УДК 519.876.2

МОДЕЛИ ИНФОРМАЦИОННОГО ПРОТИВОБОРСТВА В УПРАВЛЕНИИ ТОЛПОЙ

Д.А. Новиков

В рамках стохастических моделей управления толпой исследованы теоретико-игровые задачи информационного противоборства, когда агентами управляют одновременно два субъекта с несовпадающими интересами относительно числа действующих в равновесии агентов.

Ключевые слова: коллективное поведение, модель порогового принятия решений, управление толпой, информационное противоборство.

ВВЕДЕНИЕ

В работе [1] выделены пять уровней описания и анализа *активных сетевых структур* (примерами которых служат социальная сеть, толпа и др.). На первом (нижнем) уровне сеть рассматривается «в целом» (соответствующее описание, хотя и не является детализированным, обычно необходимо для экспресс-анализа общих свойств объекта). На втором уровне анализируются *структурные свойства* сети. На третьем уровне рассматривается *информационное взаимодействие агентов*. На четвертом уровне ставятся и решаются задачи *информационного управления*. И, наконец, на пятом уровне производится описание и исследование *информационного противоборства* — взаимодействия субъектов, воздействующих на сеть каждый в своих интересах. Модель, используемая на некотором уровне перечисленной иерархии, учитывает результаты предыдущих уровней. Поэтому одно из условий возможности перехода к следующему уровню состоит в наличии достаточно простых (но адекватных моделируемой реальности) и сопряженных моделей предыдущих уровней.

Для задачи описания информационного противоборства, решаемой на самом верхнем (пятом) уровне иерархии, необходимо иметь простые результаты анализа информационного взаимодействия агентов и информационного управления ими. Первый класс моделей, в которых удалось конструктивно «сопрячь» всю цепочку от первого уровня до пятого, составляют модели социальных сетей, описываемых в терминах «задач о консенсусе» (или так называемых «марковских» моделей) — см. обзор и результаты в работе [2], что дало возможность развить соответствующие теоретико-игровые модели информационного противоборства [3].

Вторым удачным примером служит реализуемый в настоящей работе подход к построению теоретико-игровых моделей информационного противоборства, «надстраиваемых» над *пороговыми моделями толпы*. В работе [4] предложена модель толпы, рассматриваемой как множество агентов, демонстрирующих так называемое конформное поведение [5, 6], т. е. осуществляющих бинарный выбор (действовать, быть активными и т. п. или бездействовать) с учетом решений, принимаемых другими агентами. В работе [7] введены в рассмотрение стохастические модели управления толпой, в которых некоторая часть агентов случайным образом «возбуждается» (всегда действует), а некоторая часть «иммунизируется» (никогда не действует). В случае, когда два подобных воздействия осуществляются различными субъектами, обладающими собственными несовпадающими предпочтениями относительно реализующегося «равновесного» состояния толпы, получаем ситуацию *информационного противоборства* этих субъектов, которая далее описывается в теоретико-игровых терминах.

Теоретико-игровые модели информационного противоборства над активными сетевыми структурами имеют приложения в задачах: обеспечения информационной безопасности онлайновых социальных сетей, противодействия деструктивным информационным воздействиям на социальные группы различного масштаба, предупреждения их массовых противоправных действий и др. (см. обзоры и обсуждения в публикациях [2, 4, 8]).

Структура изложения материала настоящей работы: сначала описывается модель толпы (§ 1, основывающийся на результатах работы [4]), затем в § 2, основывающемся на работе [7], описывается информационное противоборство в рамках стохастических моделей управления толпой. П. 2.1—2.4 содержат оригинальные результаты анализа теоретико-игровых моделей информационного противоборства в терминах игр в нормальной форме (для которых характеризуются равновесия Нэша и равновесия в безопасных стратегиях), а также иерархических и рефлексивных игр. Многочисленные примеры содержат аналитические зависимости равновесий от параметров моделей.

1. МОДЕЛЬ ТОЛПЫ

Обозначим через $N = \{1, ..., n\}$ конечное множество агентов. Агент $i \in N$, находящийся в толпе, характеризуется своим *решением* $x_i \in \{0; 1\}$ («бездействие» или «действие») и своим *порогом* $\theta_i \in [0; 1]$, определяющим, будет ли агент действовать при той или иной *обстановке* (векторе x_{-i} решений всех остальных агентов); т. е. агент выбирает свое действие как *наилучший ответ* (Best Response — BR) на обстановку:

$$x_i = BR_i(x_{-i}) = \begin{cases} 1, \text{ если } \dfrac{1}{n-1}\sum\limits_{j \neq i} x_j \geq \theta_i, \\ 0, \text{ если } \dfrac{1}{n-1}\sum\limits_{j \neq i} x_j < \theta_i. \end{cases} \quad (1)$$

Поведение, описываемое выражением (1), называется *пороговым* (см. пионерскую работу [6] и обзоры в работах [5, 9, 10]; отметим, что в статье [5] приведены примеры целевых функций агентов, приводящих к наилучшему ответу (1)).

Рассмотрим *модель динамики коллективного поведения* [4]: в начальный (нулевой) момент времени все агенты бездействуют, далее в каждый из последующих моментов времени агенты одновременно и независимо действуют в соответствии с процедурой (1). Обозначим $Q_0 = \varnothing$,

$$\begin{gathered} Q_1 = \{i \in N \mid \theta_i = 0\}, \\ Q_k = Q_{k-1} \cup \{i \in N \mid \#Q_{k-1} \geq n\,\theta_i\}, \\ k = 2, ..., n-1, \end{gathered} \quad (2)$$

где # обозначает мощность множества, Q_k — множество агентов, действующих на k-м шаге. Очевидно $Q_0 \subseteq Q_1 \subseteq ... \subseteq Q_n \subseteq N$. Обозначим через $\theta = (\theta_1, \theta_2, ..., \theta_n)$ — вектор порогов агентов. Вычислим показатель: $q(\theta) = \min\{k = \overline{0, n-1} \mid Q_{k+1} = Q_k\}$. *Равновесие коллективного поведения* (РКП) определяется как [4]

$$x_i^*(\theta) = \begin{cases} 1, \text{ если } i \in Q_{q(\theta)}, \\ 0, \text{ если } i \in N \backslash Q_{q(\theta)}, \end{cases} \quad i \in N.$$

Величина $x^* = \dfrac{\#Q_{q(\theta)}}{n} = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i \in N} x_i^*(\theta) \in [0; 1]$ характеризует «состояние толпы» — долю действующих в РКП агентов. Показано [4, 11], что РКП является одним из равновесий Нэша игры агентов с наилучшим ответом (1).

Пусть число агентов велико. Обозначим через $F(\cdot)$: $[0; 1] \to [0; 1]$ *функцию распределения порогов* агентов ($F(\cdot)$ — неубывающая функция, определенная на единичном отрезке (множестве возможных значений порогов агентов), в каждой точке непрерывная слева и имеющая предел справа).

Предположим, что известна доля x^k агентов, действующих на k-м шаге, $k = 0, 1, ...$ Для последующих шагов справедливо рекуррентное соотношение, описывающее динамику поведения агентов, принимающих решения в соответствии с выражением (1) [6, 11]:

$$x^{l+1} = F(x^l), \quad (3)$$

где $l = k, k + 1, ...$ — моменты времени.

Положения равновесия дискретной динамической системы (3) определяются начальной точкой x^0 (далее, если не оговорено особо, считается, что $x^0 = 0$) и точками пересечения графика функции $F(\cdot)$ с биссектрисой первого квадранта (в силу свойств функции распределения одним из потенциальных равновесий является единица):

$$F(x) = x. \quad (4)$$

Устойчивыми могут быть точки равновесия системы (3) (РКП является одной из точек равновесия), в которых график функции $F(\cdot)$ пересекает биссектрису, приближаясь к ней «слева-сверху». Обозначим через $y = \inf\{x : x \in (0, 1], F(x) = x\}$ наименьший отличный от нуля корень уравнения (4). В соответствии с выражениями (2) и (3) РКП будет точка [3]:

$$x^* = \begin{cases} y, \text{ если } \forall z \in [0, y]\, F(z) \geq z, \\ 0, \text{ иначе.} \end{cases} \quad (5)$$

2. МОДЕЛЬ ИНФОРМАЦИОННОГО ПРОТИВОБОРСТВА

Рассмотрим толпу как объект управления, осуществляемого двумя субъектами — *центрами*. Так как поведение динамической системы (3), описывающей изменение во времени доли действующих агентов, определяется функцией распределения порогов $F(\cdot)$, то будем анализировать управленческие воздействия, приводящие к изменению этой функции распределения.

Отметим, что в работе [4] решалась задача определения множества/доли первоначально возбуждаемых агентов или/и функции распределения их порогов, приводящих к требуемому равновесию. В рассматриваемых в настоящей работе моделях агенты возбуждаются «самостоятельно» — см. выражение (2).

Рассмотрим две предложенные в работе [7] модели воздействия со стороны центров на функцию распределения порогов агентов.

Модель I. Пусть в результате управленческого воздействия порог каждого агента независимо от других агентов может стать равным нулю с одинаковой для всех агентов вероятностью $\alpha \in [0; 1]$. Так как в соответствии с выражением (1) агенты, имеющие нулевые пороги, выбирают единичные действия независимо от действий других агентов, то параметр α может интерпретироваться как доля первоначально *возбуждаемых* агентов [7].

Пусть в результате управленческого воздействия порог каждого агента независимо от других агентов может стать равным единице с одинаковой для всех агентов вероятностью $\beta \in [0; 1]$. Так как, в соответствии с выражением (1), агенты, имеющие единичные пороги, действовать не будут (точнее — будут, если действуют все остальные агенты), то параметр β может интерпретироваться как доля первоначально «*иммунизируемых*» агентов [7].

В работе [7] рассмотрен случай информационного противоборства, когда имеются два управляющих субъекта — *центра* и доля $\alpha \in [0; 1]$ агентов «возбуждается» первым центром, а доля $\beta \in [0; 1]$ агентов «иммунизируется» (или каждый агент независимо с соответствующей вероятностью может быть возбужден или/и иммунизирован) вторым центром. Для определенности (хотя возможны и другие варианты, приводящие к другим результатам) предположим, что если некоторый агент возбуждается и иммунизируется одновременно, то его порог не меняется. Показано [7], что, в рамках предположения о «бесконечном» числе агентов, функция распределения порогов агентов имеет вид:

$$F_{\alpha,\beta}(x) = \\ = \begin{cases} \alpha(1-\beta) + (1-\alpha-\beta+2\alpha\beta)F(x), x \in [0;\ 1), \\ 1, x = 1. \end{cases} \quad (6)$$

Обозначим через $x^*(\alpha, \beta)$ РКП (5), соответствующее функции распределения (6), через $y_{\alpha,\beta} = \inf\{x : x \in (0, 1], F_{\alpha,\beta}(x) = x\}$ — наименьший отличный от нуля корень уравнения $F_{\alpha,\beta}(x) = x$. Тогда

$$x^*(\alpha, \beta) = \begin{cases} y_{\alpha,\beta}, \text{если } \forall z \in [0, y_{\alpha,\beta}]\, F_{\alpha,\beta}(z) \ge z, \\ 0, \text{иначе}. \end{cases} \quad (7)$$

Из выражений (4) и (6) можно найти пары (α, β), которые приводят к реализации заданного РКП (7).

Обозначим через

$$\Omega(x) = \{(\alpha, \beta) \in [0; 1]^2 \mid x^*(\alpha, \beta) = x\}$$

множество комбинаций управлений, *реализующих* заданное значение $x \in [0; 1]$ как РКП.

Обозначим через $W = \bigcup\limits_{(\alpha,\beta) \in [0;1]^2} x^*(\alpha, \beta)$ *множество достижимости*. Для проводимого далее теоретико-игрового анализа существенны полученные в работе [7] результаты о том, что $x^*(\alpha, \beta)$ монотонно (нестрого) возрастает по α и монотонно (нестрого) убывает по β; а для строгой монотонности достаточно выполнения условия

$$F(0) > 0, \quad F(1-0) < 1. \quad (8)$$

В работе [7] также получены достаточные условия (сформулированные в терминах свойств функции распределения порогов) реализуемости заданной точки $x \in [0; 1]$ как РКП при некоторых управлениях $(\alpha, \beta) \in [0; 1]^2$.

Модель II. Рассмотрим ситуацию информационного противоборства, когда первый центр добавляет к исходному множеству N агентов k «провокаторов» с нулевыми порогами, а второй центр добавляет l «иммунизаторов» с единичными порогами. Считая, что число агентов n велико, будем пользоваться непрерывным приближением: $\delta = k/n$, $\gamma = l/n$, считая $\delta, \gamma \in \mathbb{R}^1_+$, в рамках которого, как показано в работе [7], функция распределения порогов агентов примет вид:

$$F_{\delta,\gamma}(x) = \begin{cases} \dfrac{\delta + F(x)}{1 + \delta + \gamma}, x \in [0;\ 1), \\ 1, x = 1. \end{cases} \quad (9)$$

Обозначим через $x^*(\delta, \gamma)$ РКП (5), соответствующее функции распределения (9), через $y_{\delta,\gamma} = \inf\{x : x \in (0, 1],\ F_{\delta,\gamma}(x) = x\}$ — наименьший отличный от нуля корень уравнения $F_{\delta,\gamma}(x) = x$. Тогда

$$x^*(\delta, \gamma) = \begin{cases} y_{\delta,\gamma}, \text{ если } \forall z \in [0, y_{\delta,\gamma}]\, F_{\delta,\gamma}(z) \ge z, \\ 0, \text{ иначе.} \end{cases} \qquad (10)$$

Доказано [7], что в модели II $W = (0; 1]$, а если выполнено $F(0) = 0$, то множество $W = [0; 1]$. Обозначим через

$$\Lambda(x) = \{(\delta, \gamma) \in \mathbb{R}_+^2 \mid x^*(\delta, \gamma) = x\}$$

множество комбинаций управлений, реализующих заданное значение $x \in [0; 1]$ как РКП.

Для исследования теоретико-игровых моделей взаимодействия центров нам потребуется результат, который доказывается полностью по аналогии с утверждениями 3 и 4 в работе [7].

Теорема 1. *В модели* II *РКП* $x^*(\delta, \gamma)$:

1) *монотонно (нестрого) возрастает по* δ; *а для строгой монотонности достаточно выполнения условия:* $F(1 - 0) < 1$ *или* $\gamma > 0$;

2) *монотонно (нестрого) убывает по* γ; *а для строгой монотонности достаточно выполнения условия:* $F(0) > 0$ *или* $\delta > 0$.

Пример 1. В качестве примера функции распределения порогов агентов рассмотрим равномерное распределение $F(x) = x$, для которого $x^*(\delta, \gamma) = \delta/(\delta + \gamma)$, $\Lambda(x) = \{(\delta, \gamma) \in \mathbb{R}_+^2 \mid \gamma/\delta = (1/x - 1)\}$. ♦

Сделав маленькое отступление, отметим, что в социально-экономических и организационных системах в случае, когда существует несколько субъектов, заинтересованных в тех или иных состояниях управляемой системы (например, сети взаимодействующих агентов) и имеющих возможность оказывать на нее управляющие воздействия (так называемая *система с распределенным контролем* [12—14]), возникает, как и в рассматриваемом нами случае, взаимодействие между этими субъектами, которое в случае информационных воздействий, оказываемых ими на объект управления, называется *информационным противоборством* (см. обзоры в работах [2, 15]).

Такие ситуации обычно описываются игрой в нормальной форме между центрами, причем выбираемые центрами стратегии, в свою очередь определяют параметры игры между агентами [14]. Примерами служат модели информационного противоборства в социальных сетях [2, 3]. Как отмечается [16], возможны и более сложные ситуации, когда управленческие воздействия «несимметричны» — например, в ситуации «нападение/защита» один центр воздействует на начальные состояния агентов, а другой (одновременно с первым или уже зная его выбор) изменяет структуру связей между ними или/и их пороги. Такие ситуации могут быть описаны в рамках моделей иерархических игр.

Далее рассматривается ряд теоретико-игровых моделей взаимодействия центров, результаты информационных воздействий которых на толпу определяются выражениями (6) и (7) в рамках модели I или выражениями (9) и (10) в рамках модели II.

2.1. Игра центров в нормальной форме

Модель I. Предположим, что имеются два центра, которые осуществляют информационное воздействие на толпу, разыгрывая *игру в нормальной форме*, т. е. выбирая свои стратегии ($\alpha \in [0; 1]$ и $\beta \in [0; 1]$ соответственно) однократно, одновременно и независимо. Пусть *целевые функции* первого и второго центров имеют соответственно вид:

$$f_\alpha(\alpha, \beta) = H_\alpha(x^*(\alpha, \beta)) - c_\alpha(\alpha), \qquad (11)$$

$$f_\beta(\alpha, \beta) = H_\beta(x^*(\alpha, \beta)) - c_\beta(\beta), \qquad (12)$$

причем *выигрыш* первого центра $H_\alpha(\cdot)$ — возрастающая функция (он заинтересован в максимизации числа возбужденных агентов), а выигрыш второго центра $H_\beta(\cdot)$ — убывающая функция (он заинтересован в минимизации числа возбужденных агентов), а обе функции *затрат* $c_\alpha(\cdot)$ и $c_\beta(\cdot)$ — строго возрастающие и $c_\alpha(0) = c_\beta(0) = 0$.

Коль скоро описана игра в нормальной форме, возникает набор типовых для теории игр вопросов [17, 18]: каково *равновесие Нэша* (α^*, β^*) игры центров, в каких ситуациях оно доминирует с точки зрения центров ситуацию *статус-кво* — РКП в отсутствие управления (т. е. когда выполнено $f_\alpha(\alpha^*, \beta^*) \ge f_\alpha(0, 0)$, $f_\beta(\alpha^*, \beta^*) \ge f_\beta(0, 0)$), каково множество Парето-эффективных ситуаций, когда существует *равновесие в доминантных стратегиях* (РДС) и т. п.

Обозначим через $f(\alpha, \beta) = f_\alpha(\alpha, \beta) + f_\beta(\alpha, \beta)$ *утилитарную функцию коллективной полезности* (ФКП) [19]. Пару стратегий центров $(\hat{\alpha}, \hat{\beta}) = \arg \max\limits_{(\alpha,\beta) \in [0;1]^2} f(\alpha, \beta)$ назовем *утилитарным решением*.

Роль полученных в работе [7] результатов и результата теоремы 1 для теоретико-игрового анализа заключается в следующем. Целевые функции центров (11) и (12) зависят как от их стратегий (α и β или δ и γ), так и от РКП, зависящего, в свою очередь, от этих стратегий. Свойства монотонной зависимости РКП от стратегий центров (непрерывность этой зависимости, если требуется, может быть проверена в каждом конкретном случае), а также реализуемость всего единичного отрезка в качестве РКП при выборе центрами соответствующих стратегий, дают возможность «транслировать» свойства функций выигрыша и затрат на зависимость этих параметров непосредственно от стратегий центров. Так, например, если $H_\delta(x^*(\delta, \gamma))$ — возрастающая функция x^*, то в рамках условий теоремы 1 выигрыш первого центра является возрастающей функцией его стратегии, и т. д.

Простейшим является случай *игры с противоположными интересами*, в которой первый центр заинтересован в возбуждении максимального числа агентов, а второй — наоборот. Без учета затрат на управление (считая $c_\alpha(\cdot) \equiv 0$, $c_\beta(\cdot) \equiv 0$) из выражений (11) и (12) получим:

$$\hat{f}_\alpha(\alpha, \beta) = x^*(\alpha, \beta), \quad \hat{f}_\beta(\alpha, \beta) = 1 - x^*(\alpha, \beta). \quad (13)$$

При этом, очевидно, $f(\alpha, \beta) \equiv 1$. Из неубывания $x^*(\alpha, \beta)$ по α и невозрастания по β следует справедливость следующего утверждения 1, которое (как и его «аналоги» для модели II — см. утверждения 3 и 4 далее), с одной стороны, в определенному смысле, тривиально, так как является следствием монотонности целевых функций агентов по их действиям, а, с другой стороны, позволяет в соответствующих вырожденных случаях обосновывать существование РДС и находить его.

Утверждение 1. *В модели I в игре противоположными интересами без учета затрат центров на управление существует РДС их игры:* $\alpha^{РДС} = 1$, $\beta^{РДС} = 1$. ♦

Интересно отметить, что в этом равновесии функция распределения порогов агентов совпадает с исходной функцией распределения, т. е. $F_{1,1}(x) \equiv F(x)$, следовательно, не изменяется и РКП, т. е. РДС «совпадает» с ситуацией статус-кво.

Пример 2. Пусть $F(x) = x$, тогда

$$x^{I*}(\alpha, \beta) = \frac{\alpha(1-\beta)}{\alpha + \beta - 2\alpha\beta}. \quad (14)$$

Вычислим

$$\frac{\partial x^{I*}(\alpha, \beta)}{\partial \alpha} = \frac{\beta(1-\beta)}{(\alpha + \beta - 2\alpha\beta)^2},$$

$$\frac{\partial x^{I*}(\alpha, \beta)}{\partial \beta} = -\frac{\alpha(1-\alpha)}{(\alpha + \beta - 2\alpha\beta)^2},$$

откуда следует, что $x^{I*}(\alpha, \beta)$ возрастает по первому аргументу и убывает по второму при любых допустимых значениях соответствующего другого аргумента. Поэтому без учета затрат центров на управление РДС игры центров с целевыми функциями (13) будет выбор ими единичных стратегий: $\alpha^{РДС} = 1$, $\beta^{РДС} = 1$. Естественно, эта точка будет и равновесием Нэша (РН) игры центров. В настоящем примере $W = [0; 1]$. Отметим, что в РДС реализуется то же состояние толпы, что и в отсутствие управления. ♦

Рассмотрим теперь случай, когда затраты центров отличны от нуля.

Утверждение 2. *Если в модели I* $x^*(\alpha, \beta)$ *— непрерывная функция, выполнено условие* (8), $W = [0; 1]$, *функции выигрыша центров — ограниченные, линейные или вогнутые по их стратегиям, а функции затрат — выпуклые, то существует равновесие Нэша игры центров.* ♦

Справедливость тривиального утверждения 2 (и его «аналога» для модели II — утверждения 5) непосредственно следует из достаточных условий [17, 18] существования равновесия Нэша в непрерывных играх.

В следующем примере существует единственное РН.

Пример 3. Пусть $F(x) = x$, $H_\alpha(x) = x$, $H_\beta(x) = 1 - x$, $c_\alpha(\alpha) = -\ln(1 - \alpha)$, $c_\beta(\beta) = -\lambda \ln(1 - \beta)$. Из условий первого порядка получаем: $\beta = (1/\lambda)\, \alpha$. При $\lambda = 1$ находим: $\alpha^* = 1/4$, $\beta^* = 1/4$. При этом

$$x^{I*}(\alpha^*, \beta^*) = 1/2, f_\alpha(\alpha^*, \beta^*) = f_\beta(\alpha^*, \beta^*) \approx -0{,}2.$$

Отметим, что в равновесии оба центра имеют меньшие значения целевых функций, чем в *точке «статус-кво»* (0; 0) (так как $f_\alpha(0, 0) = 1$, $f_\beta(0, 0) = 0$). Утилитарным решением в этом случае является также вектор нулевых стратегий. ♦

Модель II. Пусть целевые функции первого и второго центров имеют соответственно вид (11) и (12) с точностью до замены α на δ и β на γ.

Утверждение 3. *В модели II в игре с противоположными интересами без учета затрат центров на управление не существует конечного РДС или РН их игры.* ♦

Справедливость утверждения 3 следует из неограниченности множеств допустимых стратегий центров, а также монотонности $x^*(\delta, \gamma)$ по обеим переменным (см. теорему 1). Из этих же свойств следует справедливость следующего утверждения.

Утверждение 4. Если в модели II множества допустимых стратегий центров ограничены: $\delta \le \delta_{max}$, $\gamma \le \gamma_{max}$, то в игре с противоположными интересами без учета затрат центров на управление существует РДС их игры: $\delta^{РДС} = \delta_{max}$, $\gamma^{РДС} = \gamma_{max}$.

Рассмотрим случай, когда затраты центров отличны от нуля.

Утверждение 5. *Если в модели II* $x^*(\delta, \gamma)$ *— непрерывная функция, выполнены условия теоремы 1,* *функции выигрыша центров ограниченные, линейные или вогнутые по их стратегиям, а функции затрат — выпуклые, имеющие в нуле нулевые производные и стремящиеся к бесконечности при стремлении аргумента к бесконечности, то существует конечное равновесие Нэша игры центров.* ♦

Справедливость утверждения 5 следует из того, что в рамках его условий целевые функции центров вогнуты по их стратегиям и принимают неотрицательные значения на ограниченном множестве значений аргументов, т. е. можно воспользоваться достаточными условиями [17, 17] существования равновесия Нэша в непрерывных играх.

Пример 4. Пусть $F(x) = x$, $H_\delta(x) = x$, $H_\gamma(x) = 1 - x$, $c_\delta(\delta) = \delta^2$, $c_\gamma(\gamma) = \lambda^2\gamma^2$. В примере 1 найдено РКП $x^*(\delta, \gamma) = \delta/(\delta + \gamma)$. Получаем следующие выражения для целевых функций центров:

$$f_\delta(\delta, \gamma) = \delta/(\delta + \gamma) - \delta^2, \qquad (15)$$

$$f_\gamma(\delta, \gamma) = 1 - \delta/(\delta + \gamma) - \lambda^2\gamma^2. \qquad (16)$$

Убедившись в вогнутости целевых функций (15) и (16) соответственно по δ и γ, дифференцируем их, приравниваем производные нулю и находим РН:

$$\delta^* = \sqrt{\frac{\lambda}{2}}\,\frac{1}{1+\lambda}, \quad \gamma^* = \frac{1}{\sqrt{2\lambda}}\,\frac{1}{1+\lambda}.$$

При этом РКП $x^*(\delta^*, \gamma^*) = \dfrac{\lambda}{1+\lambda}$, а значения целевых функций в РН: $f_\delta(\delta^*, \gamma^*) = \dfrac{\lambda(1+2\lambda)}{2(1+\lambda)^2}$, $f_\gamma(\delta^*, \gamma^*) = \dfrac{\lambda+2}{2(1+\lambda)^2}$.

Утилитарная ФКП $f(\delta, \gamma) = f_\delta(\delta, \gamma) + f_\gamma(\delta, \gamma)$ достигает максимума (принимает единичное значение) на векторе нулевых стратегий. Значение утилитарной ФКП в РН $f(\delta^*, \gamma^*) = 1 - \dfrac{\lambda}{(1+\lambda)^2}$, т. е. величина $\dfrac{\lambda}{(1+\lambda)^2}$ характеризует, насколько РН «хуже» в смысле утилитарной ФКП, чем оптимум последней. ♦

2.2. Пороговые функции выигрыша центров

Для содержательных интерпретаций важен случай, когда *функции выигрыша* центров *пороговые*, т. е. имеют вид:

$$H_{\alpha(\beta)}(x) = \begin{cases} H^+_{\alpha(\beta)}, \text{ если } x \ge (\le) \theta_\alpha(\theta_\beta), \\ H^-_{\alpha(\beta)}, \text{ иначе}, \end{cases} \qquad (17)$$

где $H^+_{\alpha(\beta)} > H^-_{\alpha(\beta)}$, т. е. первый центр получает больший выигрыш тогда, когда доля действующих агентов не меньше порога $\theta_\alpha \in [0; 1]$, а второй центр — при условии, что доля действующих агентов не превышает порога $\theta_\beta \in [0; 1]$. Обозначим через $\hat{x}$ РКП в отсутствие воздействий центров, т. е. $\hat{x} = x^*(0, 0)$. Введем следующие предположения.

Предположение А.1. Множество достижимости W — единичный отрезок, $x^*(\alpha, \beta)$ — строго монотонная непрерывная функция своих переменных (соответствующие достаточные условия приведены выше и/или могут быть проверены в каждом конкретном случае), а функции затрат центров строго монотонны.

Предположение А.2. Первый центр при нулевой стратегии второго может реализовать самостоятельно любое РКП из $[\hat{x}; 1]$; а второй центр при нулевой стратегии первого может реализовать самостоятельно любое РКП из $[0; \hat{x}]$. ♦

Из структуры целевых функций центров и предположений А.1 и А.2 следует, что для первого (второго) центра реализовывать РКП, превышающие порог θ_α (строго меньшие порога θ_β), не выгодно.

Модель I. Запишем определение равновесия Нэша (α^*, β^*):

$$\begin{cases} \forall\alpha \in [0; 1] \\ H_\alpha(x^*(\alpha^*, \beta^*)) - c_\alpha(\alpha^*) \ge H_\alpha(x^*(\alpha^*, \beta^*)) - c_\alpha(\alpha), \\ \forall\beta \in [0; 1] \\ H_\beta(x^*(\alpha^*, \beta^*)) - c_\beta(\beta^*) \ge H_\beta(x^*(\alpha^*, \beta^*)) - c_\beta(\beta). \end{cases}$$

Начнем анализ с частного случая $\theta_\beta = \theta_\alpha = \theta$.

Обозначим через $\alpha(\theta) = \min\{\alpha \in [0; 1] \mid x^*(\alpha, 0) = \theta\}$, $\beta(\theta) = \min\{\beta \in [0; 1] \mid x^*(0, \beta) = \theta\}$.

Определим множество

$$\Omega_{\alpha,\beta}(\theta) = \{(\alpha, \beta) \in [0; 1]^2 \mid x^*(\alpha, \beta) = \theta,$$
$$c_\alpha(\alpha) \le H^+_\alpha - H^-_\alpha,\ c_\beta(\beta) \le H^+_\beta - H^-_\beta\}, \qquad (18)$$

т. е. множество пар стратегий центров, приводящих к таким РКП θ, что каждый из центров при этом имеет значение целевой функции не меньшее, чем при выборе стратегии, изменяющей его выигрыш (17). Множество (18) по аналогии с работами [13, 14], назовем *множеством компромисса.*

Из определений РН и множества компромисса следует, что, если последнее не пусто, то реализация РКП θ в смысле утилитарной ФКП не менее выгодна для агентов, чем сохранение статус-кво $\hat{x}$. Более того, легко видеть, что центрам не выгодно реализовывать никакие РКП, кроме, возможно, $\hat{x}$ или θ.

Теорема 2. *Если $\theta_\beta = \theta_\alpha = \theta$ и выполнено предположение А.1, то РН может быть только двух типов:*

1) (0; 0) *является РН, если*

$$\hat{x} \le \theta \text{ и } c_\alpha(\alpha(\theta)) \ge H_\alpha^+ - H_\alpha^- \qquad (19)$$

или

$$\hat{x} \ge \theta \text{ и } c_\beta(\beta(\theta)) \ge H_\beta^+ - H_\beta^-; \qquad (20)$$

2) *множество РН включает в себя множество* $\Omega_{\alpha,\beta}(\theta)$, *если оно не пусто.*

Если дополнительно выполнено предположение А.2, *то*

$(\alpha(\theta); 0)$ *является РН, если*

$$\hat{x} \le \theta \text{ и } c_\alpha(\alpha(\theta)) \le H_\alpha^+ - H_\alpha^-; \qquad (21)$$

$(0; \beta(\theta))$ *является РН, если*

$$\hat{x} \ge \theta \text{ и } c_\beta(\beta(\theta)) \le H_\beta^+ - H_\beta^-. \blacklozenge \qquad (22)$$

Исследуем теперь связь множества компромисса с утилитарным решением. Обозначим через

$$C(\theta) = \min_{(\alpha,\beta)\in\Omega_{\alpha,\beta}(\theta)} [c_\alpha(\alpha) + c_\beta(\beta)] \qquad (23)$$

минимальные суммарные затраты центров по реализации РКП θ. Утилитарное решение в рассматриваемом случае удовлетворяет условиям:

— если $\hat{x} \le \theta$, то $f(\hat{\alpha}, \hat{\beta}) = \max\{H_\alpha^- + H_\beta^+;\ H_\alpha^+ + H_\beta^+ - C(\theta)\}$;

— если $\hat{x} \ge \theta$, то $f(\hat{\alpha}; \hat{\beta}) = \max\{H_\alpha^+ + H_\beta^-;\ H_\alpha^+ + H_\beta^+ - C(\theta)\}$.

Соответственно, если при $\hat{x} \le \theta$ $C(\theta) \le H_\alpha^+ - H_\alpha^-$, а при $\hat{x} \ge \theta$ $C(\theta) \le H_\beta^+ - H_\beta^-$, то множество компромисса включает в себя утилитарное решение.

Как показывает пример 5, предположение А.2 существенно для структуры РН.

Пример 5. Пусть $F(x) = x$, $\theta = 1/2$, $H_\alpha^- = H_\beta^- = 0$, $H_\alpha^+ = H_\beta^+ = 1$, $c_\alpha(\alpha) = -\ln(1-\alpha)$, $c_\beta(\beta) = -\ln(1-\beta)$. Легко убедиться (см. также пример 3), что вектор нулевых стратегий не является РН. Из результатов примера 2 и выражений (18)—(23) получаем:

$$\Omega_{\alpha,\beta}(1/2) = \{(\alpha, \beta) \in [0; 1]^2 \mid \frac{\alpha(1-\beta)}{\alpha+\beta-2\alpha\beta} = 1/2,$$
$$\ln(1-\alpha) \ge -1,\ \ln(1-\beta) \ge -1\},$$

т. е. $\Omega_{\alpha,\beta}(1/2) = \{(\alpha, \beta) \in [0; 1]^2 \mid \alpha = \beta,\ 0 < \alpha, \beta \le 1 - 1/e\}$. В рассматриваемом примере ε-оптимальным утилитарным решением будет вектор стратегий центров (ε, ε), где $\varepsilon \in (0; 1 - 1/e]$. ♦

Перейдем теперь к общему случаю, когда пороги центров, фигурирующие в их функциях выигрыша (17), различны. Рассмотрим наиболее интересное для практических приложений (ситуация информационного противоборства) соотношение порогов центров:

$$\theta_\beta < \hat{x} < \theta_\alpha. \qquad (24)$$

Определим следующие функции (если множество, по которому вычисляется минимум, пусто, то будем считать, что значение функции равно +∞):

$$C_\alpha(x, \beta) = \min_{\{\alpha\in[0;1] \mid x^*(\alpha,\beta)=x\}} c_\alpha(\alpha),$$

$$C_\beta(x, \alpha) = \min_{\{\beta\in[0;1] \mid x^*(\alpha,\beta)=x\}} c_\beta(\beta).$$

Из неубывания функций затрат и структуры функций выигрыша (17) следует, что реализация РКП из интервала $(\theta_\beta; \theta_\alpha)$ центрам не выгодна по сравнению с сохранением статус-кво $\hat{x}$. Введем предположение, являющееся ослаблением предположения А.2.

Предположение А.3. Первый центр при нулевой стратегии второго может реализовать самостоятельно РКП θ_α; а второй центр при нулевой стратегии первого может реализовать самостоятельно РКП θ_β. ♦

Из определения равновесия Нэша и свойств целевых функций центров следует

Теорема 3. *Если выполнено условие* (24) *и предположения* А.1 и А.3, *то РН игры центров характеризуются следующим образом:*

— (0; 0) *является РН, если*

$$\begin{cases} H_\alpha^+ - c_\alpha(\alpha(\theta_\alpha)) \le H_\alpha^-, \\ H_\beta^+ - c_\beta(\beta(\theta_\beta)) \le H_\beta^-; \end{cases} \qquad (25)$$

— $(\alpha(\theta_\alpha); 0)$ *является РН, если*

$$\begin{cases} H_\alpha^+ - c_\alpha(\alpha(\theta_\alpha)) \ge H_\alpha^-, \\ H_\beta^- \ge H_\beta^+ - C_\beta(\theta_\beta, \alpha(\theta_\alpha)); \end{cases} \qquad (26)$$

— $(0; \beta(\theta_\beta))$ *является РН, если*

$$\begin{cases} H_\beta^+ - c_\beta(\beta(\theta_\beta)) \ge H_\beta^-, \\ H_\alpha^- \ge H_\alpha^+ - C_\alpha(\theta_\alpha, \beta(\theta_\beta)). \end{cases} \blacklozenge \qquad (27)$$

Модель II для случая пороговых функций выигрыша центров строится полностью аналогично модели I с точностью до замены α на δ, и β — на γ. Проиллюстрируем теорему 3 примером для модели II.

Пример 6. Пусть $F(x) = 1/3 + 2x^2/3$, $\theta_\gamma = 0{,}4$, $\theta_\delta = 0{,}6$, $H_\delta^- = H_\gamma^- = 0$, $H_\delta^+ = H_\gamma^+ = 1$, $c_\delta(\delta) = \delta^2$, $c_\gamma(\gamma) = \lambda^2\gamma^2$.

Найдем: $\hat{x} = 1/2$, $\gamma(\theta_\gamma) \approx 0{,}1$, $\delta(\theta_\delta) \approx 0{,}07$.

Пусть $\lambda = 2$. Тогда ни одно из условий (25)—(27) не выполнено, следовательно, РН не существует.

Пусть $\lambda = 20$. Условия (25) и (27) не выполнены, выполнено условие (26). Следовательно, (0,07; 0) — РН. ♦

Пример 7. Пусть в условиях примера 6 $\theta_\gamma = \theta_\delta = \theta = 0{,}4$, $\lambda = 20$. Найдем

$\Omega_{\delta,\gamma}(0{,}4) = \{\delta \in [0; 1], \gamma \in [0; 0{,}05] \mid \gamma = 0{,}1 + 1{,}5\,\delta\} = \varnothing$.

Условие (20) выполнено, т. е. (0; 0) — РН. ♦

В случае отсутствия РН перспективным представляется поиск и анализ равновесий в безопасных стратегиях (РБС). Первоначально РБС было предложено в работе [20] и затем сформулировано в новой, более простой, форме в работах [21, 22]. Эта концепция равновесия основана на понятии угрозы. Для игрока существует *угроза*, если некоторый другой игрок может односторонним отклонением увеличить свой выигрыш и при этом одновременно уменьшить выигрыш первого игрока. *Равновесие в безопасных стратегиях* определяется как игровой профиль, удовлетворяющий условиям:

— ни для одного из игроков не существует угроз;

— ни один игрок не может односторонним отклонением увеличить свой выигрыш, не создав при этом для себя угрозы потерять больше, чем он выигрывает.

Пусть выполнены предположения А.1 и А.2. Определим функции (если множество, по которому вычисляется минимум, пусто, то будем считать, что значение функции равно $+\infty$):

$$C_\delta(x, \gamma) = \min_{\{\delta \ge 0 \mid x^*(\delta,\gamma) = x\}} c_\delta(\delta),$$

$$C_\gamma(x, \delta) = \min_{\{\gamma \ge 0 \mid x^*(\delta,\gamma) = x\}} c_\gamma(\gamma).$$

Из определения РБС (см. выше и работ [20, 21]) и свойств целевых функций центров следует

Теорема 4. *Пусть выполнены предположения* А.1 и А.2. *Тогда в модели II:*

1) *точка равновесия* ($\delta_{РБС}$; 0) *является РБС, если существует минимальное неотрицательное значение* $\delta_{РБС}$, *для которого*

$$\begin{cases} x^*(\delta_{РБС};\ 0) \ge \theta_\delta, \\ H_\delta^+ - c_\delta(\delta_{РБС}) \ge H_\delta^-, \\ H_\gamma^+ - C_\gamma(\theta_\gamma, \delta_{РБК}) \le H_\gamma^-; \end{cases}$$

2) *точка равновесия* (0; $\gamma_{РБС}$) *является РБС, если существует минимальное неотрицательное значение* $\gamma_{РБС}$, *для которого*

$$\begin{cases} x^*(0;\ \gamma_{РБС}) \le \theta_\gamma, \\ H_\gamma^+ - c_\gamma(\gamma_{РБС}) \ge H_\gamma^-, \\ H_\delta^+ - C_\delta(\theta_\delta, \delta_{РБК}) \le H_\delta^-. \end{cases}$$

Пример 8. Пусть в условиях примера 6 $\lambda = 2$, т. е. РН при таких значениях параметров не существует. Из первой системы неравенств теоремы 4 находим: $\delta_{РБС} \approx 0{,}816$ реализует единичное РКП. Вторая система неравенств теоремы 4 не имеет решения, т. е. найденное РБС единственно. ♦

В заключение п. 2.2 отметим, что выбор таких параметров, как пороги в функциях выигрыша центров и сами размеры выигрышей, может рассматриваться в качестве *метауправления*. Действительно, зная зависимость равновесия игры центров от этих параметров, можно рассматривать трехуровневые модели (метауровень — центры — агенты) — ставить и решать задачи выбора таких допустимых значений параметров игры центров, которые приводят в ней к равновесию, реализующему требуемое РКП агентов. Приведем пример.

Пример 9. Рассмотрим в условиях примера 6 при $\lambda = 20$ задачу выбора таких значений H_δ^+ и H_γ^+, при которых вектор нулевых стратегий центров является РН их игры. В соответствии с условием (25) для этого достаточно уменьшить значение H_δ^+ до $4{,}9 \cdot 10^{-4}$.

Рассмотрим теперь в условиях примера 6 при $\lambda = 20$ задачу выбора таких значений H_δ^+ и H_γ^+, при которых в равновесии реализуется РКП $\theta_\gamma = 0{,}4$. Для этого в соответствии с выражением (27) достаточно выбрать $H_\delta^+ \le 0{,}029$ и $H_\gamma^+ \ge 4$. ♦

Завершив рассмотрение игр в нормальной форме, перейдем к их «расширениям» — иерархическим (п. 2.3) и рефлексивным (п. 2.4) играм двух центров. Следует признать, что п. 2.3 и п. 2.4 носят характер лишь иллюстрации возможности описания и изучения соответствующих классов теоретико-игровых моделей информационного противоборства. Их подробное и систематическое исследование является перспективной задачей будущих исследований.

2.3. Иерархическая игра центров

В задачах управления толпой возможны ситуации, когда игроки (центры) принимают решения последовательно. При этом существенна информированность каждого из игроков на момент принятия им решения, а также множества их допустимых стратегий (см. классификацию и результаты исследования *иерархических игр* в хрестоматийной монографии [17]). Над каждой игрой в нормальной форме может быть «надстроена» та или иная иерархическая игра [14—16]. Более того, следует различать два варианта:

1) один из центров выбирает свою стратегию, затем другой центр, зная выбор оппонента, выбирает свою стратегию, после чего осуществляется информационное воздействие на агентов. В результате функция распределения порогов принимает вид (6) (или (9)). Именно этот случай иллюстрируется ниже;

2) один из центров выбирает свою стратегию и осуществляет свое информационное воздействие на агентов, затем другой центр, зная выбор оппонента, выбирает свою стратегию и осуществляет свое информационное воздействие на агентов.

В модели I оба варианта эквивалентны (приводят к одной и той же функции распределения порогов (6)), а в модели II различаются.

В играх типа Γ_1 [9] (в том числе в *играх Штакельберга* — см. [17, 18]) множества допустимых стратегий центров такие же, что и в исходной игре в нормальной форме, а центр, делающий ход вторым, знает выбор центра, сделавшего первый ход. Соответствующие ситуации могут интерпретироваться как управление и *контруправление* (например, при заданном значении α выбрать β, или наоборот). Если исходная игра в нормальной форме допускает простой анализ и исследование зависимости равновесий от параметров модели, то и с изучением соответствующей игры типа Γ_1 проблем, как правило, не возникает.

Рассмотрим ряд примеров иерархических игр для первого варианта модели I для случая пороговых функций выигрыша центров.

Пример 10. Пусть в условиях примера 5 $\theta = 1/3$, сначала первым центром выбирается параметр α, а затем вторым центром (при известном выборе первого) — параметр β (так называемая игра $\Gamma_1(\alpha, \beta)$). Из выражений (14) и (20) получаем:

$$\Omega_{\alpha,\beta}(\theta) = \{(\alpha, \beta) \in [0; 1]^2 \mid \beta = \frac{\alpha(1-\theta)}{\alpha+\theta-2\alpha\theta},$$
$$0 < \alpha, \beta \le 1 - 1/e\}.$$

Если первый центр выбирает стратегию α^S, то наилучший ответ второго центра

$$\beta^S(\alpha^S) = \arg\max_{\beta\in[0;1]} [H_\beta(x^*(\alpha^{S*}(\alpha, \beta)) - c_\beta(\beta)] =$$
$$= \arg\max_{\beta\in[0;1]} \left[\begin{cases}1, \text{если } x^*(\alpha^S, \beta) \le \theta, \\ 0, \text{иначе,}\end{cases} + \ln(1-\beta)\right] = \frac{2\alpha}{\alpha+1},$$

т. е. второму центру выгодно выбрать минимальное β, которое при данном α^S приводит к РКП θ. Получаем, что целевая функция первого центра может быть записана в виде: $H_\alpha(x^*(\alpha^S, \beta^S(\alpha^S))) - c_\alpha(\alpha^S) = 1 - c_\alpha(\alpha^S)$, где $0 < \alpha \le 1 - 1/e$. Таким образом, ε-оптимальным (где ε — сколь угодно малая строго положительная величина) решением $(\alpha^{S*}, \beta^{S*})$ игры $\Gamma_1(\alpha, \beta)$ будет пара стратегий $(\varepsilon, 2\varepsilon/(\varepsilon + 1))$, приводящих к выигрышам центров $1 + \ln(1 - \varepsilon)$ и $1 + \ln(1 - 2\varepsilon/(\varepsilon + 1))$ соответственно. Отметим, что, во-первых, это решение близко к утилитарному (так как оба центра выбирают близкие к нулю стратегии). Во-вторых, центр, делающий второй ход, несет бóльшие затраты. ♦

Пример 11. Пусть в условиях примера 10 сначала вторым центром выбирается параметр β, а затем первым центром (при известном выборе второго) — параметр α (игра $\Gamma_1(\beta, \alpha)$). Из выражений (14) и (20) получаем:

$$\Omega_{\alpha,\beta}(\theta) = \{(\alpha, \beta) \in [0; 1]^2 \mid \alpha = \theta\beta/(1 - \beta - \theta + 2\beta\theta),$$
$$0 < \alpha, \beta \le 1 - 1/e\}.$$

При этом ε-оптимальным (где ε — сколь угодно малая строго положительная величина) решением рассматриваемой игры $\Gamma_1(\beta, \alpha)$ будет пара стратегий $(\varepsilon/(2 - \varepsilon), \varepsilon)$, приводящих к выигрышам центров $1 + \ln(1 - \varepsilon/(2 - \varepsilon))$ и $1 + \ln(1 - \varepsilon)$ соответственно. Отметим, что это решение также близко к утилитарному. Опять же, центр, делающий второй ход, несет бóльшие затраты. ♦

Примеры 10 и 11 позволяют выдвинуть (известную в теории иерархических игр и ее приложениях) гипотезу: решения игр $\Gamma_1(\alpha, \beta)$ и $\Gamma_1(\beta, \alpha)$ принадлежат множеству компромисса (если оно не пусто), причем имеет место борьба за первый ход (как правило, центр, делающий первый ход, вынуждает оппонента «согласиться» с невыгодным для последнего равновесием). Это свойство встречается во многих моделях управления организационными системами (см., например, работу [14]).

Рассмотрим теперь игры типа Γ_2, в которых центр, делающий ход первым, имеет более богатое множество возможных стратегий [9], а именно, он может выбирать и сообщать центру, делающему второй ход, зависимость своих действий от действий последнего. В рамках идеологии теоремы Гермейера [9] можно предположить, что, если множество компромисса не пусто, то оптимальная стратегия первого центра (первым выбирающего α, т. е. в игре $\Gamma_2(\alpha(\cdot), \beta))$ имеет вид:

$$\alpha^{G*}(\beta) = \begin{cases}\alpha^{S*}, \text{если } \beta = \beta^{S*}, \\ 1, \text{иначе.}\end{cases} \quad (28)$$

Содержательно, стратегия (28) заключается в том, что первый центр предлагает второму реализовать решение $(\alpha^{S*}, \beta^{S*})$ игры $\Gamma_1(\alpha, \beta)$. Если второй центр отказывается, то первый угрожает использовать свою наихудшую для оппонента стратегию. В рамках стратегии (28) игра $\Gamma_2(\alpha(\cdot), \beta))$ дает в равновесии центрам те же выигрыши, что и игра $\Gamma_1(\alpha, \beta)$.

Игра $\Gamma_2(\beta(\cdot), \alpha))$, а также иерархические игры для модели II описываются полностью аналогично.

2.4. Рефлексивная игра центров

Над игрой в нормальной форме можно «надстраивать» *рефлексивные игры* [8], в которых игроки обладают нетривиальной взаимной информированностью о существенных параметрах. Предположим, что функция распределения $F(r, x)$ задана параметрически, и неопределенность отражается параметром $r \in Y$. Следуя работе [8], представления первого центра о неопределенном параметре r будем обозначать r_1, второго — r_2, представления первого центра о представлениях второго — r_{12} и т. д.

Пример 12. Пусть в модели II $F(r, x) = r + (1 - r)x$, $r \in Y = [0; 1]$, $H_\delta(x) = x$, $H_\gamma(x) = 1 - x$, $c_\delta(\delta) = \delta$, $c_\gamma(\gamma) = \lambda\gamma$. Найдя РКП $x^*(\delta, \gamma) = (\delta + r)/(\delta + \gamma + r)$, получаем выражения для целевых функций центров:

$$f_\delta(\delta, \gamma) = (\delta + r)/(\delta + \gamma + r) - \delta, \tag{29}$$

$$f_\gamma(\delta, \gamma) = 1 - (\delta + r)/(\delta + \gamma + r) - \lambda^2\gamma. \tag{30}$$

Если значение параметра $r \in [0; 1]$ является *общим знанием* [8] среди центров, то из выражений (29) и (30) находим параметрическое РН игры центров

$$\delta^* = \left(\frac{\lambda}{1 + \lambda^2}\right)^2 - r, \tag{31}$$

$$\gamma^* = \frac{1}{(1 + \lambda^2)^2} \tag{32}$$

и реализуемое этими стратегиями РКП

$$x^*(\delta^*, \gamma^*) = \frac{\lambda^2}{1 + \lambda^2}. \tag{33}$$

Отметим, что равновесная стратегия второго центра (32), а также соответствующее РКП (33) в условиях общего знания не зависят от значения параметра $r \in [0; 1]$. Ситуация меняется, если общее знание относительно этого параметра отсутствует.

Пусть $r_1 = r_{12} = r_{121} = r_{1212} = ...$, т. е. первый центр обладает некоторой (в общем случае неправильной) информацией r_1 о неопределенном параметре r и считает, что его представления истинны и составляют общее знание. Пусть $r_2 = r_{21} = r_{212} = r_{2121} = ... = r$, т. е. второй центр знает истинное значение параметра r и считает его общим знанием (т. е. второй центр не знает о том, что представления первого центра могут отличаться от истины).

Из выражений (31) и (32) находим *информационное равновесие* [14] игры центров

$$\delta_* = \left(\frac{\lambda}{1 + \lambda^2}\right)^2 - r_1, \quad \gamma_* = \frac{1}{(1 + \lambda^2)^2}$$

и реализуемое в этом равновесии РКП

$$x^*(\delta_*, \gamma_*) = \frac{\lambda^2 + (r - r_1)(1 + \lambda^2)^2}{1 + \lambda^2 + (r - r_1)(1 + \lambda^2)^2}. \tag{34}$$

Видно, что в общем случае РКП зависит от информированности центров, и в случае общего знания (чему соответствует $r_1 = r$) выражение (34) переходит в выражение (33). Осуществляя, как метауправление, *информационное управление* [8, 14] — например, изменяя представления первого центра о значении неопределенного параметра, можно соответственно менять и РКП. ♦

Пример 13. Пусть в условиях примера 12 второй центр адекватно информирован о представлениях первого центра (т. е. второй центр знает о том, что представления первого центра могут отличаться от истины): $r_{21} = r_{212} = r_{2121} = ... = r_1$. Тогда первый центр будет в информационном равновесии по-прежнему выбирать стратегию $\delta_* = \left(\frac{\lambda}{1 + \lambda^2}\right)^2 - r_1$, а второй центр выберет

$$\gamma_*(r_1, r) = \frac{1}{\lambda}\sqrt{\left(\frac{\lambda}{1 + \lambda^2}\right)^2 - r_1 + r} + r_1 - r - \frac{\lambda^2}{(1 + \lambda^2)^2},$$

что приведет к реализации РКП

$$x^*(\delta_*, \gamma_*(r_1, r)) = \lambda\frac{\lambda^2 + (r - r_1)(1 + \lambda^2)^2}{(1 + \lambda^2)^2\sqrt{\left(\frac{\lambda}{1 + \lambda^2}\right)^2 - r_1 + r}}.$$

Легко убедиться, что в случае общего знания, т. е. при $r_1 = r$ справедливо $x^*(\delta_*, \gamma_*(r_1, r)) = x^*(\delta^*, \gamma^*)$.

Таким образом, настоящий пример иллюстрирует, что в рефлексивных играх на равновесие существенно влияет не только информированность агентов (она не изменилась по сравнению с примером 11), но и их *взаимная информированность*, т. е. представления об информированности оппонентов, представления о представлениях и т. д. [8]. ♦

Отметим, что нетривиальная взаимная информированность центров может иметь место не только относительно параметров функции распределения порогов агентов, но и относительно параметров функций выигрыша и/или функций затрат центров и др.

Пример 14. Пусть в условиях примера 12 первый центр неадекватно информирован о параметре λ функции затрат второго центра, который знает истинное значение этого параметра и считает, что первый центр адекватно информирован.

Пусть $\lambda_1 = \lambda_{12} = \lambda_{121} = \lambda_{1212} = ...$, т. е. первый центр обладает некоторой (в общем случае неправильной) информацией λ_1 о неопределенном параметре λ и считает, что его представления истинны и составляют общее знание. Пусть $\lambda_2 = \lambda_{21} = \lambda_{212} = \lambda_{2121} = ... = \lambda$, т. е. второй центр знает истинное значение параметра λ и считает его общим знанием. Из выражений (31) и (32) получаем реализуемое в информационном равновесии РКП:

$$x^* = \frac{\lambda_1^2}{\lambda_1^2 + \left(\frac{1+\lambda_1^2}{1+\lambda^2}\right)^2},$$

которое в случае общего знания (чему соответствует $\lambda_1 = \lambda$) переходит в РКП (36). ♦

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Сформулируем основной результат настоящей работы. Показано, как, располагая предложенной в работе [7] стохастической моделью управления толпой, «надстраивать» над ней различные теоретико-игровые модели взаимодействия управляющих субъектов, оказывающих информационные воздействия на толпу в собственных интересах. Относительная «простота» модели объекта управления (толпы) позволяет применить разнообразный инструментарий теории игр — исследовать не только игры в нормальной форме, но и иерархические, рефлексивные и другие игры.

Перспективным направлением дальнейших исследований представляется идентификация и выделение типовых функций распределения порогов агентов (по аналогии, например, с тем, как это делалось в работе [24]), что позволит синтезировать соответствующие шаблоны управлений и решений задач информационного управления, а также моделей информационного противоборства.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Новиков Д.А.* Иерархические модели военных действий // Управление большими системами. — 2012. — № 37. — С. 25—62.
2. *Губанов Д.А., Новиков Д.А., Чхартишвили А.Г.* Социальные сети: модели информационного влияния, управления и противоборства. — М.: Физматлит, 2010. — 228 с.
3. *Губанов Д.А., Калашников А.О., Новиков Д.А.* Теоретико-игровые модели информационного противоборства в социальных сетях // Управление большими системами. — 2010. — № 31. — С. 192—204.
4. *Breer V., Novikov D.* Models of Mob Control // Automation and Remote Control. — 2013. — Vol. 74, N 12. — P. 2143—2154.
5. *Бреер В.В.* Модели конформного поведения // Проблемы управления. — 2014. — № 1. — С. 2—13; № 2. — С. 2—17.
6. *Granovetter M.* Threshold Models of Collective Behavior // AJS. — 1978. — Vol. 83, N 6. — P. 1420—1443.
7. *Бреер В.В., Новиков Д.А., Рогаткин А.Д.* Стохастические модели управления толпой // Управление большими системами. — 2014. — № 52. — С. 85—117.
8. *Novikov D., Chkhartishvili A.* Reflexion and Control: Mathematical Models. — Leiden: CRC Press, 2014. — 298 p.
9. *Burke D.* Towards a Game Theory Model of Information Warfare. — N.-Y.: BiblioScholar, 2012. — 116 p.
10. *Miller D.* Introduction to Collective Behavior and Collective Action. — Illinois: Waveland Press, 2013. — 592 p.
11. *Breer V.* A Game-theoretic Model of Non-anonymous Threshold Conformity Behavior // Automation and Remote Control. — 2012. — Vol. 73, N 7. — P. 1256—1264.
12. *Губко М.В., Караваев А.П.* Согласование интересов в матричных структурах управления // Автоматика и телемеханика. — 2001. — № 10. — С. 132—146.
13. *Новиков Д.А., Цветков А.В.* Механизмы функционирования организационных систем с распределенным контролем. — М.: ИПУ РАН, 2001. — 118 с.
14. *Novikov D.* Theory of Control in Organizations. — N.-Y.: Nova Science Publishers, 2013. — 341 p.
15. *Новиков Д.А.* Игры и сети // Математическая теория игр и ее приложения. — 2010. — № 2. — С. 107—124.
16. *Novikov D.* Cognitve Games: a Linear Impulse Model // Automation and Remote Control. — 2010. — Vol. 71, N 10. — P. 718—730.
17. *Губко М.В., Новиков Д.А.* Теория игр в управлении организационными системами. — М.: СИНТЕГ, 2002. — 148 с.
18. *Myerson R.* Game Theory: Analysis of Conflict. — Cambridge, Massachusetts, London: Harvard University Press, 2001. — 600 p.
19. *Мулен Э.* Кооперативное принятие решений: аксиомы и модели. — М.: Мир, 1991. — 464 с.
20. *Искаков М.Б.* Равновесие в безопасных стратегиях // Автоматика и телемеханика. — 2005. — № 3. — С. 139—153.
21. *Искаков М.Б., Искаков А.Б.* Равновесие, сдерживаемое контругрозами, и сложное равновесие в безопасных стратегиях // Управление большими системами. — 2014. — № 51. — С. 130—157.
22. *Iskakov M., Iskakov A.* Equilibrium in secure strategies / CORE Discussion Paper 2012/61. — Louvain-la-Neuve: CORE, 2012. — 38 p.
23. *Germeier Yu.* Non-antagonistic Games. — Dordrecht, Boston: D. Reidel Pub. Co., 1986. — 327 p.
24. *Батов А.В., Бреер В.В., Новиков Д.А., Рогаткин А.Д.* Микро- и макромодели социальных сетей. Ч. 2. Идентификация и имитационные эксперименты // Проблемы управления. — 2014. — № 6. — С. 45—51.

Статья представлена к публикации членом редколлегии Ф.Т. Алескеровым.

Новиков Дмитрий Александрович — чл.-корр. РАН,
зам. директора, Институт проблем управления
им. В.А. Трапезникова РАН, г. Москва,
☎ (495) 334-75-69, ✉ novikov@ipu.ru.