Pb207.fm Page 52 Monday, March 12, 2007 3:43 PM

УДК 519

ОПТИМИЗАЦИЯ ПАРАМЕТРОВ МЕХАНИЗМА СТИМУЛИРОВАНИЯ

М. А. Щепкина

Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова, г. Москва

Рассмотрены процедуры формирования коэффициентов трудового участия в трудовых коллективах в целях повышения отдачи каждого члена коллектива при ограниченном фонде вознаграждения.

ВВЕДЕНИЕ

В работах, посвященных анализу систем стимулирования в трудовых коллективах, рассматривается ситуация, когда за результаты своей деятельности каждый агент (член трудового коллектива) получает соответствующее вознаграждение. Один из механизмов поощрения, в основу которого положено распределение фонда премирования на основе коэффициентов трудового участия (КТУ), рассмотрен в работах [1—3], где в процедурах формирования КТУ используется лишь один показатель деятельности. В настоящей работе рассматривается ситуация, когда, кроме вклада агента в результаты деятельности коллектива, Центр для формирования КТУ определяет вес этого вклада.

1. МОДЕЛЬ ТРУДОВОГО КОЛЛЕКТИВА

Модель коллектива представляется в виде двухуровневой системы, состоящей из Центра (руководителя коллектива) и n агентов нижнего уровня. Стратегия агента состоит в выборе действия $x_i \in A_i$, $i \in N = \{1, 2, ..., n\}$, принадлежащего компактному множеству допустимых действий A_i. Действием агента может быть любой показатель его деятельности: число отрабатываемых часов, объем произведенной продукции, ее качество и иные характеристики. Предполагается, что по результатам своей деятельности коллектив получает премиальный фонд Φ, который распределяется между агентами в соответствии с выбранной процедурой стимулирования. Каждый агент получает вознаграждение (премию) в размере Π_i, $i = 1, ..., n$. Фонд остается неизменным на протяжении нескольких периодов функционирования. Фонд премирования в коллективе распределяется полностью, т. е. $\Phi = \sum_{i=1}^{N} \Pi_i$.

Будем считать, что i-й агент характеризуется показателем r_i, отражающим его квалификацию (эффективность деятельности), т. е. индивидуальные затраты i-го агента $z_i = z_i(x_i, r_i)$ монотонно убывают с ростом квалификации r_i, $i \in N$. Действие агента x_i будем считать принадлежащим множеству неотрицательных действительных чисел.

Коллектив, в котором квалификация всех агентов одинаковая, называется *однородным*, в противном случае — *неоднородным* [3]. Эффективность системы стимулирования будем оценивать суммой действий агентов: $K = \sum_{i=1}^{N} x_i$.

Целевые функции агентов имеют вид:

$$f_i(x_i) = \Pi_i - z_i(x_i, r_i), \quad i \in N. \tag{1}$$

2. ФОРМИРОВАНИЕ КТУ И ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПООЩРЕНИЯ

Простейший способ определения КТУ δ_i агента — пропорционально действию последнего, т. е.

$$\delta_i = \frac{x_i}{\sum_{j=1}^{n} x_j}, \quad i \in N. \tag{2}$$

Пусть функции затрат агентов линейны: $z_i(x_i, r_i) = x_i/r_i$. Тогда из условий (1) и (2) получаем следующее

Black process 45.0• 175.0 LPI

Pb207.fm Page 53 Monday, March 12, 2007 3:43 PM

выражение для целевой функции i-го агента, зависящей уже от действий всех агентов:

$$f_i(x) = \Phi\,\frac{x_i}{\sum\limits_{j=1}^{n} x_j} - x_i/r_i,\ i \in N. \qquad (3)$$

Следовательно, исследуемую ситуацию можно рассматривать как игру n лиц с функциями выигрыша вида (3).

Анализ модели для однородного коллектива проведен в работе [3].

Из выражений (2) и (3) следует, что в неоднородном коллективе ситуации равновесия Нэша соответствуют следующие действия агентов:

$$x_i^* = \frac{S-(n-1)}{S^2}\,\Phi(n-1),\ i \in N,$$

где $S = \sum\limits_{j=1}^{n}\frac{1}{r_j}$, а эффективность системы стимулирования определяется как

$$K = \frac{n-1}{S}\,\Phi. \qquad (4)$$

На практике при формировании КТУ часто учитываются не только показатель деятельности агентов, но и значения окладов или тарифных ставок. Обозначим через $З_i$, $i \in N$ тарифную ставку i-го агента $i \in N$. Учитывая тарифные ставки агентов, их КТУ представим в виде

$$\delta_i = x_i\Big/\left(З_i\sum_{j=1}^{n}\frac{x_j}{З_j}\right),\quad i \in N. \qquad (5)$$

В этом случае ситуации равновесия по Нэшу соответствуют следующие действия агентов:

$$x_i^* = З_i\frac{n-1}{Z}\,\Phi - \frac{З_i^2\Phi}{r_i}\left(\frac{n-1}{Z}\right)^2,\quad i \in N,$$

где $Z = \sum\limits_{j=1}^{n}\frac{З_j}{r_j}$, а эффективность системы стимулирования

$$K_1 = \frac{n-1}{Z}\,\Phi\left(\sum_{j=1}^{n}З_j - \frac{n-1}{Z}\sum_{j=1}^{n}\frac{З_j^2}{r_j}\right). \qquad (6)$$

В дальнейшем, без ограничения общности, будем считать, что

$$З_1 \geqslant З_2 \geqslant \ldots \geqslant З_n, \qquad (7)$$

$$r_1 \geqslant r_2 \geqslant \ldots \geqslant r_n. \qquad (8)$$

Утверждение. *Если КТУ коллектива определяется из условия* (5), *справедливы условия* (7) *и* (8) *и выполняется неравенство*

$$\frac{З_1}{r_1} \leqslant \frac{З_2}{r_2} \leqslant \ldots \leqslant \frac{З_n}{r_n}, \qquad (9)$$

то эффективность системы стимулирования в ситуации равновесия по Нэшу не ниже, чем в случае, когда КТУ определяется в соответствии с выражением (2).

Доказательство. Необходимо показать, что (см. формулы (4), (6))

$$\frac{n-1}{Z}\,\Phi\left(\sum_{j=1}^{n}З_j - \frac{n-1}{Z}\sum_{j=1}^{n}\frac{З_j^2}{r_j}\right) \geqslant \frac{\Phi(n-1)}{S}$$

или

$$\sum_{j=1}^{n}З_j - \frac{Z}{S} \geqslant \frac{n}{Z}\sum_{j=1}^{n}\frac{З_j^2}{r_j} - \frac{1}{Z}\sum_{j=1}^{n}\frac{З_j^2}{r_j}.$$

Это неравенство выполняется всегда, если справедливы неравенства

$$\sum_{j=1}^{n}З_j \geqslant \frac{n}{Z}\sum_{j=1}^{n}\frac{З_j^2}{r_j} \qquad (10)$$

и

$$\frac{Z}{S} \leqslant \frac{1}{Z}\sum_{j=1}^{n}\frac{З_j^2}{r_j}. \qquad (11)$$

Неравенство (10) перепишем в виде

$$\frac{\sum\limits_{j=1}^{n}З_j}{n}\cdot\frac{\sum\limits_{j=1}^{n}\frac{З_j}{r_j}}{n} \geqslant \sum_{j=1}^{n}З_j\frac{З_j}{r_j}\Big/n.$$

Оно выполняется, так как, учитывая условия (7) и (9), можно утверждать, что произведение средних арифметических n положительных чисел больше или равно среднему арифметическому произведений этих чисел (неравенство Чебышева).

Теперь перепишем неравенство (11) в виде

$$\left[\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{1}{\sqrt{r_j}}\cdot\frac{З_j}{\sqrt{r_j}}\right)\right]^2 \leqslant \sum_{j=1}^{n}\frac{1}{r_j}\cdot\sum_{j=1}^{n}\frac{З_j^2}{r_j}.$$

А это есть неравенство Коши—Буняковского.

Таким образом, справедливость неравенств (10) и (11) доказывает утверждение. ♦

Black process 45.0• 175.0 LPI

Pb207.fm Page 54 Monday, March 12, 2007 3:43 PM

Так как показатель r_i отражает квалификацию i-го агента, то можем предположить, что оклад пропорционален его квалификации, т. е. $З_i = br_i$. Такой способ расчета оклада применяется в организациях бюджетной сферы, где используется единая тарифная сетка (ЕТС).

Эффективность (6) для этого случая можем записать как

$$K_2 = \frac{n-1}{n^2}\,\Phi \sum_{j=1}^{n} r_j.$$

И для этого случая всегда справедливо неравенство $K_2 \geqslant K$.

3. ОПТИМИЗАЦИЯ ПАРАМЕТРОВ КТУ

Рассмотрим случай, когда КТУ каждого агента определяется как

$$\delta_i = \frac{v_i x_i}{\sum_{j=1}^{n} v_j x_j},\ i \in N, \tag{12}$$

где v_i — коэффициент (вес), устанавливаемый Центром, характеризующий вклад i-го агента в общий результат деятельности всего коллектива.

В этом случае ситуации равновесия по Нэшу соответствуют следующие действия агентов:

$$x_i^{**} = \frac{V^2 - \frac{n-1}{v_i r_i}}{V^2}\,\frac{n-1}{v_i}\,\Phi,\ i \in N,$$

где $V = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{v_j r_j}$ а эффективность системы стимулирования

$$K_3 = \frac{\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{v_j} V - \sum_{j=1}^{n} \frac{n-1}{v_j^2 r_j}}{V^2}\,(n-1)\Phi. \tag{13}$$

Теперь необходимо установить значения весов v_i, $i \in N$, при которых выражение (13) принимает максимальное значение, т. е. решить задачу

$$\frac{\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{v_j} V - \sum_{j=1}^{n} \frac{n-1}{v_j^2 r_j}}{V^2} \xrightarrow[v_j \geqslant 0]{} \max. \tag{14}$$

Решение задачи (14) записывается в виде

$$v_i = \frac{1}{Cr_i}\,\frac{(n-2)/r_i + S}{(n-2)/r_i + S},\ i \in N, \tag{15}$$

где $C = \mathrm{const}$. Соответственно

$$x_i^{**} = \frac{S^2 - [(n-2)/r_i]^2}{4S^2}\,r_i\Phi,\ i \in N$$

и

$$K_3 = \frac{S\sum_{j=1}^{n} r_j - (n-2)^2}{4S}\,\Phi. \tag{16}$$

Сравнивая выражения (4) и (16), можно утверждать, что $K = K_3$ лишь в случае, когда $r_1 = r_2 = \ldots = r_n$, и применение коэффициентов v_i, $i \in N$, при формировании КТУ для повышения эффективности системы стимулирования целесообразно использовать только в неоднородном коллективе.

Определим условия, когда $v_i \leqslant v_{i+1}$. В этом случае из неравенства

$$\frac{1}{r_i}\,\frac{(n-2)/r_i + S}{(n-2)/r_i + S} \leqslant \frac{1}{r_{i+1}}\,\frac{(n-2)/r_i + S}{(n-2)/r_{i+1} + S}$$

получаем, что $r_{i+1} \leqslant r_i$. Таким образом, из решения задачи (14) следует, что при формировании КТУ вклад в общий результат деятельности агента, имеющего более высокую квалификацию, учитывается с меньшим весом, чем вклад агента, менее квалифицированного.

Сравним значения x_i^{**} и x_i^{*}. Пусть

$$\frac{S^2 - [(n-2)/r_i]^2}{4S^2}\,r_i\Phi > \frac{S^2 - (n-1)/r_i}{S^2}\,\Phi(n-1). \tag{17}$$

Неравенство (17) выполняется, если справедливо одно из неравенств

$$\frac{1}{r_i} < \frac{1}{3n-4}\,S,\ i \in N, \tag{18}$$

$$\frac{1}{r_i} > \frac{1}{n}\,S,\ i \in N. \tag{19}$$

Обозначим через $G = n/S$ — среднее гармоническое показателей квалификации всех агентов. Тогда неравенства (18) и (19) можно переписать в виде

$$r_i > \left(3 - \frac{4}{n}\right)G,\ i \in N, \tag{20}$$

$$r_i < G,\ i \in N. \tag{21}$$

Будем считать, что агенты, для которых справедливо неравенство (21), это низкоквалифицированные специалисты (квалификация ниже среднего гармонического значения показателей r_i, $i \in N$), соответственно, агенты, для которых справедливо неравенство (20), — высококвалифицированные специалисты (квалификация выше среднего гармонического значения показателей, умно-

Black process 45.0• 175.0 LPI

Pb207.fm Page 55 Monday, March 12, 2007 3:43 PM

женного на коэффициент, больший единицы для $n > 2$ и больший двух для $n > 4$). Все остальные агенты — это специалисты средней квалификации.

Из неравенства (20) следует, что с ростом n ограничения на показатели квалификации r_i, $i \in N$, становятся более жесткими.

Пример. Пусть коллектив состоит из пяти агентов $n = 5$, $\Phi = 1000$, $r_1 = 0{,}136$, $r_2 = 0{,}138$, $r_3 = 0{,}14$, $r_4 = 0{,}17$, $r_5 = 0{,}38$. Среднее гармоническое значение показателей $G = 0{,}165$. Следовательно, первого, второго и третьего агентов можем считать низкоквалифицированными специалистами, четвертого агента — специалистом средней квалификации, а пятого — высококвалифицированным специалистом.

Если формировать КТУ каждого агента на основе процедуры (2), то в ситуации равновесия по Нэшу имеем: $x_1^* = 3{,}69$, $x_2^* = 5{,}55$, $x_3^* = 7{,}36$, $x_4^* = 29{,}39$, $x_5^* = 86{,}21$. Соответственно, $\delta_1^* = 0{,}03$, $\delta_2^* = 0{,}04$, $\delta_3^* = 0{,}06$, $\delta_4^* = 0{,}22$, $\delta_5^* = 0{,}65$ и $K = 132{,}21$. Если же формировать КТУ на основе процедуры (12), когда значения коэффициентов v_i, $i \in N$, получены из решения (14), то получим $v_1 = 7{,}35/C$, $v_2 = 7{,}29/C$, $v_3 = 7{,}32/C$, $v_4 = 6{,}42/C$, $v_5 = 3{,}61/C$. Для этого случая в ситуации равновесия по Нэшу имеем $x_1^{**} = 15{,}93$, $x_2^{**} = 16{,}69$, $x_3^{**} = 17{,}44$, $x_4^{**} = 28{,}04$, $x_5^{**} = 88{,}53$. Соответственно, $\delta_1^{**} = 0{,}10$, $\delta_2^{**} = 0{,}10$, $\delta_3^{**} = 0{,}105$, $\delta_4^{**} = 0{,}17$, $\delta_5^{**} = 0{,}53$ и $K_3 = 166{,}64$.

Таким образом, применение процедуры (12) и выбор весовых коэффициентов в соответствии с выражением (15) позволили повысить эффективность системы стимулирования на 26,04 %. При этом показатель деятельности первого агента повысился на 331,7 %, второго — на 200,6, третьего — на 137,0, пятого — на 2,69 %. Показатель деятельности четвертого агента упал на 4,6 %.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Несмотря на то, что хотя выбор весовых коэффициентов для определения КТУ в соответствии с условием (12) в ситуации равновесия по Нэшу и обеспечивает наибольшую эффективность механизма стимулирования, реализовать эту процедуру на практике достаточно сложно, так как трудно получить точную информацию о показателях квалификации r_i. В то же время, для применения процедуры формирования КТУ (5), достаточно знать лишь диапазон изменения показателей квалификации. Если при этом тарифные ставки таковы, что при самых неблагоприятных значениях показателей квалификации из этих диапазонов выполняется неравенство (9), то уже применение этой процедуры на практике может дать положительный эффект.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Динова Н. И.* Бригадные формы оплаты труда // Механизмы управления социально-экономическими системами: Сб. науч. тр. — М., 1988. — С. 32—40.
2. *Щепкин А. В.* Внутрифирменное управление (модели и механизмы). — М.: ИПУ РАН, 2001. — 80 с.
3. *Иващенко А. А., Новиков Д. А., Щепкина М. А.* Модели и механизмы многокритериального стимулирования в организационных системах. — М.: ИПУ РАН, 2006. — 60 с.

(495) 334-90-51

e-mail: Shchepkina@mail.ru

Статья представлена к публикации членом редколлегии В. Н. Бурковым.

Новые книги

Андреева Е.А. Вариационное исчисление и методы оптимизации. — М.: Высшая школа, 2006. — 584 с.

Босс В. Лекции по математике. — М.: 2006. — Т. 6. — 206 с.

Гультяев А.К. Восстановление данных. — СПб.: Питер, 2006. — 378 с.

Журавлёв Ю.И. «Распознавание». — М.: ФАЗИС, 2006. — 176 с. + Диск.

Компьютерная система планирования и оперативного управления эвакуацией населения при авариях на химически опасных объектах. — М.: ИПУ, 2006. — 104 с.

Малинецкий Г.Г. Нелинейная динамика. — М.: URSS, 2006. — 279 с.

Нильсен М.А. Квантовые вычисления и квантовая информация. — М.: Мир, 2006. — 822 с.

Павлов В.В. Структурное моделирование в CALS-технологиях. — М.: Наука, 2006. — 307 с.

Попов Н.А. Сущность времени и относительности. — М.: URSS, 2006. — 207 с.

Пригожин И. От существующего к возникающему. — М.: URSS, 2006. — 291 с.

Софронов И.Д. Избранные труды: Математическое моделирование и вычислительные системы. — Саров: ФГУП, 2005. — 564 с.

Уоткинс Д.С. Основы матричных вычислений. — М.: Бином, 2006. — 664 с.

Фоменков С.А. Математическое моделирование системных объектов. — Волгоград: Политехник, 2006. — 179 с.

Цыганов А.В. Интегрируемые системы в методе разделения переменных. — М.; Ижевск: Ин-т компьютер. исслед., 2005. — 384 с.

Элементарное введение в эллиптическую криптографию. — М.: URSS, 2006. — 324 с.

Эшби Р.У. Введение в кибернетику. — М.: URSS, 2006. — 432 с.

Яблонский А.А. Курс теоретической механики. — М.: Интеграл-Пресс, 2006. — 603 с.

Black process 45.0• 175.0 LPI