Письмо в редакцию

О работе В.Р.Барсегяна "Конструктивный подход к исследованию задач управления линейными составными системами"

А.Б.Нерсесян

Институт математики НАН Армении

E-mail: nerses@instmath.sci.am

1. В работе [1] рассматривается управляемая, составная динамическая система, заданная на каждом интервале $[t_{k-1}, t_k]$ $(0 = t_0 < t_1, \ldots, t_m = T < \infty)$ в виде

$$\dot{x}^{(k)} = A_k(t)\, x^{(k)} + B_k(t)\, u^{(k)},\ t \in [t_{k-1}, t_k],\ k = 1, \ldots, m; \tag{1}$$

где $x^{(k)}(t) \in R^{n_k}$, $A_k(t)$ и $B_k(t)$ матрицы размеров $(n_k \times n_k)$ и $(n_k \times r_k)$ соответственно, а $u^{(k)}(t)$ - $(r_k \times 1)$ вектор управляющих воздействий. Элементы последних трех матриц являются измеримыми ограниченными функциями.

Заданы следующие начальное и конечное состояния системы

$$x^{(1)}(0) = x_0^{(1)},\ x^{(m)}(T) = x_T^{(m)} \tag{2}$$

Стыковки траекторий на сети $\{t_k\}$ задаются соотношениями

$$x^{(k+1)}(t_k) + E_k\, x^{(k)}(t_k) = \alpha_k,\ k = 1, \ldots, m-1 \tag{3}$$

где E_k и α_k, соответственно, $(n_{k+1} \times n_k)$ и $(n_{k+1} \times 1)$ - мерные постоянные матрицы.

Изучаются следующие две задачи:

Задача 1. Требуется найти условия, при которых существует управление $\{u^{(k)}(t)\}$, переводящее систему (1) из начального состояния $x_0^{(1)}$, при условиях (3), в конечное состояние $x_T^{(m)}$, "а также построить их".[1]

Задача 2. Задан критерий качества æ[u], $u = \{u^{(k)}(t)\}, u^{(k)}(t) \in P_k, t \in [t_{k-1}, t_k]$, "который может иметь смысл нормы некоторого нормированного пространства". Требуется найти набор оптимальных управляющих воздействий $u^0(t) = \{u^{(k)0}(t)\}$, переводящий систему (1) из начального состояния $x_0^{(1)}$, при условиях (3), в конечное состояние $x_T^{(m)}$ и имеющий наименьшее значение æ[u^0].

2. Отметим некоторые свойства изучаемых задач.

Замечание 1. Основной особенностью постановки (1)-(3) является тот факт, что на отрезке $[0, t_{m-1}]$ и задач-то нет, ибо $x(t)$ однозначно определяется рекуррентно (что и пытается автор привести в явном виде в п.2). Сами задачи возникают только на отрезке $[t_{m-1}, T]$, для $x^{(m)}(t)$. Их отличие от классических задач управления заключается в том, что начальное значение $x^{(m)}(t_{m-1})$, вообще говоря, не зафиксировано, а может линейно зависеть от определенных функционалов от управляющих воздействий $\{u^{(k)}(t)\}$, $t \in [t_k - 1, t_k]\,, k \leq m-1$). При этом абсолютно неважно, из

[1] Здесь и далее в кавычках приводятся только цитаты из работы (1)

каких соображений получена зависимость подобных функционалов в конкретной задаче, ибо дальнейшая процедура исследования стандартна (относительно задач типа **Задачи 1** см., например, [3], §2 главы 1).

Замечание 2.. Следуя работе [3], в уравнении (1), при каждом k, произведем замену неизвестной функции $z_k(t) = Y_k^{-1}(t)x_k(t)$, где $Y_k(t)$ - решение задачи $\dot{Y}_k = A_k(t)Y_k$, $Y(0) = I_k$ ($I_k - (n_k \times n_k)$ единичная матрица). Тогда уравнения (1) примут следуюший простой вид,

$$\dot{x}^{(k)} = B_k(t)\, u^{(k)}(t),\ t \in [t_{k-1}, t_k], \tag{1*}$$

с условиями[2] (2) и (3).

3. Комментарии к работе [1]:

3.1. Автор постоянно оперирует матриц-функциями разных размеров, заданными на разных интервалах. И если при изучении **Задачи 1** можно , в какой-то степени, пользоваться линейными (не нормированными) пространствами, то в случае **Задачи 2**, при наличии условных ограничений $u^{(k)}(t) \in P_k$, изложение автора становится непонятным из-за неопределенности используемой топологии. Так, и само определение области достижимости K, и доказательство Теоремы 1 явно заимствованы автором из приводимой им в списке литературы (но почему-то не процитированной) работы [5]. Однако в последней (см. п.3.2) используется определенная квадратичная метрика, соответствующая критерию качества. У автора же (начало второй колонки на стр. 15) фигурирует неопределенная ссылка на метрику Хаусдорфа.

3.2. Ряд ошибок и неточностей встречаем в п. 2 работы. Так, в конце левой колонки на стр. 13 автор почему - то считает, что матрицы $\{E_k\}$ коммутируют со всеми матрицами видов $\{X_p,\, F_q^{-1}\}$. Чуть далее зависимость матриц $\{W_j^k\}$ от j выглядит довольно странно. Там же, в матричных произведениях, невозможно понять, в каком порядке расположены сомножители.

3.3. Логический порядок изложения материала неоднократно нарушается автором. Так, в самом определении **Задачи 2** (стр.12) о каких-либо свойствах множеств $\{P_k\}$ ничего не сказано. Только в дальнейшем мы узнаем, что (стр.14, начало п.2) "в силу ограниченности множеств $\{P_k\}$ из выражения (2.7) непосредственно следует, что решение $x_k(t)$ представляет собой действительный , абсолютно непрерывный n_k - мерный вектор". Неясно, откуда взялась ограниченность каждого P_k, и в какой она метрике трактуется. Неясно, чем мешала бы неограниченность указанным свойствам $x_k(t)$.

Далее, перед теоремой 1 и в ее условиях (стр. 14) нет предположений о выпуклости множеств $\{P_k\}$, однако в ее доказательстве (начало стр. 15) это преподносится, как известный факт.

Наконец (конец правой колонки на стр. 16), из определения полной управляемости системы (1) автор, непонятным образом, делает вывод о справедливости теоремы 2 и, только после этого, - предваряя дальнейшее фразой "Теперь, на основе изложенного.." , - фактически приводит ее доказательство.

[2] Не останавливаясь на остальных возникающих связях, сохраним прежние обозначения

3.4. Утверждения автора (стр.17, начало правой колонки) о том, что "задача 2 приводится к проблеме моментов, решение которой известно из работы [6][3] " и что (стр 12, резюме к работе) им "предложен способ решения задачи оптимального управления" не только не не соответствует действительности, но и дезориентируют читателя. На самом деле книга Н.Н. Красовского посвящена безусловной оптимизации. Изучаемая же **Задача 2** может быть исследована и решена совершенно иными методами, в определенных пространствах (см, например, работы [4,5]). Приведенные высказывания автора выглядят особенно странно, если учесть, что (см. п. 3.1 выше) книга [5] хорошо ему знакома.

3.5. Если к сказанному добавить, что автор допустил немалое количество описок, то становится ясно, что работа изложена,- во всех смыслах,- крайне небрежно. Можно было бы предложить автору представить, учитывая вышесказанное, новый, переработанный вариант работы [1]. Однако оказывается, что **Задачи 1,2** фактически изучены и решены еще пол-века назад. Об этом, по сути, уже сказано в **Замечании 2** (см. также выше, п.3.1), однако следующие рассуждения более убедительны.

При $k = 1$ (см.Замечание 2), умножив уравнение (1^*) слева на матрицу E_1 из (3) и обозначив $y_1 = E_1 x^{(1)} + \alpha_1$, придем к уравнению $\dot{y_1} = E_1 B_1(t)\, u^{(1)}(t)$.

Обратим теперь внимание на то, что (см. (3)) вследствие этого в точке t_1 произошла обычная стыковка $y_1(t_1 - 0) = x^{(2)}(t_1 + 0)$, т.е. на отрезке $[t_0, t_2]$ уже имеем единое дифференциальное уравнение для n_2 - мерного вектора y

$$\dot{y} = B(t)\, u(t),\ t \in [t_0, t_2] \tag{4}$$

где $B(t) = E_1 B_1(t)$, $u(t) = u^{(1)}(t)$ при $t_0 \le t \le t_1$ и $B(t) = B_2(t)$, $u(t) = u^{(2)}(t)$ при $t_1 \le t \le t_2$. При $m = 2$ это - уравнение на $[t_0, T]$ и $y(0) = E_1\, x_0^{(1)}$, $y(T) = x_T^{(2)}$.

Продолжая этот процесс при $m \ge 2$ (т.е. умножая уравнение (4) слева на E_2 и получая единое уравнение уже на $[t_0, t_3]$, и т.д.), на $(m-1)$ - м шаге, в общем случае придем к соответствующему единому на $[t_0, T]$ дифференциальному уравнению вида (1^*) для n_m-мерного вектора $z(t)$, с начальным и конечным условиями $z(0) = E_{(m-1)}\, E_{m-2}, \ldots, E_1\, x_0^{(1)}$ и $z(T) = x_T^{(m)}$ соответственно.

Таким образом, чтобы найти ответы на все вопросы, поставленные в работе [1], достаточно обратиться, например, к главе 4 работы [2], к §2 главы 1 работы [3], к главам 2-3 работы [5] и к §23 главы 3 работы [4].

Литература

[1] В.Р.Барсегян, Конструктивный подход к исследованию задач управления линейными составными системами, Проблемы Управления, no. 4 (2012), стр. 11-17.

[2] Н. Н. Красовский, Теория управления движением, Москва, "Наука" , 1968.

[3] В. И. Зубов, Лекции по теории управления , Москва, "Наука" , 1975.

[4] Л.С.Понтрягин, В.Г.Болтянский, Р.В. Гамкрелидзе, Е.Ф. Мищенко. Математическая теория оптимальных процессов, Москва, "Наука" , 1983.

[5] Э. Б. Ли, Л.Маркус. Основы теории оптимального управления, Москва, "Наука" , 1972.

[3] Имеется в виду указанная ниже работа [2]