внешней окружающей средой и газом, текущим внутри трубки, описывается законом Ньютона; излучение с внешней поверхности трубки подчиняется закону Стефана — Больцмана.

Модель включает в себя уравнение энергии, в нашем случае уравнение теплопроводности, и модель подвижного источника, т. е. описание формы и мощности подводимого теплового потока, а также закон движения источника [14]. Тепловой поток от факела изменяется вдоль оси z (рис. 1) и описывается функцией Гаусса

$$q(t, z) = q_{\max} e^{-\left(\frac{z - \int_0^t v(\zeta) d\zeta}{H}\right)^2}, \quad (3)$$

где $v(\zeta)$ — скорость движения горелки; H — параметр формы (ширина теплового потока); q_{\max} — интенсивность (мощность) горелки; t — время; z — пространственная переменная; ζ — переменная интегрирования, имеющая смысл времени.

Тогда уравнение теплопроводности для кварцевой трубки в цилиндрической системе координат имеет вид:

$$\rho C_p \frac{\partial \Theta(t, r, z)}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \lambda \frac{\partial \Theta(t, r, z)}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda \frac{\partial \Theta(t, r, z)}{\partial z} \right), \quad (4)$$

где $\Theta(t, r, z)$ — температура; ρ , C_p , λ — плотность, удельная теплоемкость и теплопроводность кварца соответственно, причем в общем случае эти характеристики являются функцией температуры $\Theta(t, r, z)$; r , z — пространственные переменные, причем $r \in [r_0, R]$, $z \in [0, L]$, $t \in [0, T]$, где r_0 — внутренний радиус трубки, R — внешний радиус трубки, L — длина трубки, T — продолжительность процесса осаждения.

Начальное и краевые условия на поверхностях трубки имеют вид:

$$\Theta(t, r, z)|_{t=0} = \Theta_0(r, z), \quad (5)$$

$$\lambda \frac{\partial \Theta(t, r, z)}{\partial r} \Big|_{r=r_0} = \alpha_{\text{газа}} (\Theta(t, z) - \Theta_{\text{газа}}), \quad (6)$$

$$\lambda \frac{\partial \Theta(t, r, z)}{\partial r} \Big|_{r=R} = q(t, z) - \alpha_{\text{среды}} (\Theta(t, z) - \Theta_{\text{среды}}) - \varepsilon \sigma_0 (\Theta(t, z)^4 - \Theta_{\text{среды}}^4), \quad (7)$$

$$\Theta(t, r, z)|_{z=0} = \Theta_1(t, r), \quad (8)$$

$$\frac{\partial \Theta(t, r, z)}{\partial z} \Big|_{z=L} = 0, \quad (9)$$

где $\alpha_{\text{газа}}$, $\alpha_{\text{среды}}$ — коэффициенты теплообмена газа и внешней среды (воздуха); $\Theta_{\text{газа}}$, $\Theta_{\text{среды}}$ — температуры газа и внешней среды; ε — коэффициент черноты; σ_0 — постоянная Стефана — Больцмана.

В дальнейшем для краткости изложения будем при записи функций опускать аргументы, если эта запись не является принципиально важной.

В силу осевой симметрии температурного поля и малой толщины стенки трубки изменения температуры по поперечному сечению трубки малы по сравнению с изменениями температуры вдоль оси z , поэтому значения температуры в поперечном сечении заменим на ее среднее значение по области $D = \{(r, \varphi) | r_0 \leq r \leq R; 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}$. Проинтегрируем обе части уравнения (4) по указанной области:

$$\iint_D \rho C_p \frac{\partial \Theta}{\partial t} r d\varphi dr = \iint_D \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \lambda \frac{\partial \Theta}{\partial r} \right) r d\varphi dr + \iint_D \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda \frac{\partial \Theta}{\partial z} \right) r d\varphi dr.$$

Тогда с учетом условий (6) и (7) первый интеграл в правой части последнего уравнения примет вид:

$$\iint_D \frac{\partial}{\partial r} \left(r \lambda \frac{\partial \Theta}{\partial r} \right) d\varphi dr = 2\pi \left(r \lambda \frac{\partial \Theta}{\partial r} \right) \Big|_{r_0}^R = 2\pi R \lambda \frac{\partial \Theta}{\partial r} \Big|_{r=R} - 2\pi r_0 \lambda \frac{\partial \Theta}{\partial r} \Big|_{r=r_0} = 2\pi R (q(z, t) - \varepsilon \sigma_0 (\Theta^4 - \Theta_{\text{среды}}^4) - \alpha_{\text{среды}} (\Theta - \Theta_{\text{среды}})) - 2\pi r_0 \alpha_{\text{газа}} (\Theta - \Theta_{\text{газа}}).$$

После усреднения оставшихся слагаемых по области D и деления обеих частей уравнения на $\pi(R^2 - r_0^2)$, получим уравнение со свойствами, зависящими от температуры, вида

$$\rho(\Theta) C_p(\Theta) \frac{\partial \Theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda(\Theta) \frac{\partial \Theta}{\partial z} \right) - \beta_1 (\alpha_{\text{среды}} (\Theta - \Theta_{\text{среды}}) + \varepsilon \sigma_0 (\Theta^4 - \Theta_{\text{среды}}^4) - q) - \beta_2 \alpha_{\text{газа}} (\Theta - \Theta_{\text{газа}}), \quad (10)$$

где $\beta_1 = \frac{2R}{(R^2 - r_0^2)}$, $\beta_2 = \frac{2r_0}{(R^2 - r_0^2)}$.

Уравнение (10) дополняется начальными и граничными условиями, аналогичными условиям (5), (8), (9):

$$\Theta(t, z)|_{t=0} = \Theta_0(z), \quad \Theta(t, z)|_{z=0} = \Theta_1(t), \quad \frac{\partial \Theta(t, z)}{\partial z} \Big|_{z=L} = 0.$$

Будем предполагать, что физический процесс, модель которого описывается уравнением (10), управляем. В качестве типичных управляющих воздействий в процессе парофазного осаждения выступают либо параметры теплового источника воздействия, такие, как его мощность q_{\max} , скорость его движения $v(\xi)$ и параметр формы (ширина теплового потока) H , либо величина теплового потока. Цель управления при этом заключается в удержании температуры кварцевой трубы в окрестности заданного состояния. Предположим в рамках данного исследования, что управлением $u(t, z)$ процесса MCVD является тепловой поток от источника воздействия $q(t, z)$. Как было указано выше, процессом будем называть пару: распределение температуры $\Theta(t, z)$, являющееся решением уравнения (10), и соответствующее управление $u(t, z)$, обеспечивающее такое распределение. Процесс, реализуемый на практике, назовем программным процессом и обозначим $(\Theta^*(t, z), u^*(t, z))$. Отметим, что $\Theta^*(t, z)$ при этом также является решением краевой задачи с уравнением состояния (10).

В реальных условиях распределение температуры $\Theta(t, z)$ будет отличаться от программного распределения температуры $\Theta^*(t, z)$ на некоторую величину отклонения (возмущения) $\Delta\Theta(t, z)$, о которой известно, что это достаточно малая величина по отношению к программному значению. Тогда можно записать, что $\Theta(t, z) = \Theta^*(t, z) + \Delta\Theta(t, z)$. По аналогии запишем, что управление $u(t, z)$ также может быть представлено в виде $u(t, z) = u^*(t, z) + \Delta u(t, z)$, где $u^*(t, z)$ — программное управление, а $u(t, z)$ — фактическое управление.

Нетрудно получить уравнение возмущенного состояния, описывающее отклонение фактического состояния от программного [15]. При достаточно гладких зависимостях $\rho(\Theta)$, $C_p(\Theta)$, $\lambda(\Theta)$ уравнение (10) можно линеаризовать в окрестности температуры $\Theta^*(t, z)$ путем разложения нелинейных зависимостей в ряд Тейлора. Существуют различные способы линеаризации, здесь мы воспользуемся приемом, изложенным в работе [16]. Представим уравнение (10) в виде одномерного дифференциального уравнения второго порядка с нелинейным оператором:

$$A\left(t, z, \Theta, \frac{\partial\Theta}{\partial t}, \frac{\partial^2\Theta}{\partial z^2}, \frac{\partial\Theta}{\partial z}, u\right) = \rho(\Theta)C_p(\Theta)\frac{\partial\Theta}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda(\Theta)\frac{\partial\Theta}{\partial z}\right) + \beta_1(\alpha_{\text{среды}}(\Theta - \Theta_{\text{среды}}) + \varepsilon\sigma_0(\Theta^4 - \Theta_{\text{среды}}^4) - q) + \beta_2\alpha_{\text{газа}}(\Theta - \Theta_{\text{газа}}) = 0. \quad (11)$$

Как было отмечено выше, представим решение этого уравнения в виде $\Theta(t, z) = \Theta^*(t, z) + \Delta\Theta(t, z)$,

при этом $\Theta^*(t, z)$ и $u^*(t, z)$ удовлетворяют уравнению (11), т. е.

$$A\left(t, z, \Theta^*, \frac{\partial\Theta^*}{\partial t}, \frac{\partial^2\Theta^*}{\partial z^2}, \frac{\partial\Theta^*}{\partial z}, u^*(t, z)\right) = 0.$$

Полагая, что функция A дважды непрерывно дифференцируема по совокупности своих аргументов, можно получить линейное уравнение относительно $\Delta\Theta(t, z)$, т. е. выполнить процедуру линеаризации:

$$\left(\frac{\partial A}{\partial\Theta}\right)_* \Delta\Theta + \left(\frac{\partial A}{\partial\dot{\Theta}}\right)_* \frac{\partial\Delta\Theta}{\partial t} + \left(\frac{\partial A}{\partial\Theta''}\right)_* \frac{\partial^2\Delta\Theta}{\partial z^2} + \left(\frac{\partial A}{\partial\Theta'}\right)_* \frac{\partial\Delta\Theta}{\partial z} + \left(\frac{\partial A}{\partial q}\right)_* \Delta u(t, z) = 0. \quad (12)$$

Здесь введены обозначения $\dot{\Theta} = \frac{\partial\Theta}{\partial t}$, $\Theta'' = \frac{\partial^2\Theta}{\partial z^2}$,

$\Theta' = \frac{\partial\Theta}{\partial z}$, символ «*» соответствует состоянию $\Theta^*(t, z)$ системы.

Обозначим производные, входящие в уравнение (12), так:

$$\left(\frac{\partial A}{\partial\Theta}\right)_* = \frac{\partial}{\partial\Theta}(\rho(\Theta)C_p(\Theta))_* \frac{\partial\Theta^*}{\partial t} - \left(\frac{\partial\lambda(\Theta)}{\partial\Theta} \frac{\partial^2\Theta}{\partial z^2}\right)_* - \left(\frac{\partial^2\lambda(\Theta)}{\partial\Theta^2} \left(\frac{\partial\Theta}{\partial z}\right)^2\right)_* + \beta_1(\alpha_{\text{среды}} + 4\varepsilon\sigma_0(\Theta^*)^3) + \beta_2\alpha_{\text{газа}} = \chi_2(t, z),$$

$$\left(\frac{\partial A}{\partial\dot{\Theta}}\right)_* = \rho(\Theta^*)C_p(\Theta^*), \quad \left(\frac{\partial A}{\partial\Theta''}\right)_* = -\lambda(\Theta^*),$$

$$\left(\frac{\partial A}{\partial\Theta'}\right)_* = -2\frac{\partial\lambda(\Theta)}{\partial\Theta} \frac{\partial\Theta}{\partial z} \Big|_* = \chi_1(t, z), \quad \left(\frac{\partial A}{\partial u}\right)_* = -\beta_1.$$

С учетом введенных обозначений, получим:

$$\rho(\Theta^*)C_p(\Theta^*)\frac{\partial\Delta\Theta}{\partial t} = \lambda(\Theta^*)\frac{\partial^2\Delta\Theta}{\partial z^2} - \chi_1(t, z)\frac{\partial\Delta\Theta}{\partial z} - \chi_2(t, z)\Delta\Theta + \beta_1\Delta u.$$

Разделим обе части полученного уравнения на $\rho(\Theta^*)C_p(\Theta^*)$:

$$\frac{\partial\Delta\Theta}{\partial t} = \frac{\lambda(\Theta^*)}{\rho(\Theta^*)C_p(\Theta^*)} \frac{\partial^2\Delta\Theta}{\partial z^2} - \frac{\chi_1(t, z)}{\rho(\Theta^*)C_p(\Theta^*)} \frac{\partial\Delta\Theta}{\partial z} - \frac{\chi_2(t, z)}{\rho(\Theta^*)C_p(\Theta^*)} \Delta\Theta + \frac{\beta_1}{\rho(\Theta^*)C_p(\Theta^*)} \Delta u.$$



Таким образом, уравнение для возмущенного состояния имеет вид:

$$\frac{\partial \Delta \Theta}{\partial t} - a(t, z) \frac{\partial^2 \Delta \Theta}{\partial z^2} + \gamma_1(t, z) \frac{\partial \Delta \Theta}{\partial z} + \gamma_2(t, z) \Delta \Theta = \beta(t, z) \Delta u, \quad (13)$$

где

$$a(t, z) = \frac{\lambda(\Theta^*)}{\rho(\Theta^*) C_p(\Theta^*)},$$

$$\gamma_1(t, z) = \frac{\chi_1(t, z)}{\rho(\Theta^*) C_p(\Theta^*)},$$

$$\gamma_2(t, z) = \frac{\chi_2(t, z)}{\rho(\Theta^*) C_p(\Theta^*)},$$

$$\beta(t, z) = \frac{\beta_1}{\rho(\Theta^*) C_p(\Theta^*)}.$$

Отметим, что если температура Θ^* зависит только от координаты z , то в выражении $\left(\frac{\partial A}{\partial \Theta}\right)_*$ первое слагаемое обращается в ноль. В случае же, когда $\Theta^* = \int \text{const}$, то в выражении $\left(\frac{\partial A}{\partial \Theta}\right)_*$ первые три слагаемых равны нулю и $\left(\frac{\partial A}{\partial \Theta}\right) = 0$.

Аналогичным образом проведем линеаризацию граничных и начальных условий, в результате чего получим граничные и начальные условия для линеаризованной задачи:

$$\Delta \Theta|_{t=0} = \Delta \Theta_0(z), \quad \Delta \Theta|_{z=0} = 0, \\ \left(\frac{\partial \Delta \Theta}{\partial z}\right)\Big|_{z=L} = 0. \quad (14)$$

Таким образом, сформулирована линейная краевая задача (13), (14) для возмущенного состояния $\Delta \Theta(t, z)$, описываемая одномерным уравнением теплопроводности.

2. ОПТИМИЗАЦИОННАЯ СИСТЕМА

Сформулируем задачу оптимального стабилизирующего управления [17–19] с учетом линеаризации исходной модели и дальнейшего перехода к исследованию величин возмущенных состояний. Рассмотрим задачу распределенного управления и распределенного наблюдения с помощью системы (13), (14) [20]. Следуя терминологии [3], функция Δu , содержащаяся в правой части уравнения состояния, есть функция управления, а наблюдением является функция состояния $\Delta \Theta(t, z)$ в каждой точ-

ке области решения задачи. В качестве функционального пространства состояний и допустимых управлений рассмотрим пространство $U = L_2(\Omega)$, где $\Omega = [0, \tau] \times [0, L]$, здесь τ — время управления изучаемым процессом. Отметим, что значение τ в общем случае не совпадает со значением T , определенным выше.

Определим целевой функционал интегрального типа, явно зависящий от функции управления и обладающий свойством коэрцитивности, что позволит в дальнейшем применять технику получения оптимизационной системы и определить функцию оптимального управления в явном виде:

$$F(\Delta u, \Delta \Theta) = \int_{\Omega} \Delta \Theta^2 dz dt + \sigma \int_{\Omega} \Delta u^2 dz dt \rightarrow \inf. \quad (15)$$

Функционал F представляет собой смешанный интегральный критерий с подынтегральной функцией, дающей отклонения по фазовым координатам в среднем (первое слагаемое) и общие энергетические затраты (второе слагаемое). Здесь σ — положительный числовой параметр (цена управления), который оценивается заранее либо подбирается из решений тестовых задач. Выбор смешанного функционала в данной задаче связан с тем, что в рамках реального технологического процесса все пирометрические измерения производятся приборами, а любые приборы имеют погрешности измерений. В силу этого добиваться того, чтобы первое слагаемое обратилось в ноль, представляется нецелесообразным. Однако наличие второго слагаемого позволяет получить необходимые условия оптимальности в сильной форме. Это возможно, поскольку целевой функционал (15), обладает свойством коэрцитивности благодаря своему второму слагаемому.

Поскольку управление $\Delta u(t, z)$ входит в задачу (13), (14) линейно, то можно говорить о некотором линейном операторе Λ , действующем на множестве допустимых управлений, со значениями в пространстве состояний: $\Lambda(\Delta u(t, z)) = \Delta \Theta(t, z)$. Заметим, что в силу линейности Λ его дифференциал Гато (первая вариация отображения) на приращении $\delta \Delta u$ совпадает со значением самого оператора, поскольку для любого бесконечно малого значения ξ

$$d\Lambda(\Delta u, \delta \Delta u) = \lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{\Lambda(\Delta u + \xi \delta \Delta u) - \Lambda(\Delta u)}{\xi} = \\ = \lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{\Lambda(\Delta u) + \xi \Lambda(\delta \Delta u) - \Lambda(\Delta u)}{\xi} = \Lambda(\delta \Delta u).$$

Введем обозначение: $\Delta \hat{\Theta}(t, z) = \Lambda(\delta \Delta u)$. Известно, что если $\Delta u(t, z)$ — минимизирующий элемент (оптимальное состояние), существование которого следует из свойств коэрцитивности, полунепрерывности снизу и выпуклости целевого функцио-

нала (15) [2], а $\delta\Delta u$ — его вариация, то первая вариация функционала (15) обращается в ноль:

$$\begin{aligned} \delta F(\Delta u, \Delta\Theta) &= 2 \int_{\Omega} (\Delta\Theta \Delta\hat{\Theta} + \sigma \Delta u (\delta\Delta u)) dz dt = \\ &= 2 \int_{\Omega} (\Lambda(\Delta u) \Lambda(\delta\Delta u) + \sigma \Delta u (\delta\Delta u)) dz dt = 0, \end{aligned} \quad (16)$$

где $\Delta\hat{\Theta}(t, z)$ задается как решение проварьированной задачи (13), (14). Использование данной интегральной формы представления необходимых условий оптимальности не совсем удобно в смысле практических реализаций. Для вывода необходимого условия оптимальности в иной форме — форме краевой задачи — и возможности дальнейшего получения явного выражения функции оптимального управления через состояние этой краевой задачи воспользуемся далее техникой, аналогичной той, что изложена в работе [3].

Варьируя исходную дифференциальную задачу (13), (14), получим дифференциальную задачу относительно $\Delta\hat{\Theta}(t, z)$ вида

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Delta\hat{\Theta}}{\partial t} - a \frac{\partial^2 \Delta\hat{\Theta}}{\partial z^2} + \gamma_1 \frac{\partial \Delta\hat{\Theta}}{\partial z} + \gamma_2 \Delta\hat{\Theta} &= \beta \delta\Delta u, \\ \Delta\hat{\Theta}|_{t=0} = 0, \quad \Delta\hat{\Theta}|_{z=0} = 0, \quad \left(\frac{\partial \Delta\hat{\Theta}}{\partial z} \right) \Big|_{z=L} &= 0. \end{aligned} \quad (17)$$

Умножим правую и левую части уравнения задачи (17) на произвольную функцию $p(t, z) \in U$ и проинтегрируем их по заданной области:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{\partial \Delta\hat{\Theta}}{\partial t} p dz dt - \int_{\Omega} a \frac{\partial^2 \Delta\hat{\Theta}}{\partial z^2} p dz dt + \int_{\Omega} \gamma_1 \frac{\partial \Delta\hat{\Theta}}{\partial z} p dz dt + \\ + \int_{\Omega} \gamma_2 \Delta\hat{\Theta} p dz dt = \int_{\Omega} \beta \delta\Delta u p dz dt. \end{aligned}$$

После проведения равносильных преобразований получим результат:

$$\begin{aligned} \int_0^L p \Delta\hat{\Theta} \Big|_0^T dz - \int_{\Omega} \frac{\partial p}{\partial t} \Delta\hat{\Theta} dz dt - \int_{\Omega} \frac{\partial^2 (ap)}{\partial z^2} \Delta\hat{\Theta} dz dt - \\ - \int_0^{\tau} ap \frac{\partial \Delta\hat{\Theta}}{\partial z} \Big|_0^L dt + \int_0^{\tau} \Delta\hat{\Theta} \frac{\partial (ap)}{\partial z} \Big|_0^L dt - \int_{\Omega} \Delta\hat{\Theta} \frac{\partial (\gamma_1 p)}{\partial z} dz dt + \\ + \int_0^{\tau} \gamma_1 p \Delta\hat{\Theta} \Big|_0^L dt + \int_{\Omega} \gamma_2 \Delta\hat{\Theta} p dz dt = \int_{\Omega} \beta \delta\Delta u p dz dt. \end{aligned} \quad (18)$$

Потребуем, чтобы произвольная до сих пор функция $p(t, z)$ удовлетворяла дифференциальной задаче с обратным временем (19). Функция $p(t, z)$ при этом называется функцией, сопряженной состоянию системы (13), (14) [3], относительно ко-

торой будет формироваться вывод системы оптимальности в форме дифференциальной задачи, которой будет удовлетворять как $\Delta\Theta(t, z)$, так и функция сопряженного состояния:

$$-\frac{\partial p}{\partial t} - \frac{\partial^2 (ap)}{\partial z^2} - \frac{\partial (\gamma_1 p)}{\partial z} + \gamma_2 p = \Delta\Theta,$$

$$p|_{t=\tau} = 0, \quad p|_{z=0} = 0, \quad \left(\frac{\partial (ap)}{\partial z} + \gamma_1 p \right) \Big|_{z=L} = 0. \quad (19)$$

Объединяя все интегралы по области Ω в левой части соотношения (18), а также пользуясь уравнением и условиями краевой задачи (19), приводим соотношение (18) к виду:

$$\int_{\Omega} \Delta\Theta \Delta\hat{\Theta} dz dt = \int_{\Omega} \beta \delta\Delta u p dz dt. \quad (20)$$

Заметим, что интеграл в левой части равенства (20) в точности совпадает с интегралом от одного из слагаемых соотношения (16). Осуществляя соответствующую подстановку выражения (20) в формулу (16), имеем:

$$\int_{\Omega} (\beta p + \sigma \Delta u) \delta\Delta u dz dt = 0.$$

Поскольку по определению вариация $\delta\Delta u \neq 0$, функция оптимального управления может быть представлена явной зависимостью

$$\Delta u_{\text{опт}}(t, z) = -\frac{\beta p(t, z)}{\sigma}. \quad (21)$$

Пара значений $\Delta u_{\text{опт}}(t, z)$ и соответствующее ей состояние $\Delta\Theta(t, z)$ назовем оптимальным процессом. Таким образом, учитывая формы дифференциальных задач (13), (14), (19) и соотношение для функции оптимального управления (21), можно записать систему оптимальности в своей сильной форме, т. е. в форме системы краевых задач для состояния системы $\Delta\Theta(t, z)$ и двойственной функции $p(t, z)$ в виде:

$$\frac{\partial \Delta\Theta}{\partial t} - a \frac{\partial^2 \Delta\Theta}{\partial z^2} + \gamma_1 \frac{\partial \Delta\Theta}{\partial z} + \gamma_2 \Delta\Theta = -\frac{\beta^2}{\sigma} p,$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial^2 (ap)}{\partial z^2} + \frac{\partial (\gamma_1 p)}{\partial z} - \gamma_2 p = -\Delta\Theta,$$

$$\Delta\Theta|_{t=0} = \Delta\Theta_0, \quad \Delta\Theta|_{z=0} = 0, \quad \left(\frac{\partial \Delta\Theta}{\partial z} \right) \Big|_{z=L} = 0,$$

$$p|_{t=\tau} = 0, \quad p|_{z=0} = 0, \quad \left(\frac{\partial (ap)}{\partial z} + \gamma_1 p \right) \Big|_{z=L} = 0. \quad (22)$$

3. ЧИСЛЕННАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ СИСТЕМЫ ОПТИМАЛЬНОСТИ

Система оптимальности (22) представляет собой дифференциальную задачу, несогласованную по времени. В частности, состояние системы описывается краевой задачей, корректной по времени вперед, а сопряженное состояние — корректной по времени назад, что приводит к некоторым трудностям в реализации: считать в определенном направлении по времени не представляется возможным. В связи с этим решение задачи (22) проводилось итерационным методом. В частности, зная значения сопряженной функции $p(t, z)$ на i -м шаге, а значит, и оптимальное управление на i -м шаге ($i = 0, 1, 2, \dots$), можно решить краевую задачу, описывающую состояние системы (при этом мы находим приближение к оптимальному процессу на i -м шаге). Полученное решение позволяет решить краевую задачу для отыскания $(i + 1)$ -го приближения сопряженного состояния, где в качестве функции $\Delta\Theta(t, z)$ взято ее i -е приближение. Приближение к оптимальному управлению на $(i + 1)$ -м шаге ищется по формуле (21) через значения сопряженной функции в $(i + 1)$ -м приближении. Нулевое приближение функции $p(t, z)$ выбиралось произвольно.

Каждая задача решалась методом конечных элементов, реализованном в системе мультифизических вычислений Comsol Multiphysics. Все физические функции и постоянные, представляющие собой теплофизические параметры задачи, были взяты из Material Library Comsol Multiphysics. Для решения краевых задач, описывающих состояние системы и сопряженное состояние, использовалась равномерная сетка по пространственной переменной z . Было проведено исследование, касающееся влияния шага сетки на полученные решения. Причем при измельчении шагов сетки по пространственной переменной, начиная с некоторого значения, наблюдалось установление решений, — значения искомых функций очень мало менялись (рис. 2).

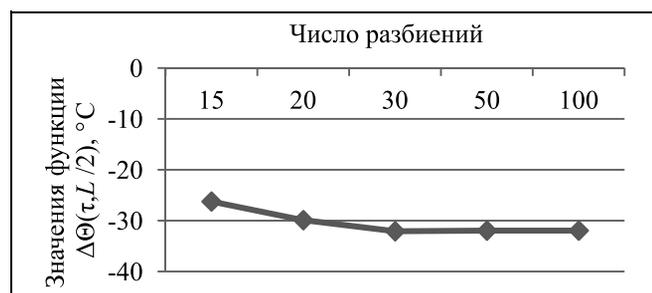


Рис. 2. Зависимость значений функции $\Delta\Theta(\tau, L/2)$ от числа разбиений

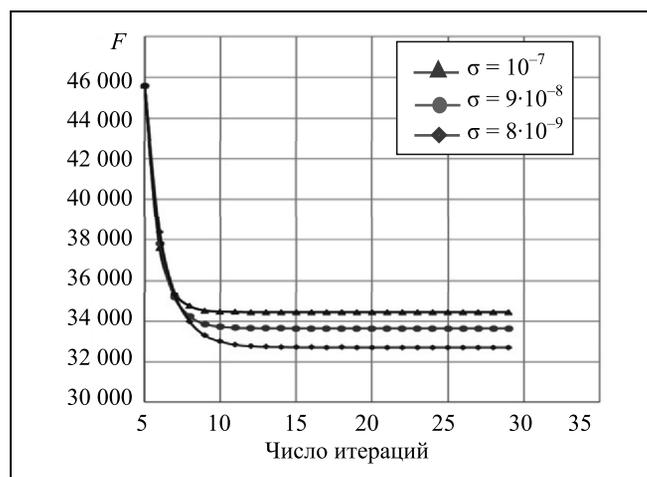


Рис. 3. Зависимость значений целевого функционала F от числа итераций

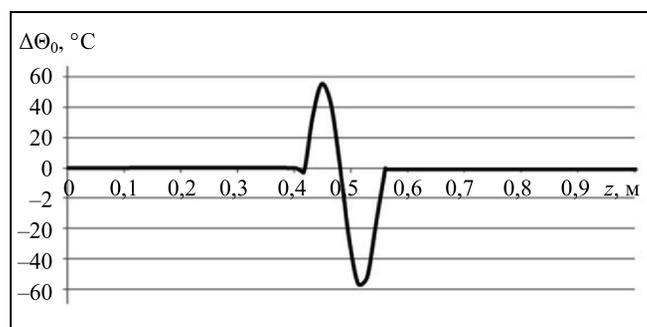


Рис. 4. Начальное распределение температуры $\Delta\Theta_0$

Интересен также график зависимости целевого функционала F от номера итерации, изображенный на рис. 3. Видно, что начиная с седьмой итерации, функционал уменьшается незначительно и устанавливается около значения $F = 32\,750$ (для значения $\sigma = 8 \cdot 10^{-8}$).

4. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Предполагается, что контроль распределения температуры вдоль поверхности нагрева кварцевого цилиндра осуществляется сканирующим пирометром, который позволяет одновременно снимать распределение температуры на длине 100 мм. Измерения температуры происходят через равные промежутки времени τ . Значения τ подбираются с учетом особенностей технологического процесса MCVD и физических возможностей осуществлять корректировку параметров задачи. В рамках данной постановки значения времени управления системой τ выбирались равным 1, 3, 5 с. Решение

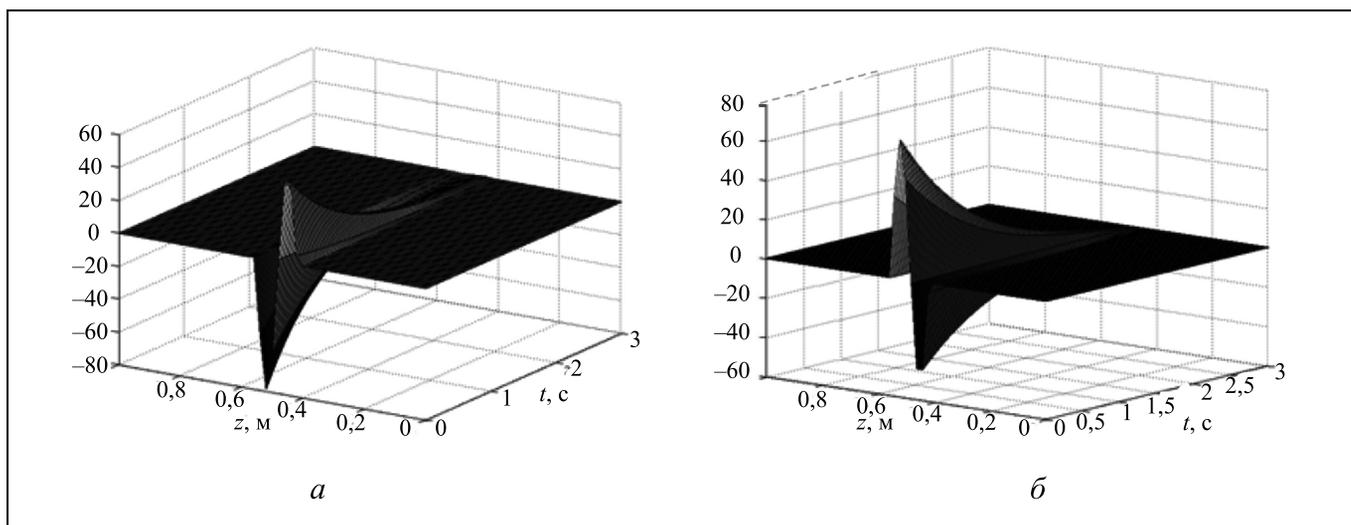


Рис. 5. Оптимальный процесс при $\tau = 3$ с: $a - \Delta\Theta(t, z)$, °C; $b - \Delta u_{\text{опт}}(t, z)$, Вт/м²

системы (22), подставленное в выражение (21), позволяет определить функцию оптимального корректирующего управления. Далее по рассчитанным значениям корректирующего управления находится мощность теплового источника q_{max} , необходимая для стабилизации процесса в рамках расчетного времени $[0, \tau]$. Отметим, что найденное стабилизирующее управление будет действовать только на указанном промежутке времени, по истечении которого процесс повторяется — происходит новый замер температуры, вновь решается задача оптимального управления, снова корректируется мощность теплового источника и т. д.

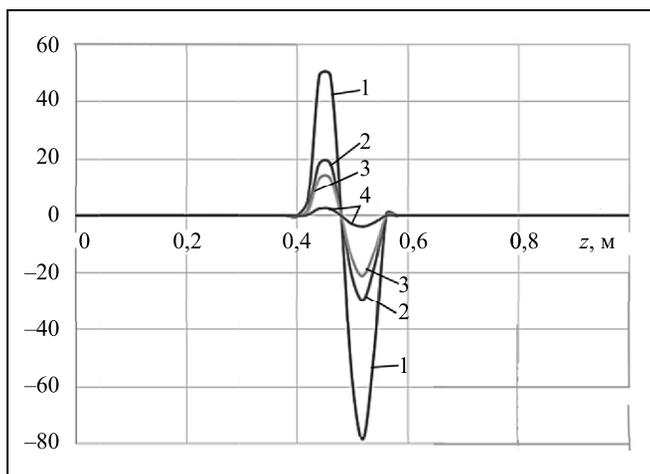


Рис. 6. Зависимость распределения температуры $\Delta\Theta(\tau, z)$, °C, от параметра σ : 1 — начальное состояние; 2 — $\sigma = 10^{-6}$; 3 — $\sigma = 2 \cdot 10^{-7}$; 4 — $\sigma = 5 \cdot 10^{-8}$

Сканирующий пирометр снимает показания только в зоне нагрева. В качестве демонстрационного примера рассмотрим разницу между действительной (определенной при помощи пирометра) и программной температурами в момент времени, соответствующий координате $z = L/2$. Примем значения этих разностей в качестве начальных условий уравнения теплопроводности системы оптимальности (22) (рис. 4).

На рис. 5 представлены поверхности оптимальных распределений температуры $\Delta\Theta(t, z)$, полученные в результате решения системы оптимальности (22), и управления $\Delta u_{\text{опт}}(t, z)$ (теплового потока), вычисленного по формуле (21).

Цена управления — параметр σ , как отмечено выше, может изменяться, его значения подбираются из соображений практической реализации метода. В нашем случае выбор этого значения зависит от погрешности измерений пирометром. Используемые пирометры обеспечивают точность замеров температур с погрешностью не более 0,5 % от максимально измеряемой температуры, т. е. погрешность измерения составляет 8–10 °C. Исходя из этого, проведены расчеты при различных значениях параметра σ (рис. 6), кривая 4 показывает профиль температуры $\Delta\Theta(\tau, z)$, соответствующий указанному выше значению погрешности.

Проведены численные эксперименты с целью изучения влияния времени управления τ на распределение оптимальной температуры (температуры $\Delta\Theta(\tau, z)$, отвечающей оптимальному управлению $\Delta u_{\text{опт}}(t, z)$). Результаты расчетов для различных значений времени управления τ представлены на рис. 7. При расчетах начальное состояние системы выбиралось неизменным.

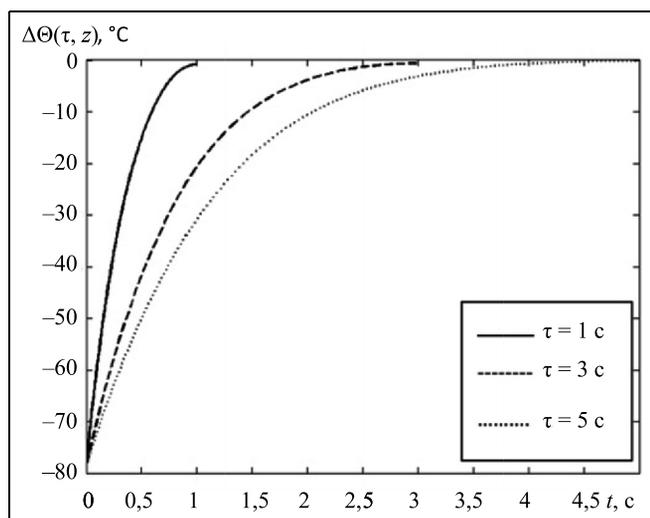


Рис. 7. Зависимость температуры $\Delta\Theta(\tau, z)$ от времени в различных режимах времени управления τ ; значение координаты z фиксировано: $z = L/2$, м

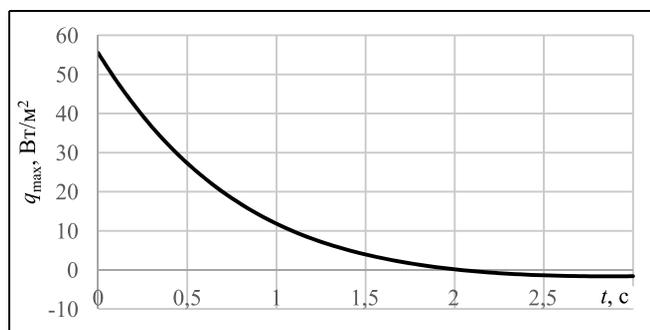


Рис. 8. Зависимость мощности теплового источника q_{\max} от времени t

Тепловой поток факела горелки, как отмечено выше формулой (3), описывается функцией Гаусса. Мощность теплового источника q_{\max} при этом рассчитывалась по найденным значениям $\Delta u_{\text{отт}}(t, z)$. Результат аппроксимации для времени управления $\tau = 3$ с представлен на рис. 8.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе рассмотрена математическая модель технологического процесса MCVD, в основе которой лежит нестационарное двумерное уравнение теплопроводности. После принятия ряда предположений, в том числе об осреднении температуры по радиусу трубы, а также в результате проведения линеаризации модели, получено линейное одномерное уравнение теплопроводности для возмущенного состояния, на основе которого поставлена и решена задача оптимизации. Сфор-

мулирована задача оптимального стабилизирующего управления с распределенным управлением и распределенным наблюдением. В качестве функции управления выбран тепловой поток от движущейся горелки, целевой функционал минимизирует отклонения фактической температуры от программной. Получена система оптимальности, закон нахождения функции оптимального управления в явном виде, предложен алгоритм решения полученной системы оптимальности. Приведены и проанализированы результаты численных исследований поставленной задачи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бутковский А.Г. Теория оптимального управления системами с распределенными параметрами. — М.: Наука, 1965. — 474 с. [Butkovskij, A.G. Teoriya optimal'nogo upravleniya sistemami s raspredelennymi parametrami. — М.: Nauka, 1965. — 474 s. (In Russian)]
2. Лионс Ж.-Л. Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. — М.: Мир, 1972. — 414 с. [Lions, Zh.-L. Optimal'noe upravlenie sistemami, opisivaemymi uravneniyami s chastnymi proizvodnymi. — М.: Mir, 1972. — 414 s. (In Russian)]
3. Фурсиков А.В. Оптимальное управление распределенными системами. Теория и приложения. — Новосибирск: Научная книга, 1999. — 350 с. [Fursikov, A.V. Optimal'noe upravlenie raspredelennymi sistemami. Teoriya i prilozheniya. — Novosibirsk: Nauchnaya kniga, 1999. — 350 s. (In Russian)]
4. Фурсиков А.В. Об одной задаче управления и о результате, касающемся однозначной разрешимости трехмерной системы Навье-Стокса // Успехи математических наук. — 1980. — Т. 35, вып. 4. — С. 148. [Fursikov, A.V. Ob odnoj zadache upravleniya i o rezul'tate, kasayushchemsya odnoznachnoj razreshimosti trekhmernoj sistemy Nav'e-Stoksa // Uspekhi matematicheskikh nauk. — 1980. — T. 35, vyp. 4. — S. 148. (In Russian)]
5. Фурсиков А.В. О некоторых задачах управления и о результатах, касающихся однозначной разрешимости смешанной краевой задачи для трехмерных систем Навье-Стокса // Докл. АН СССР. — 1980. — Т. 252, № 5. — С. 1066—1070. [Fursikov, A.V. O nekotoryh zadachah upravleniya i o rezul'tatah, kasayushchihsya odnoznachnoj razreshimosti smeshannoj kraevoy zadachi dlya trekhmernih sistem Nav'e-Stoksa // Dokl. AN SSSR. — 1980. — Vol. 252, no. 5. — S. 1066—1070. (In Russian)]
6. Лионс Ж.-Л. Управление сингулярными распределенными системами. — М.: Наука, 1987. — 368 с. [Lions, Zh.-L. Upravlenie singulyarnymi raspredelennymi sistemami. — М.: Nauka, 1987. — 368 s. (In Russian)]
7. Badii, M. Periodic Solutions for a Class of Degenerate Evolution Problems // Nonlinear Analysis. — 2001. — Vol. 44, no. 4. — P. 499—508.
8. Лагранж Ж. Аналитическая механика. — М.-Л.: Гос. изд. тех.-теор. лит., 1950. — 440 с. [Lagranzh, Zh. Analiticheskaya mekhanika. — М.-Л.: Gos. izd. tekhn.-teor. lit., 1950. — 440 s. (In Russian)]
9. Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В. Оптимальное управление. — М.: Физматлит, 2002. — 320 с. [Aleksseev, V.M., Tihomirov, V.M., Fomin, S.V. Optimal'noe upravlenie. — М.: Fizmatlit, 2002. — 320 s. (In Russian)]
10. Егоров А.И. Основы теории управления. — М.: Физматлит, 2004. — 504 с. [Egorov, A.I. Osnovy teorii upravleniya. — М.: Fizmatlit, 2004. — 504 s. (In Russian)]

11. Иоффе А.Д., Тихомиров В.М. Теория экстремальных задач. — М.: Наука, 1974. — 479 с. [Ioffe, A.D., Tihomirov, V.M. Teoriya ekstremal'nyh zadach. — M.: Nauka, 1974. — 479 s. (In Russian)]
12. Варга Дж. Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями. — М.: Наука, 1977. — 622 с. [Varga, Dzh. Optimal'noe upravlenie differencial'nymi i funktsional'nymi uravneniyami. — M.: Nauka, 1977. — 622 s. (In Russian)]
13. Иванов Г.А., Пervaдчук В.П. Технология производства и свойства кварцевых оптических волокон: учеб. пос. — Пермь: Изд-во Перм. нац. исслед. политехн. ун-та. — 2011. — 171 с. [Ivanov, G.A., Pervadchuk, V.P. Tekhnologiya proizvodstva i svoystva kvarcevykh opticheskikh volokon: ucheb. pos. — Perm': Izd-vo Perm. nac. issled. politekhn. un-ta. — 2011. — 171 s. (In Russian)]
14. Кубышкин В.А., Финягина В.И. Подвижное управление в системах с распределенными параметрами. — М.: СИНТЕГ, 2005. — 216 с. [Kubyshekin, V.A., Finyagina, V.I. Podvizhnoe upravlenie v sistemah s raspredelennymi parametrami. — M.: SINTEG, 2005. — 216 s. (In Russian)]
15. Александров А.Г. Оптимальные и адаптивные системы. Учебн. пособие для вузов по спец. «Автоматика и управление в технических системах». — М.: Высш. шк., 1989. — 263 с. [Aleksandrov, A.G. Optimal'nye i adaptivnye sistemy. Uchebn. posobie dlya vuzov po spets. «Avtomatika i upravlenie v tekhnicheskikh sistemakh». — M.: Vyssh. shk., 1989. — 263 s. (In Russian)]
16. Рапопорт Э.Я. Анализ и синтез систем автоматического управления с распределенными параметрами. Учебн. пос. — М.: Высшая школа, 2005. — 292 с. [Rapoport, E.Ya. Analiz i sintez sistem avtomaticheskogo upravleniya s raspredelennymi parametrami. Uchebn. pos. — M.: Vysshaya shkola, 2005. — 292 s. (In Russian)]
17. Бутковский А.Г., Даринский Ю.В., Пустыльников Л.М. Управление распределенными системами путем перемещения источника // Автоматика и телемеханика. — 1974. — № 5. — С. 11–30. [Butkovskii, A.G., Darinskii, Yu.V., Pustyl'nikov, L.M. Upravlenie raspredelennymi sistemami putem peremeshcheniya istochnika // Avtomatika i Remote Control. — 1974. — Vol. 35, no. 5. — P. 701–719.]
18. Бутковский А.Г., Пустыльников Л.М. Теория подвижного управления системами с распределенными параметрами. — М.: Наука, 1980. — 385 с. [Butkovskij, A.G., Pustyl'nikov, L.M. Teoriya podvizhnogo upravleniya sistemami s raspredelennymi parametrami. — M.: Nauka, 1980. — 385 s. (In Russian)]
19. Кубышкин В.А., Суховеров В.С. Система моделирования и управления подвижным воздействием на базе программных средств MATLAB // Проблемы управления. — 2008. — № 2. — С. 64–69. [Kubyshekin, V.A., Sukhoverov, V.S. Mobile Heating Source Simulation and Control System Using MATLAB Software Tools // Control Sciences. — 2008. — No. 2. — P. 64–69. (In Russian)]
20. Пervaдчук В.П., Владимiroва Д.Б., Дектярев Д.Н., Пестерев А.А. Моделирование нагрева кварцевых труб подвижным источником воздействия для решения задачи управления процессом MCVD // Международный научно-исследовательский журнал. — 2016. — № 9-2 (51). — С. 76–82. [Pervadchuk, V.P., Vladimirova, D.B., Dektyarev, D.N., Pester-ev, A.A. Modelirovanie nagreva kvarcevykh trub podvizhnym istochnikom vozdeystviya dlya resheniya zadachi upravleniya processom MCVD // Mezhdunarodnyj nauchno-issledovatel'skij zhurnal. — 2016. — No. 9-2 (51). — S. 76–82. (In Russian)]

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.Г. Кушнером.

Поступила в редакцию 31.08.2018, после доработки 21.09.2020.
Принята к публикации 05.10.2020.

Пervaдчук Владимир Павлович — д-р техн. наук,
✉ pervadchuk@mail.ru,

Владимiroва Дарья Борисовна — канд. физ.-мат. наук,
✉ da0807@mail.ru,

Дектярев Дмитрий Николаевич — ✉ dmitridekt@mail.ru,

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Пермский национальный исследовательский политехнический университет».

OPTIMAL CONTROL OF THERMAL EXPOSURE SOURCE IN THE PROCESSES OF VAPOR PHASE DEPOSITION

V.P. Pervadchuk, D.B. Vladimirova, D.N. Dektyarev

Perm National Research Polytechnic University

✉ pervadchuk@mail.ru, ✉ da0807@mail.ru, ✉ dmitridekt@mail.ru

Abstract. We consider a mathematical model that describes the process of heating a silica tube by a movable heat source. The model is represented in the form of a one-dimensional heat conduction equation. Based on this model, we solve the problem of optimal stabilizing control with distributed control and distributed observation for the linearized problem. The value of the gas mixture flow rate, which determines the power of the heat source, was selected as a control influence. The aim of the control was to minimize possible temperature deviations from the programmed regimes of the silica pipes alloying. We obtained necessary optimality conditions in the form of an optimization system consisting of two partial differential equations. A law for finding the optimal control function, which explicitly depends on the solution of the mentioned system of equations, was obtained as well. Ultimately, we carried out the numerical solution of the optimization system and obtained quantitative results for the control function. We also calculated and analyzed the temperature distributions in various control modes.

Keywords: optimal control, MCVD process, distributed system, optimization system.