УДК 62-501.52

ОБ УСЛОВИЯХ, ОПРЕДЕЛЯЮЩИХ ХАРАКТЕР УСТОЙЧИВОСТИ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

В. П. Жуков

Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН, г. Москва

Показано, что при анализе на устойчивость некоторых классов нелинейных динамических систем произвольного порядка функции Ляпунова могут быть построены непосредственно по правой части уравнения исследуемой системы. Отмечено, что этот факт может быть использован не только при анализе динамических систем, но и при их синтезе, придавая им определенное положительное качество. Сформулированы и рассмотрены соответствующие условия, определяющие характер устойчивости изолированных состояний равновесия автономных нелинейных динамических систем произвольного порядка и имеющие ясную геометрическую трактовку. Приведены достаточные и необходимые и достаточные условия асимптотической устойчивости и достаточные условия устойчивости и неустойчивости.

ВВЕДЕНИЕ

Будем рассматривать автономные нелинейные динамические системы произвольного порядка

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in R^n, \tag{1}$$

где векторная функция $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ задана в некоторой области $G \subseteq R^n$. Пусть компоненты $f_i(x)$, $i = 1, ..., n$, функции $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ обладают непрерывными ограниченными частными производными по аргументам $x_1, ..., x_n$ ($\mathbf{f}(\mathbf{x}) \in C^1(R^n, R^n)$), а точка $(\mathbf{x} = 0) \in G$ является изолированной точкой равновесия системы (1).

В настоящей работе приводятся некоторые новые условия для качественного исследования характера устойчивости точки равновесия этой системы. При качественном исследовании свойств динамических систем (1) тем или иным образом используется информация об их известных правых частях $\mathbf{f}(\mathbf{x})$. При исследовании вопроса устойчивости этих систем с помощью второго метода Ляпунова эта информация используется при определении знака производной от функции Ляпунова в силу исследуемой системы [1]. При применении первого метода Ляпунова такая информация нужна для определения характера устойчивости линеаризованной системы [1]. При применении метода источников [2, 3] информация о функции $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ нужна для определения знака дивергенции $\operatorname{div}\mathbf{f}(\mathbf{x})$. В данной работе для получения на основе второго метода Ляпунова условий, определяющих характер устойчивости систем (1), функция $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ используется не только для определения знака производной в силу системы (1) от функции Ляпунова, но и для выбора самой этой функции (конкретно для такого выбора используется модуль $|\mathbf{f}(\mathbf{x})|$). Это позволяет исследовать характер устойчивости некоторого класса нелинейных систем (1), используя в качестве функции Ляпунова либо непосредственно известную определенно-положительную функцию $|\mathbf{f}(\mathbf{x})|^2$, либо определенно-положительную функцию $|\mu(\mathbf{x})\,\mathbf{f}(\mathbf{x})|^2 = \mu^2(\mathbf{x})|\mathbf{f}(\mathbf{x})|^2$, где $\mu^2(\mathbf{x})$ — подлежащая нахождению положительная или определенно-положительная корректирующая скалярная функция, которая может не быть функцией Ляпунова. Функция $|\mu(\mathbf{x})\,\mathbf{f}(\mathbf{x})|^2$ используется в том случае, если функция $|\mathbf{f}(\mathbf{x})|^2$ не является функцией Ляпунова, т. е. если производная $d|\mathbf{f}(\mathbf{x})|^2/dt$ в силу исследуемой системы (1) не удовлетворяет какой-либо из теорем Ляпунова; функция $\mu^2(\mathbf{x})$ определяется в этом случае из условия, чтобы функция $|\mu(\mathbf{x})\,\mathbf{f}(\mathbf{x})|^2 = \mu^2(\mathbf{x})|\mathbf{f}(\mathbf{x})|^2$ стала функцией Ляпунова.

Соответствующие результаты исследования (утверждения 1, 2 и теоремы 1—3), дающие как достаточные, так и необходимые и достаточные условия асимптотической устойчивости, а также достаточные условия устойчивости и неустойчивости изолированной точки равновесия $\mathbf{x} = 0$ системы (1), приведены в § 1. Здесь же отметим, что в случае изолированности точки равновесия $\mathbf{x} = 0$ любая функция $|\mathbf{f}(\mathbf{x})|$, а следовательно и функция $|\mathbf{f}(\mathbf{x})|^2$, является в любой окрестности ε этой точки, не содержащей других точек равновесия, определенно-положительной функцией и в этом отношении пригодна на роль функции Ляпунова; конечно, при этом производные $d|\mathbf{f}(\mathbf{x})|/dt$, $d|\mathbf{f}(\mathbf{x})|^2/dt$ в силу системы (1) могут как удовлетворять требованиям теорем Ляпунова, так и не удовлетворять. То, что существуют непустые классы систем (1), у которых эти производные удовлетворяют указанным требованиям, показано в § 2; там же приводятся результаты, с помощью которых можно исследовать характер устойчивости систем (1), не входящих в указанные классы.

1. ОБ УСЛОВИЯХ, ОПРЕДЕЛЯЮЩИХ ХАРАКТЕР УСТОЙЧИВОСТИ СИСТЕМ (1)

Как отмечалось, функция $|\mathbf{f}(\mathbf{x})|^2$ является в некоторой окрестности ε изолированной точки равновесия $\mathbf{x} = 0$ определенно-положительной функцией, удовлетворяя в этом отношении требованиям теорем Ляпунова. Если к тому же производная $d|\mathbf{f}(\mathbf{x})|^2dt$ в силу системы (1) будет в некоторой окрестности $\varepsilon_1 \subseteq \varepsilon$ точки равновесия $\mathbf{x} = 0$ неположительной ($\leqslant 0$, включая $\equiv 0$), то эта точка согласно первой теореме Ляпунова [1] будет устойчивой; если же эта производная в окрестности ε_1 будет определенно-отрицательной, то точка $\mathbf{x} = 0$ будет асимптотически устойчивой. В случае, когда указанная производная окажется в окрестности ε_1 определенно-положительной, то точка $\mathbf{x} = 0$ будет на основе второй теоремы Ляпунова [1] неустойчивой. Следовательно, можно сформулировать следующие условия устойчивости, асимптотической устойчивости и неустойчивости.

Утверждение 1. *Если производная* $d|\mathbf{f}(\mathbf{x})|^2/dt$ *в силу системы* (1) *не положительна* ($\leqslant 0$, *включая* $\equiv 0$) *в некоторой окрестности* ε_1 *изолированной точки равновесия* $\mathbf{x} = 0$, *то эта точка устойчива; если при этом эта производная определенно-отрицательна в* ε_1, *то указанная точка* $\mathbf{x} = 0$ *асимптотически устойчива.*

Утверждение 2. *Если производная* $d|\mathbf{f}(\mathbf{x})|^2/dt$ *в силу системы* (1) *определенно-положительна в некоторой окрестности* ε_1 *изолированной точки равновесия* $\mathbf{x} = 0$, *то эта точка неустойчива.*

Приведенные утверждения сформулированы в терминах функции $|\mathbf{f}(\mathbf{x})|^2$, хотя могли бы быть сформулированы в терминах функции $|\mathbf{f}(\mathbf{x})|$. Это связано с тем, что вычисление производной $d|\mathbf{f}(\mathbf{x})|^2/dt$ проще, чем вычисление производной $d|\mathbf{f}(\mathbf{x})|/dt$, ибо

$$|\mathbf{f}(\mathbf{x})|^2 = \sum_{i=1}^{n} f_i^2(\mathbf{x}), \quad \text{а } |\mathbf{f}(\mathbf{x})| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} f_i^2(\mathbf{x})}.$$

Условия утверждений 1 и 2 имеют простую и наглядную геометрическую трактовку, определяющую в некоторой окрестности точки $\mathbf{x} = 0$ характер изменения модуля фазовой скорости $|\mathbf{f}(\mathbf{x})|$ во времени (а, следовательно, и вдоль траекторий, ибо $d|\mathbf{f}(\mathbf{x})|/dt = |\mathbf{f}(\mathbf{x})|d|\mathbf{f}(\mathbf{x})|/ds$, где $ds = |\mathbf{f}(\mathbf{x})|/dt$ — дифференциал расстояния вдоль траектории). Так, например, условие утверждения 1 относительно устойчивости геометрически можно трактовать как условие монотонного изменения $|\mathbf{f}(\mathbf{x})|$ вдоль любой траектории ($|\mathbf{f}(\mathbf{x})|$ монотонно уменьшается или остается постоянным вдоль любой траектории); условие утверждения 1 относительно асимптотической устойчивости геометрически означает строго монотонное уменьшение $|\mathbf{f}(\mathbf{x})|$ вдоль любой траектории при движении изображающей точки к точке равновесия $\mathbf{x} = 0$. Условие утверждения 2 геометрически означает строго монотонное увеличение $|\mathbf{f}(\mathbf{x})|$ вдоль любой траектории при движении изображающей точки от точки равновесия $\mathbf{x} = 0$.

При применении утверждения 1 для синтеза асимптотически устойчивой системы автоматического управления параметры регулятора определяются из условия, чтобы правая часть $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ системы управления имела определенно-отрицательную производную $d|\mathbf{f}(\mathbf{x})|^2/dt$ в силу этой системы. При этом система управления будет характеризоваться строго монотонным уменьшением функции $|\mathbf{f}(\mathbf{x})|$ вдоль любой траектории.

На примерах можно показать, что классы систем (1), удовлетворяющих условиям утверждений 1 и 2, не пусты. Приведем сначала пример асимптотически устойчивой системы, для которой функция $|\mathbf{f}(\mathbf{x})|^2$ является функцией Ляпунова, т. е. удовлетворяет утверждению 1 относительно асимптотической устойчивости (производная $d|\mathbf{f}(\mathbf{x})|^2/dt$ является определенно-отрицательной). Для этого рассмотрим систему

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1^3(1 + x_2^2) \\ \dot{x}_2 = -x_2^3(1 + x_1^2), \end{cases} \tag{2}$$

имеющую единственную точку равновесия $\mathbf{x} = 0$. Для этой системы функция $|\mathbf{f}(\mathbf{x})|^2 = x_1^6(1 + x_2^2)^2 + x_2^6(1 + x_1^2)^2$ является определенно-положительной во всем пространстве R^2, а функция

$$d|\mathbf{f}(\mathbf{x})|^2/dt = (\operatorname{grad}|\mathbf{f}(\mathbf{x})|^2, \mathbf{f}(\mathbf{x})) = \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial|\mathbf{f}(\mathbf{x})|^2}{\partial x_i} f_i(\mathbf{x}) =$$

$$= -[10x_1^8x_2^6 + 18x_1^8x_2^4 + 18x_1^8x_2^2 + 8x_1^6x_2^6 +$$

$$+ 10x_1^6x_2^8 + 22x_1^4x_2^8 + 18x_1^2x_2^8 + 4x_1^4x_2^6 + 4x_1^8x_2^4 +$$

$$+ 4x_1^6x_2^4 + 6(x_1^8 + x_2^8)]$$

является определенно-отрицательной в пространстве R^2, ибо в R^2 определенно-отрицательна часть этой функции $-6(x_1^8 + x_2^8)$, а остальные ее члены не положительны и равны нулю в точке $\mathbf{x} = 0$. Поэтому согласно утверждению 1 точка равновесия $\mathbf{x} = 0$ системы (2) асимптотически устойчива; областью притяжения точки $\mathbf{x} = 0$, очевидно, является все пространство R^2. Следовательно, класс асимптотически устойчивых систем (1) второго порядка, удовлетворяющих условиям утверждения 1, не пуст.

Очевидно, что система

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1^3(1 + x_2^2) \\ \dot{x}_2 = x_2^3(1 + x_1^2) \end{cases}, \tag{3}$$

получающаяся из системы (2) изменением знаков ее правых частей, имеет неустойчивую точку равновесия $\mathbf{x} = 0$, причем функция $d|\mathbf{f}(\mathbf{x})|^2/dt$ удовлетворяет условиям утверждения 2, так как является определенно-положительной (она отличается только знаком от функции $d|\mathbf{f}(\mathbf{x})|^2/dt$, полученной в предыдущем примере для системы (2), ибо функции $|\mathbf{f}(\mathbf{x})|^2$ и, следовательно, функции $\operatorname{grad}|\mathbf{f}(\mathbf{x})|^2$ для систем (2) и (3) одинаковы, а знаки правых частей этих систем противоположны). Таким образом, класс неустойчивых систем (1) второго порядка, удовлетворяющих условиям утверждения 2, не пуст.

Система $\dot{x}_1 = x_2$, $\dot{x}_2 = -x_1$ имеет единственную точку равновесия $\mathbf{x} = 0$ и ей соответствует определенно-положительная функция $|\mathbf{f}(\mathbf{x})|^2 = x_1^2 + x_2^2$, удовлетворяющая условиям утверждения 1 относительно устойчивости. Действительно,

$$d|\mathbf{f}(\mathbf{x})|^2/dt = (\mathrm{grad}\,|\mathbf{f}(\mathbf{x})|^2,\ \mathbf{f}(\mathbf{x})) = 2x_1x_2 - 2x_2x_1 \equiv 0,$$

что согласно утверждению 1 означает неасимптотическую устойчивость точки $\mathbf{x} = 0$. Следовательно, класс неасимптотически устойчивых систем (1) второго порядка, удовлетворяющих условиям утверждения 1, не пуст.

Ясно, что аналогичные примеры существуют как среди других систем (1) второго порядка, так и среди систем (1) любого иного порядка. Поэтому можно сделать вывод, что классы асимптотически устойчивых, неустойчивых и неасимптотически устойчивых систем (1), удовлетворяющих соответствующим условиям утверждений 1 и 2, не являются пустыми; т. е. существуют классы систем (1), характер устойчивости которых можно определять, используя в качестве функций Ляпунова известную функцию $|\mathbf{f}(\mathbf{x})|^2$.

Из примеров также видно, что не пуст и класс систем (1), для которых функция $|\mathbf{f}(\mathbf{x})|^2$ не является функцией Ляпунова (т. е. функция $|\mathbf{f}(\mathbf{x})|$ изменяется немонотонно вдоль траекторий системы (1)) и характер устойчивости которых не может быть определен с помощью утверждений 1 и 2. Некоторые множества систем из этого класса можно исследовать на устойчивость, используя следующие результаты.

Пусть $\mu(\mathbf{x})$ — скалярная функция, определенная в некоторой окрестности ε изолированной точки равновесия $\mathbf{x} = 0$ системы (1), кроме, может быть, этой точки, и обеспечивающая определенную положительность и непрерывную дифференцируемость (класса C^1) для функции $|\mu(\mathbf{x})\,\mathbf{f}(\mathbf{x})|^2 = \mu^2(\mathbf{x})|\mathbf{f}(\mathbf{x})|^2$. Если функция $\mu(\mathbf{x})$ определена во всех точках окрестности ε, то функция $\mu^2(\mathbf{x})$ может быть как положительной (в этом случае функция $\mu(\mathbf{x})$ может быть либо положительной, либо отрицательной), так и определенно-положительной (в этом случае функция $\mu(\mathbf{x})$ может быть либо определенно-положительной, либо определенно-отрицательной); если же функция $\mu(\mathbf{x})$ определена на множестве $\varepsilon\backslash\{\mathbf{x} = 0\}$, то на этом множестве функция $\mu^2(\mathbf{x})$, очевидно, может быть только положительной (функция $\mu(\mathbf{x})$ в этом случае может быть либо положительной, либо отрицательной). Только при таких условиях на функции $\mu(\mathbf{x})$ и $\mu^2(\mathbf{x})$ функция $|\mu(\mathbf{x})\,\mathbf{f}(\mathbf{x})|^2$ может быть определенно-положительной (например, при знакопеременной функции $\mu(\mathbf{x})$ функция $|\mu(\mathbf{x})\,\mathbf{f}(\mathbf{x})|^2$ не является определенно-положительной). Пусть в окрестности ε нет точек равновесия, отличных от точки $\mathbf{x} = 0$, и поэтому функция $|\mathbf{f}(\mathbf{x})|^2$ является в этой окрестности определенно-положительной.

Теорема 1. *Если существует такая функция* $\mu(\mathbf{x})$, *что производная в силу системы* (1) *от функции* $|\mu(\mathbf{x})\,\mathbf{f}(\mathbf{x})|^2$ *неположительна* ($\leqslant 0$, *включая* $\equiv 0$) *в некоторой окрестности* $\varepsilon_1 \subseteq \varepsilon$ *изолированной точки равновесия* $\mathbf{x} = 0$, *то эта точка устойчива.*

Теорема 2. *Изолированная точка равновесия* $\mathbf{x} = 0$ *системы* (1) *асимптотически устойчива тогда и только тогда, если существует такая функция* $\mu(\mathbf{x})$, *что производная в силу системы* (1) *от функции* $|\mu(\mathbf{x})\,\mathbf{f}(\mathbf{x})|^2$ *определенно-отрицательна в некоторой окрестности* $\varepsilon_1 \subseteq \varepsilon$ *точки* $\mathbf{x} = 0$.

Теорема 3. *Если существует такая функция* $\mu(\mathbf{x})$, *что производная в силу системы* (1) *от функции* $|\mu(\mathbf{x})\,\mathbf{f}(\mathbf{x})|^2$ *определенно-положительна в некоторой окрестности* $\varepsilon_1 \subseteq \varepsilon$ *изолированной точки равновесия* $\mathbf{x} = 0$, *то эта точка неустойчива.*

Доказательства теорем 1—3 приведены в Приложении. Теорема 2 дает достаточное и необходимое условие асимптотической устойчивости. Теоремы 1 и 3 дают достаточные условия соответственно устойчивости и неустойчивости.

Назначение функции $\mu(\mathbf{x})$ в теоремах 1—3 состоит в том, чтобы превратить функцию $|\mathbf{f}(\mathbf{x})|^2$, если она не пригодна на роль функции Ляпунова для системы (1), в функцию $|\mu(\mathbf{x})\,\mathbf{f}(\mathbf{x})|^2 = \mu^2(\mathbf{x})|\mathbf{f}(\mathbf{x})|^2$, пригодную на эту роль. С помощью функции $\mu(\mathbf{x})$ осуществляется переход от немонотонно изменяющейся вдоль траекторий системы (1) функции $|\mathbf{f}(\mathbf{x})|^2$ к монотонно изменяющейся вдоль этих траекторий функции $|\mu(\mathbf{x})\,\mathbf{f}(\mathbf{x})|^2$. Очевидно, что по своему смыслу функция $\mu(\mathbf{x})$ не является функцией Ляпунова.

ПРИЛОЖЕНИЕ

К доказательству теорем 1—3.

Достаточность условий этих теорем. В соответствии с условиями теорем 1—3 существует такая функция $\mu(\mathbf{x})$, что производная в силу системы (1) от определенно-положительной функции $|\mu(\mathbf{x})\mathbf{f}(\mathbf{x})|^2$ является соответственно неположительной ($\leqslant 0$, включая $\equiv 0$), определенно-отрицательной, определенно- положительной. Поэтому, если удовлетворяются условия теорем 1—3, то удовлетворяются соответственно и условия теорем Ляпунова об устойчивости, асимптотической устойчивости, неустойчивости. Следовательно, точка равновесия $\mathbf{x} = 0$ системы (1) будет устойчивой при условиях теоремы 1, асимптотически устойчивой при условии теоремы 2 и неустойчивой при условии теоремы 3.

Необходимость условия теоремы 2. Нужно показать, что если изолированная точка равновесия системы (1) асимптотически устойчива, то существует такая функция $\mu(\mathbf{x})$, что производная в силу системы (1) от функции $|\mu(\mathbf{x})\mathbf{f}(\mathbf{x})|^2$ является определенно-отрицательной. Так как система (1) автономна, то в случае ее асимптотической устойчивости существует [4] зависящая только от $\mathbf{x}$ знакоопределенная функция Ляпунова $V(\mathbf{x})$, удовлетворяющая условию теоремы Ляпунова об асимптотической устойчивости автономных систем (производная $\dot V$ в силу системы (1) знакоопределенна, знака, противоположного знаку $V(\mathbf{x})$). Тогда будет существовать функция $\mu(\mathbf{x})$, удовлетворяющая условию $|\mu(\mathbf{x})\,\mathbf{f}(\mathbf{x})|^2 = \mu^2(\mathbf{x})|\mathbf{f}(\mathbf{x})|^2 = V(\mathbf{x})$, где $V(\mathbf{x})$ — определенно-положительная функция Ляпунова, существующая для асимптотически устойчивой системы (1) (если функция $V(\mathbf{x})$ — определенно-отрицательна, то необходимо воспользоваться условием $|\mu(\mathbf{x})\,\mathbf{f}(\mathbf{x})|^2 = -V(\mathbf{x})$). Очевидно, что при так выбранной функции $\mu(\mathbf{x})$ производная в силу системы (1) от функции $|\mu(\mathbf{x})\,\mathbf{f}(\mathbf{x})|^2 = V(\mathbf{x})$ будет определенно-отрицательной, что и требовалось в условиях теоремы 2.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ляпунов А. М.* Общая задача об устойчивости движения. — М.: Л.: ОНТИ, 1935.
2. *Жуков В. П.* Полевые методы в исследованиях нелинейных динамических систем. — М.: Наука, 1992.
3. *Жуков В. П.* Дивергентные условия асимптотической устойчивости нелинейных динамических систем второго порядка // Автоматика и телемеханика. — 1999. — № 7. — С. 34—43.
4. *Малкин И. Г.* Теория устойчивости движения. — М.: Наука, 1966. — С. 310.

(495) 334-92-29

Статья представлена к публикации членом редколлегии Б. В. Павловым. ❑