УДК 519.86;519.718

СИНТЕЗ УПРЕЖДАЮЩЕГО АНАЛОГА МОДЕЛИ САМУЭЛЬСОНА–ХИКСА

В.А. Колемаев

Государственный университет управления, г. Москва

Предложена более устойчивая форма модели Самуэльсона—Хикса и ее применение к задаче удвоения валового внутреннего продукта.

Согласно динамической модели Кейнса валовой внутренний продукт (ВВП) будущего года (предложение) формируется по спросу на потребительские и инвестиционные товары, сложившемуся в текущем году. Спрос на потребительские товары — линейная функция от текущего значения ВВП, спрос на инвестиционные товары предполагается неизменным. Таким образом, эта модель имеет вид линейного конечно-разностного управления первого порядка

$$y(t+1) = C_0 + cy(t) + I, \;\; y(0) = y_0, \qquad (1)$$

где $y(t+1)$, $y(t)$ — будущее и текущее значения ВВП; c — предельная склонность к потреблению; $0 < c < 1$; I — постоянный спрос на инвестиционные товары; C_0 — свободный член.

Установившееся решение уравнения (1) имеет вид:

$$y^E = (C_0 + I)/(1 - c). \qquad (2)$$

Для ускорения переходного процесса в уравнение вводится акселератор, в результате получается модель Самуэльсона—Хикса

$$y(t+1) = C_0 + cy(t) + I + r(y(t) - y(t-1)), \quad y(0) = y_0, \qquad (3)$$

где r — коэффициент акселерации, а именно, доля текущего приращения ВВП, направляемая на инвестиции.

Уравнение (3) имеет такое же установившееся решение (2), как и динамическая модель Кейнса. Таким образом, введение акселератора не изменяет установившегося значения ВВП, но благодаря текущему перераспределению ВВП в сторону увеличения инвестиций при соответствующем сокращении потребления приводит к ускорению переходного процесса.

Переходные процессы удобнее изучать, рассматривая непрерывные варианты дискретных моделей. Непрерывным вариантом динамической модели Кейнса служит инерционное звено

$$T\frac{dy}{dt} + y = y^E, \;\; y(0) = y_0, \qquad (4)$$

где $T = (1 - c)^{-1}$ — постоянная времени, $y^E = (C_0 + I)/(1 - c)$ — стационарное решение, а также вход в динамическую систему. Система ведет себя устойчиво, никаких особенностей не возникает.

Непрерывным вариантом модели Самуэльсона—Хикса служит следующее линейное дифференциальное уравнение второго порядка:

$$\frac{1}{1-c}\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{1-r}{1-c}\frac{dy}{dt} + y = y^E, \;\; y(0) = y_0, \qquad (5)$$

которое имеет такое же стационарное решение $y^E = (C_0 + I)/(1 - c)$, что и ее дискретный вариант, и такое же, как динамическая модель Кейнса.

Поведение системы, описываемой уравнением (5), зависит от корней его характеристического уравнения $\lambda^2 + (1 - r)\lambda + 1 - c = 0$.

В работе [1] было показано, что при действительных корнях характеристического уравнения динамическую систему, описываемую уравнением (5), можно представить в виде последовательного соединения двух инерционных звеньев с постоянными времени

$$T_{1,2} = \left[\frac{1-r}{2} \pm \sqrt{(1-r)^2/2 - (1-c)}\right]^{-1},$$

если же корни комплексные, то система — колебательное звено.

В работе [2] подробно исследован характер переходных процессов в зависимости от коэффициента акселерации r. В частности, показано, что при $0 < r \leqslant 1 - 2\sqrt{1-c}$ имеет место экспоненциальная сходимость к установившемуся значению ВВП, а при $1 - 2\sqrt{1-c} < r < 1$ — экспоненциально-колебательная сходимость. Особенности возникают при предельном значении коэффициента акселерации $r = 1$ и при «запредельных» значениях $r > 1$.

При $r = 1$ система входит в установившийся колебательный режим, а при $r > 1$ — в колебательный режим с экспоненциально растущей амплитудой. В связи с этим возникает вопрос: можно ли так преобразовать систему, описываемую моделью Самуэльсона—Хикса, чтобы новая система вела себя устойчивым образом при предельном и некоторых запредельных значениях коэффициента акселерации?

Это преобразование предлагается осуществить путем включения акселератора в контур положительной обратной связи с динамической моделью Кейнса, т. е. путем синтеза новой системы из двух элементов: инерционного звена и акселератора.

На рисунке показан этот контур обратной связи, $G_1(s)$, $G_2(s)$ — передаточные функции элементов, вход $x = y^E\chi(t)$, ($\chi(t)$ — функция Хэвисайда), выход — y.

Передаточная функция контура положительной обратной связи

$$G(s) = \frac{G_1(s)}{1 - G_1(s)\,G_2(s)} = \frac{1}{(T-r)s+1},$$

и новая система — это инерционное звено с другой постоянной времени $\tilde{T} = T - r$ [1]. Эта система устойчива при $r < T$, т. е. при $r < \frac{1}{1-c}$, что включает предельное и некоторые запредельные значения r.

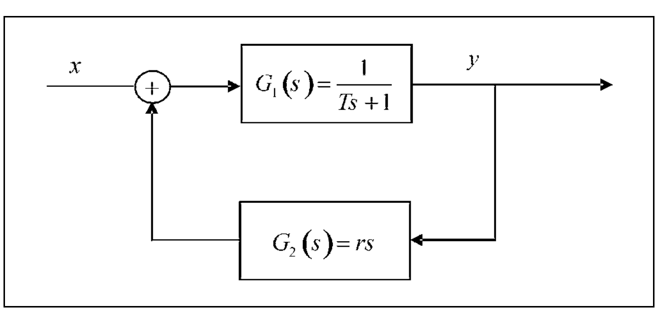
Дифференциальное уравнение этого инерционного звена имеет вид:

$$(T - r)\frac{dy}{dt} + y = y^E, \quad y(0) = y_0;$$

его дискретным вариантом является следующее линейное конечно-разностное уравнение первого порядка:

$$y(t+1) = \frac{c - r(1-c)}{1 - r(1-c)}\,y(t) + \frac{C_0 + I}{1 - r(1-c)}, \qquad (6)$$

которое имеет такое же установившееся решение, как динамическая модель Кейнса и модель Самуэльсона—Хикса, т. е. решение вида (2).



Инерционное звено с акселератором в контуре положительной обратной связи

Полученное уравнение (6) легко преобразуется к виду

$$y(t+1) = C_0 + cy(t) + \\ + r(1-c)[y(t+1) - y(t)] + I. \qquad (7)$$

Модель (7) естественно назвать упреждающим аналогом модели Самуэльсона—Хикса, поскольку имеет место эффект акселерации с упреждением (акселеративное слагаемое пропорционально будущему приросту ВВП), в отличие от запаздывающей акселерации в модели Самуэльсона—Хикса (акселеративное слагаемое пропорционально текущему приросту ВВП).

Сравним теперь при $0 < r < 1$ по скорости сходимости упреждающий аналог и модель Самуэльсона—Хикса, для упрощения исследуем поведение непрерывных вариантов моделей. В непрерывном случае переменная часть решения — решение однородного уравнения. Для модели Самуэльсона—Хикса это линейная комбинация фундаментальных решений $e^{\lambda_1 t}$ и $e^{\lambda_2 t}$ где λ_1 и λ_2 — корни характеристического уравнения $\lambda^2 + (1 - r)\lambda + 1 - c = 0$, а для упреждающего аналога этой модели — фундаментальное решение $e^{\lambda_M t}$, где λ_M — корень характеристического уравнения $(T - r)\lambda + 1 = 0$.

Имеем

$$\lambda_M = -\frac{1-c}{1 - r(1-c)}, \quad \lambda_{1,2} = -\frac{1-r}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{1-r}{2}\right)^2 - (1-c)}.$$

Сначала рассмотрим интервал изменения коэффициента акселерации $0 < r < 1 - 2\sqrt{1-c}$, в котором корни характеристического уравнения модели Самуэльсона — Хикса — действительные. Скорость сходимости в линейной комбинации $A_1e^{\lambda_1 t} + A_2e^{\lambda_2 t}$ определяет более медленная экспонента, соответствующая корню λ_1, но поскольку $|\lambda_M| < |\lambda_1|$, поэтому модель Самуэльсона—Хикса характеризуется более высокой скоростью сходимости.

Рассмотрим теперь интервал $1 - 2\sqrt{1-c} < r < 1$. Корни характеристического уравнения модели Самуэльсона—Хикса — комплексные. Переменная часть решения — затухающие гармонические колебания с амплитудой, пропорциональной $e^{-(1-r)t/2}$. Поэтому величину $|\lambda_M|$ надо сравнить с величиной $(1 - r)/2$.

Имеем

$$\frac{1-r}{2} - |\lambda_M| = \frac{(1-r)[1 - r(1-c)] - 2(1-c)}{2[1 - r(1-c)]}.$$

Исследуем числитель последнего выражения как квадратическую функцию r: $f(r) = (1 - c)r^2 - (2 - c)r - 1 + 2c$, $f(0) = -1 + 2c > 0$, $f(1) = -2(1 - c) < 0$. Поскольку $f'(r) = 2(1 - c)r - (2 - c)$, то точка максимума

$$r^* = \frac{1 - c/2}{1-c} > 1,$$

поэтому на интервале [0, 1] находится единственный (меньший) корень уравнения $(1 - c)r^2 - (2 - c)r - 1 + 2c = 0$

$$\hat{r} = \frac{1 - c/2}{1 - c} - \sqrt{\frac{(1 - c/2)^2}{(1 - c)^2} + \frac{(1 - 2c)}{1 - c}}.$$

Подведем итоги. При $0 < r < \hat{r}$ модель Самуэльсона—Хикса (непрерывный вариант) характеризуется более высокой скоростью сходимости к установившемуся решению, чем ее упреждающий аналог, напротив, при $\hat{r} < r < 1$ скорость сходимости упреждающего аналога выше.

Кроме того, упреждающий аналог имеет более широкую область устойчивости, поскольку в нее входят предельное значение $r = 1$ и некоторые запредельные значения $1 < r < 1/(1 - c)$. К тому же, упреждающий аналог (дискретный вариант) характеризуется более щадящим режимом сокращения потребления на величину $r(1 - c)[y(t + 1) - y(t)]$ по сравнению с величиной $r[y(t) - y(t - 1)]$ в модели Самуэльсона—Хикса.

В заключение рассмотрим применение полученных результатов к задаче удвоения ВВП. Сразу уговоримся об условном характере этого применения, поскольку оно сопряжено с выполнением ряда предположений.

Согласно статистическим сборникам [3, 4] ВВП России в 2000 г. составил в ценах 2000 г. 7,31 трлн. руб., а инвестиции — 1,17 трлн. руб. Если принять, что предельная склонность к потреблению $c = 0,8$ и считать, что в базовом 2000 г. экономика находилась в устойчивом состоянии, то из уравнения

$$y_0^E = (C_0 + I_0)/(1 - c) = y_0$$

найдем $C_0 = 0,3$ трлн. руб.

Если считать, что в 2010 г. экономика бы также оказалась в равновесном состоянии, то имело бы место уравнение

$$y^E = (C_0 + I_0)/(1 - c) = 14,62,$$

откуда находим значение $I = 2,62$ трлн. руб. постоянных ежегодных инвестиций, которые обеспечивают при таких условиях удвоение ВВП.

На самом деле инвестиции были гораздо меньше, темп роста замедлился, поэтому стал обсуждаться вопрос об увеличении срока удвоения.

Попробуем ответить на вопрос, что надо сделать для соблюдения первоначального срока. Примем, что в 2001—2004 гг. экономика росла со среднегодовым темпом прироста 7 %, тогда ВВП 2004 г. составил бы 9,58 трлн. руб. Если принять, что темп прироста в 2005 г. 6 %, то ВВП за 2005 г. составит величину $y_1 = 10,15$ трлн. руб.

Как, двигаясь от этой последней базы, достичь в 2010 г. 14,62 трлн. руб.? Если действовать в соответствии с упреждающим аналогом модели Самуэльсона—Хикса при $r = 3$, то с 2006 г. должен начаться ускоренный переходный процесс с новым объемом постоянных инвестиций, превышающих настоящий на ΔI.

Величину ΔI найдем следующим образом. За пять лет переходный процесс, начавшийся в 2006 г., при $r = 3$ практически закончится в 2010 г. достижением желаемого уровня ВВП 14,62 трлн. руб., если ежегодные инвестиции будут равны 2,62 трлн. руб. (см. выше).

Поэтому для удвоения ВВП к концу 2010 г. надо, чтобы ежегодные инвестиции достигли указанного объема, увеличившись по сравнению с 2000 г. в 2,24 раза, а по сравнению с 2005 г. на 31 %, а сам абсолютный прирост ежегодных инвестиций по сравнению с 2005 г. составил бы $\Delta I = 0,62$ трлн. руб.

При таком режиме ускорения переходного процесса ($r = 3$) 60 % ежегодного прироста ВВП будет идти на инвестиции и 40 % на потребление, постоянная часть инвестиций ежегодно в 2006—2010 гг. должна быть равна 2,62 трлн. руб.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Колемаев В. А.* Математическая экономика. 3 изд. — М.: ЮНИТИ, 2005.
2. *Колемаев В. А.* Исследование поведения Самуэльсона—Хикса // Проблемы управления. — 2006. — № 1. — С. 16—19.
3. *Российский* статистический ежегодник, 2002: Стат. сб. — М.: Госкомстат России, 2002. — 690 с.
4. *Национальные* счета России в 1995 — 2002 гг.: Там же. 2003. — 157 с.

☎ *(495) 371-11-65*

Статья представлена к публикации членом редколлегии Р. М. Нижегородцевым. ❑