УДК 519.816

DOI: http://doi.org/10.25728/pu.2024.1.2

СРЕДНИЕ ВЕЛИЧИНЫ: МНОГОКРИТЕРИАЛЬНЫЙ ПОДХОД. III[#]

А. П. Нелюбин*, В. В. Подиновский**

*Институт машиноведения им. А. А. Благонравова Российской академии наук, г. Москва
**Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», г. Москва

*✉ nelubin@gmail.com, **✉ podinovski@mail.ru

Аннотация. Ранее авторами был предложен и развит новый подход к определению средних величин, основанный на идеях многокритериальной оптимизации. Расстояния между текущей точкой и точками выборки рассматривались как компоненты векторной оценки. Обычный подход к определению средних основан на скаляризации векторных оценок заменой векторов, например, суммами квадратов их компонент. Авторы, напротив, исходили из сравнения по предпочтительности самих векторных оценок. Было рассмотрено несколько видов средних, соответствующих различным объемам информации о предпочтениях. Исследованы свойства введенных средних и даны вычислительные методы их построения. Однако для случая равноважных критериев метод был приближенным и достаточно трудоемким. В данной статье представлен точный и эффективный численный метод построения множества средних указанного вида. Работа метода проиллюстрирована расчетным примером.

Ключевые слова: средние величины, многокритериальные задачи выбора, отношения предпочтения, теория важности критериев.

ВВЕДЕНИЕ

В управлении, экономике, технике и других областях науки и практики широко применяются средние величины (см., например, работы [1, 2]). Однако «…не существует возможности нахождения некой универсальной формулы, исчерпывающей понятие средней величины и обладающей конструктивными достоинствами.» (см. книгу [3], *предисловие*). Поэтому актуальной остается проблема поиска подходов к общей формулировке понятия средней величины и ее конкретизации для различных ситуаций.

Данная работа является непосредственным продолжением статей авторов [4, 5], в которых предложен и развит новый подход к определению средних величин как недоминируемых точек по специальным отношениям предпочтения. В них изложены методы построения множеств таких средних для отношений предпочтения, соответствующих различным видам информации о критериях. В частности, предложен метод и для случая равноважных критериев (информация E). К сожалению, он является приближенным и требует достаточно больших затрат машинного времени даже при не оченьбольшой размерности выборки. В настоящей работе предлагается точный и эффективный метод построения множества средних $G^E(X)$.

1. НЕОБХОДИМЫЕ БАЗОВЫЕ СВЕДЕНИЯ

Для удобства читателя вначале кратко приведем необходимые для дальнейшего изложения сведения из работы [4].

Пусть имеется совокупность X, состоящая из $n \geq 2$ действительных чисел, называемых далее данными, или точками, и являющихся результатами измерения интенсивности некоторого выделенного признака:

$$X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}. \quad (1)$$

Эти данные являются однородными в том смысле, что измерения производились по одной и той же шкале, которая не менее совершенна, чем

[#] Работа выполнена при частичной поддержке Международного центра анализа и выбора решений.

шкала интервалов [6, 7]. Упорядоченные соответственно по неубыванию и невозрастанию множества

$$X_{\uparrow} = <x_{(1)}, x_{(2)}, \ldots, x_{(n)}>; \quad X_{\downarrow} = <x_{[1]}, x_{[2]}, \ldots, x_{[n]}>, \tag{2}$$

где $x_{(1)} \le x_{(2)} \le \ldots \le x_{(n)}$ и $x_{[1]} \ge x_{[2]} \ge \ldots \ge x_{[n]}$ получаются из совокупности чисел (1) при помощи соответствующих перестановок.

Пусть x – произвольное фиксированное число – точка на числовой прямой Re. Удаленность ее от отдельной точки x_i из множества X можно оценить расстоянием $y_i = |x - x_i|$. Тогда удаленность x от совокупности всех точек из множества X характеризуется вектором $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$, составленным из таких расстояний. Его можно считать значением векторного критерия $f(x) = (f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x))$, где $f_i(x) = |x - x_i|$. Областью значений Z этого векторного критерия является положительный ортант $\mathrm{Re}_+^n = [0, +\infty)^n$ – множество n-мерных векторов с неотрицательными компонентами. Значение $f(x) = (f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x))$ векторного критерия f, называемое векторной оценкой точки x, для краткости будем обозначать также $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$, где $y_i = f_i(x)$, $i \in N = \{1, 2, \ldots, n\}$.

Пусть на множестве Z задано отношение предпочтения – строгий частичный порядок P^{Γ}, где Γ – информация о предпочтениях ЛПР, касающаяся удаленности: если верно $y'P^{\Gamma}y''$, то точка $y' = f(x')$ ближе ко множеству значений векторного критерия $Y = \{y \in Z |\ y = f(x), x \in X\}$, чем $y'' = f(x'')$. Отношение P^{Γ} порождает имеющий аналогичный смысл отношение P_{Γ} на числовой прямой: $x'P_{\Gamma}x'' \Leftrightarrow y'P^{\Gamma}y''$, где $y' = f(x')$, $y'' = f(x'')$. На роль наиболее близких к X и представляющих все множество X могут претендовать те и только те точки, которые недоминируемы по P_{Γ}. (Точка x недоминируема по P_{Γ}, если не существует точки x' такой, что верно $x'P_{\Gamma}x$.) Если множество таких точек $G^{\Gamma}(X)$ внешне устойчиво (т. е. для каждой доминируемой точки x найдется недоминируемая точка x' такая, что верно $x'P_{\Gamma}x$), то все они будут именоваться средними по P_{Γ}.

Естественно полагать, что предпочтения с увеличением значений критериев f_i убывают или, иными словами, что критерии желательно минимизировать. При отсутствии иной информации о предпочтениях на множестве Z предпочтения описывает отношение Парето $P^{\varnothing}$, определяемое так: $yP^{\varnothing}z \Leftrightarrow (y_i \le z_i,\ i = 1, 2, \ldots, n$, причем хотя бы одно из неравенств является строгим). Отношение $P^{\varnothing}$ порождает на Re отношение Парето $P_{\varnothing}$: $xP_{\varnothing}x' \Leftrightarrow yP^{\varnothing}y'$. Оказывается, что средними по $P_{\varnothing}$ являются все точки отрезка с концами $x_{(1)} = \min_{i \in N} x_i$ и $x_{(n)} = \max_{i \in N} x_i$, т. е. $G^{\varnothing}(X) = = \bar{X} = [x_{(1)}, x_{(n)}]$.

Пусть все критерии имеют равную важность (информация $\Gamma = E$). Пусть Π – множество всех перестановок $\pi = <\pi(1), \pi(2), \ldots, \pi(n)>$ множества $\{1, 2, \ldots, n\}$. Критерии $f_1, f_2, \ldots, f_n$ называются равноважными, если любая векторная оценка y одинакова по предпочтительности (безразлична) с ее перестановкой $\pi(y) = (y_{\pi(1)}, y_{\pi(2)}, \ldots, y_{\pi(n)})$, где $\pi \in \Pi$. Отношение нестрогого предпочтения R^E на Z определяется так:

$$yR^Ez \Leftrightarrow [\text{существуют } \pi, \rho \in \Pi \text{ такие, что } y_{\pi(1)} \le z_{\rho(1)}, y_{\pi(2)} \le z_{\rho(2)}, \ldots, y_{\pi(n)} \le z_{\rho(n)}]. \tag{3}$$

Удаленность точки x от множества X оценивается отношением R_E на Re. Оно порождается отношением R^E на Re^n, которое определяется каждым из двух равносильных решающих правил:

$$yP^Ez \Leftrightarrow [y_{(1)} \le z_{(1)}, y_{(2)} \le z_{(2)}, \ldots, y_{(n)} \le z_{(n)}, \text{ причем хотя бы одно из нестрогих неравенств является строгим}]; \tag{4}$$

$$yP^Ez \Leftrightarrow [y_{[1]} \le z_{[1]}, y_{[2]} \le z_{[2]}, \ldots, y_{[n]} \le z_{[n]}, \text{ причем хотя бы одно из нестрогих неравенств является строгим}]. \tag{5}$$

Средними по P_E, составляющими множество $G^E(X)$, здесь являются недоминируемые по P_E точки числовой прямой. Множество таких точек является внешне устойчивым. Поскольку $P_{\varnothing} \subseteq P_E$, то $G^E(X) \subseteq G^{\varnothing}(X)$.

2. МЕТОД ПОСТРОЕНИЯ МНОЖЕСТВА $G^E(X)$

Предлагаемый метод основан на следующих двух утверждениях, характеризующих важные свойства средних по P_E.

Утверждение 1. *Если все исходные точки множества расположены в узлах равномерной сетки, то для проверки принадлежности к средним по* R_E *любого узла этой сетки достаточно сравнить его векторную оценку с векторными оценками остальных узлов этой сетки.*

Утверждение 2. *Пусть точки множества* X *расположены в узлах равномерной сетки с шагом* $h = 2\xi$. *Тогда либо весь интервал* $(k\xi, k\xi + \xi)$, *где* k *– целое число, принадлежит множеству средних* $G^E(X)$, *либо ни одна точка этого интервала не принадлежит* $G^E(X)$.

Утверждение 1 доказано в работе [4]; доказательство второго вынесено в приложение.

Вначале заметим, что равномерная сетка, удовлетворяющая условиям утверждений, всегда может быть построена, если все точки в множестве X

– рациональные числа. В практических приложениях типичен случай, когда эти числа являются целыми или же конечными десятичными дробями. А поскольку множество $G^{\varnothing}(X)$ внешне устойчиво и $P_{\varnothing} \subseteq P_E$, достаточно рассматривать сетку только на отрезке $\bar{X} = [x_{(1)}, x_{(n)}]$. Действительно, пусть для рассматриваемой точки $x \in \bar{X}$ верно uP_Ex для некоторой точки $u \in \mathrm{Re} \setminus \bar{X}$. Поскольку $G^{\varnothing}(X) = \bar{X}$ и внешне устойчиво, то найдется точка $x^* \in \bar{X}$ такая, что выполнено $x^*P_{\varnothing}u$. Но тогда верно x^*P_Eu, а по транзитивности выполнено и x^*P_Ex.

Согласно утверждению 2, множество $G^E(X)$ есть объединение промежутков между узлами сетки, состоящими из всех недоминируемых по P_E точек, и недоминируемых узлов этой сетки – границ указанных интервалов.

Метод состоит в следующем. На отрезке $\bar{X}$ строится сетка с шагом ½ξ = ¼ h:

$$\{x_{(1)}, (x_{(1)} + ¼\, h), (x_{(1)} + ½\, h), \ldots, (x_{(n)} - ¼\, h), x_{(n)}\}. \quad (6)$$

Выделяются недоминируемые ее узлы – точки из сетки (6) – путем попарных сравнений по P_E этих узлов с использованием любого из решающих правил (4) или (5). Согласно утверждению 1 они будут входить в множество $G^E(X)$.

Далее среди интервалов длиной ξ = ½ h, границы которых лежат в узлах сетки, т. е. из интервалов

$$(x_{(1)}, x_{(1)} + ½\, h), (x_{(1)} + ½\, h, x_{(1)} + h), \ldots, (x_{(n)} - ½\, h, x_{(n)}),$$

середины которых являются узлами сетки, т. е. точками

$$x_{(1)} + ¼\, h, x_{(1)} + ¾\, h, \ldots, x_{(n)} - ¼\, h,$$

выделяются все интервалы, у которых середины являются недоминируемыми по P_E.

Наконец, выделенные интервалы объединяются и к ним добавляются недоминируемые границы этих интервалов – узлы сетки с шагом ½ h.

Предлагаемые алгоритмический метод построения множества $G^E(X)$ является точным и эффективно реализуемым. Следующий расчетный пример иллюстрирует, как работает метод.

3. ПРИМЕР ПОСТРОЕНИЯ МНОЖЕСТВА $G^E(X)$

Пусть X = {1, 2, 5, 9, 11}. Поскольку все числа в множестве X натуральные, то используем сетку с шагом 0,25, покрывающую отрезок $\bar{X}$ = [1, 11].

Проведенные попарные сравнения по P_E показали, что недоминируемыми по P_E точками, лежащими в узлах этой сетки, являются следующие:

$$\begin{gathered}1{,}5;\ 1{,}75;\ 2;\ 2{,}25;\ 2{,}5;\ 2{,}75;\ 3;\ 3{,}25;\ 3{,}5;\\ 3{,}75;\ 4;\ 4{,}25;\ 4{,}5;\ 4{,}75;\ 5;\ 5{,}25;\ 5{,}5;\ 5{,}75;\\ 6;\ 6{,}25;\ 6{,}5;\ 6{,}75;\ 7;\ 7{,}25;\ 8{,}75;\ 9;\ 9{,}25.\end{gathered} \quad (7)$$

Согласно утверждению 1 эти точки принадлежат множеству $G^E(X)$. Остальные точки – узлы сетки доминируемы. Например, точка 4,5 доминирует точки 7,5 и 8,5, а точка 2,5 доминирует точку 9,5.

Поскольку точка 1,25 доминируема, то согласно утверждению 2, интервал (1; 1,5) не пересекается со множеством $G^E(X)$. Точка 1,75 недоминируема, и поэтому $(1{,}5;\ 2) \subset G^E(X)$. Далее аналогично устанавливаем, что интервалы

$$\begin{gathered}(2;\ 2{,}5),\ (2{,}5;\ 3),\ (3;\ 3{,}5),\ (3{,}5;\ 4),\\ (4;\ 4{,}5),\ (4{,}5;\ 5),\ (5;\ 5{,}5),\ (5{,}5;\ 6),\ (6;\ 6{,}5),\\ (6{,}5;\ 7),\ (7;\ 7{,}5),\ (8{,}5;\ 9) \text{ и } (9;\ 9{,}5)\end{gathered} \quad (8)$$

включены в множество $G^E(X)$, а интервалы

$$(7{,}5;\ 8),\ (8;\ 8{,}5),\ (9{,}5;\ 10),\ (10;\ 10{,}5),\ (10{,}5;\ 11)$$

со множеством $G^E(X)$ не пересекаются.

Учитывая полученные результаты (7) и (8), а также то, что $(1{,}5;\ 2) \subset G^E(X)$, приходим к выводу, что $G^E(X) = [1{,}5;\ 7{,}5) \cup (8{,}5;\ 9{,}5)$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В статье предложен алгоритмический метод построения множества средних для случая равноважных критериев. Метод является точным. Его несложно реализовать на компьютере. Приведен расчетный пример.

Таким образом, для всех видов средних, введенных и изученных в работах [4, 5], теперь имеются точные вычислительные методы, которые можно эффективно применять на практике при анализе данных.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство утверждения 2. Докажем сначала, что если произвольная точка $k\xi + \varepsilon$, где k – целое, $0 < \varepsilon < \xi$, из интервала $(k\xi;\ k\xi + \xi)$ доминируема по P_E на Re, то доминируема и любая другая точка $k\xi + \lambda$, $0 < \lambda < \xi$, из этого интервала. Возможны два варианта: точка $k\xi + \varepsilon$ доминируема точкой $m\xi$, лежащей на сетке с шагом ξ, или точкой вне сетки $m\xi + \eta$, где m – целое, $0 < \eta < \xi$.

Пусть $(m\xi)\ \mathrm{P_E}\ (k\xi + \varepsilon)$. Тогда согласно определению (3) имеем неравенства

$$f_{\pi(i)}(m\xi) \le f_{\rho(i)}(k\xi + \varepsilon),\ i = 1, 2, ..., n, \quad (\text{П1})$$

среди которых хотя бы одно строгое. Здесь π = {π(1), π(2), …, π(n)} – перестановка номеров компонент i = 1, 2, …, n в векторе $f_{\uparrow}(m\xi)$, а ρ = {ρ(1), ρ(2), …, ρ(n)} – в векторе $f_{\uparrow}(k\xi + \varepsilon)$. Поскольку $f_{\pi(i)}(m\xi)$ – расстояния между точками на сетке, то они кратны ξ, а $f_{\rho(i)}(k\xi + \varepsilon)$ нет.

Поэтому все неравенства (П1) строгие, причем для каждого $i = 1, 2, ..., n$ верно

$$f_{\pi(i)}(m\xi) \le f_{\rho(i)}(k\xi) = f_{\rho(i)}(k\xi + \varepsilon) - \varepsilon,$$
$$\text{если } x_{\rho(i)} \le k\xi < k\xi + \varepsilon,$$
$$f_{\pi(i)}(m\xi) \le f_{\rho(i)}(k\xi + \xi) = f_{\rho(i)}(k\xi + \varepsilon) - (\xi - \varepsilon),$$
$$\text{если } k\xi + \varepsilon < k\xi + \xi \le x_{\rho(i)}.$$

Но при $x_{\rho(i)} \le k\xi$ верно $x_{\rho(i)} < k\xi + \lambda$ и $f_{\rho(i)}(k\xi + \lambda) = f_{\rho(i)}(k\xi) + \lambda > f_{\pi(i)}(m\xi)$. А при $k\xi + \xi \le x_{\rho(i)}$ верно $k\xi + \lambda < x_{\rho(i)}$ и $f_{\rho(i)}(k\xi + \lambda) = f_{\rho(i)}(k\xi + \xi) + (\xi - \lambda) > f_{\pi(i)}(m\xi)$. Следовательно,

$$f_{\pi(i)}(m\xi) < f_{\rho(i)}(k\xi + \lambda), \quad i = 1, ..., n,$$

т. е., точка $k\xi + \lambda$ оказывается доминируемой той же точкой $m\xi$.

Пусть теперь $(m\xi + \eta)\ P_E\ (k\xi + \varepsilon)$. Тогда согласно отношению (3) имеем неравенства

$$f_{\pi(i)}(m\xi + \eta) \le f_{\rho(i)}(k\xi + \varepsilon), \quad i = 1, 2, ..., n, \tag{П2}$$

среди которых хотя бы одно строгое. Здесь $\pi = \{\pi(1), \pi(2), \dots, \pi(n)\}$ – перестановка номеров компонент $i = 1, 2, \dots, n$ в векторе $f_{\uparrow}(m\xi + \eta)$.

Покажем, что в том же интервале $(m\xi;\ m\xi + \xi)$ найдется точка $(m\xi + \theta)$, $0 < \theta < \xi$, доминирующая точку $(k\xi + \lambda)$. Здесь нам понадобится тот факт, что точки множества X расположены в узлах «крупной» сетки с шагом $h = 2\xi$. Пусть для определенности этим узлам соответствуют узлы «мелкой» сетки с шагом ξ с четными номерами. Если число k четное, то левая граница интервала $(k\xi;\ k\xi + \xi)$ примыкает к узлу $k\xi$ «крупной» сетки; если же k нечетное, то правая граница примыкает к узлу $k\xi + \xi$ «крупной» сетки. Всего имеется четыре комбинации четности чисел k и m.

1. Пусть k – четное, m – четное. Рассмотрим i-е неравенство (П2). Возможны четыре варианта расположения точек $x_{\pi(i)}$ и $x_{\rho(i)}$ относительно интервалов.

1.1. $x_{\pi(i)} \le m\xi$, $x_{\rho(i)} \le k\xi$. Тогда

$$f_{\pi(i)}(m\xi + \eta) = f_{\pi(i)}(m\xi) + \eta, \;\; f_{\pi(i)}(m\xi + \theta) = f_{\pi(i)}(m\xi) + \theta,$$
$$f_{\rho(i)}(k\xi + \varepsilon) = f_{\rho(i)}(k\xi) + \varepsilon, \;\; f_{\rho(i)}(k\xi + \lambda) = f_{\rho(i)}(k\xi) + \lambda.$$

Из формулы (П2) следует $(f_{\pi(i)}(m\xi) < f_{\rho(i)}(k\xi)) \vee (f_{\pi(i)}(m\xi) = f_{\rho(i)}(k\xi) \wedge \eta \le \varepsilon)$.

Если $f_{\pi(i)}(m\xi) < f_{\rho(i)}(k\xi)$, то $\forall\theta\in(0;\ \xi)$ выполняется $f_{\pi(i)}(m\xi + \theta) < f_{\rho(i)}(k\xi + \lambda)$.

Если $f_{\pi(i)}(m\xi) = f_{\rho(i)}(k\xi)$, то $\forall\theta\in(0;\ \lambda]$ выполняется $f_{\pi(i)}(m\xi + \theta) \le f_{\rho(i)}(k\xi + \lambda)$.

Причем если i-е неравенство в (П2) выполняется как равенство, то должно быть $\eta = \varepsilon$, а θ также можно выбрать равным λ.

1.2. $x_{\pi(i)} \le m\xi$, $x_{\rho(i)} > k\xi$. Тогда

$$f_{\pi(i)}(m\xi + \eta) = f_{\pi(i)}(m\xi) + \eta, \;\; f_{\pi(i)}(m\xi + \theta) = f_{\pi(i)}(m\xi) + \theta,$$
$$f_{\rho(i)}(k\xi + \varepsilon) = f_{\rho(i)}(k\xi + 2\xi) + 2\xi - \varepsilon,$$
$$f_{\rho(i)}(k\xi + \lambda) = f_{\rho(i)}(k\xi + 2\xi) + 2\xi - \lambda.$$

Из формулы (П2) следует $f_{\pi(i)}(m\xi) < f_{\rho(i)}(k\xi + 2\xi)$. Тогда для $\forall\theta\in(0;\ \xi)$ выполняется $f_{\pi(i)}(m\xi + \theta) < f_{\rho(i)}(k\xi + \lambda)$.

1.3. $x_{\pi(i)} > m\xi$, $x_{\rho(i)} \le k\xi$. Тогда

$$f_{\pi(i)}(m\xi + \eta) = f_{\pi(i)}(m\xi + 2\xi) + 2\xi - \eta,$$
$$f_{\pi(i)}(m\xi + \theta) = f_{\pi(i)}(m\xi + 2\xi) + 2\xi - \theta,$$
$$f_{\rho(i)}(k\xi + \varepsilon) = f_{\rho(i)}(k\xi) + \varepsilon, \;\; f_{\rho(i)}(k\xi + \lambda) = f_{\rho(i)}(k\xi) + \lambda.$$

Из формулы (П2) следует $f_{\pi(i)}(m\xi + 2\xi) < f_{\rho(i)}(k\xi)$. Тогда $\forall\theta\in(0;\ \xi)$ выполняется $f_{\pi(i)}(m\xi + \theta) < f_{\rho(i)}(k\xi + \lambda)$.

1.4. $x_{\pi(i)} > m\xi$, $x_{\rho(i)} > k\xi$. Тогда

$$f_{\pi(i)}(m\xi + \eta) = f_{\pi(i)}(m\xi + 2\xi) + 2\xi - \eta,$$
$$f_{\pi(i)}(m\xi + \theta) = f_{\pi(i)}(m\xi + 2\xi) + 2\xi - \theta,$$
$$f_{\rho(i)}(k\xi + \varepsilon) = f_{\rho(i)}(k\xi + 2\xi) + 2\xi - \varepsilon,$$
$$f_{\rho(i)}(k\xi + \lambda) = f_{\rho(i)}(k\xi + 2\xi) + 2\xi - \lambda.$$

Из формулы (П2) следует $(f_{\pi(i)}(m\xi + 2\xi) < f_{\rho(i)}(k\xi + 2\xi)) \vee (f_{\pi(i)}(m\xi + 2\xi) = f_{\rho(i)}(k\xi + 2\xi) \wedge \eta \ge \varepsilon)$.

Если $f_{\pi(i)}(m\xi + 2\xi) < f_{\rho(i)}(k\xi + 2\xi)$, то $\forall\theta\in(0;\ \xi)$ выполняется $f_{\pi(i)}(m\xi + \theta) < f_{\rho(i)}(k\xi + \lambda)$.

Если $f_{\pi(i)}(m\xi + 2\xi) = f_{\rho(i)}(k\xi + 2\xi)$, то $\forall\theta\in[\lambda;\ \xi)$ выполняется $f_{\pi(i)}(m\xi + \theta) \le f_{\rho(i)}(k\xi + \lambda)$.

Причем если i-е неравенство в (П2) выполняется как равенство, то должно быть $\eta = \varepsilon$, а θ также можно выбрать равным λ.

Если в разных неравенствах (П2) встречаются случаи 1.1 и 1.4, из которых следует одновременно $\eta \le \varepsilon$ и $\eta \ge \varepsilon$, то такое возможно только при $\eta = \varepsilon$, тогда и θ должно быть равным λ. В результате получаем

$$f_{\pi(i)}(m\xi + \theta) \le f_{\rho(i)}(k\xi + \lambda), \quad i = 1, 2, ..., n, \tag{П3}$$

причем, если в (П2) есть строгое неравенство, то и в (П3) соответствующее неравенство строгое. Таким образом, для случая, когда k четное и m четное, доказано существование θ такого, что $(m\xi + \theta)\ P_E\ (k\xi + + \lambda)$.

2. Пусть теперь k – четное, m – нечетное. Рассмотрим i-е неравенство (П2). Возможны четыре варианта расположения точек $x_{\pi(i)}$ и $x_{\rho(i)}$ относительно интервалов.

2.1. $x_{\pi(i)} \le m\xi$, $x_{\rho(i)} \le k\xi$. Тогда

$$f_{\pi(i)}(m\xi + \eta) = f_{\pi(i)}(m\xi - \xi) + \xi + \eta,$$
$$f_{\pi(i)}(m\xi + \theta) = f_{\pi(i)}(m\xi - \xi) + \xi + \theta,$$
$$f_{\rho(i)}(k\xi + \varepsilon) = f_{\rho(i)}(k\xi) + \varepsilon, \;\; f_{\rho(i)}(k\xi + \lambda) = f_{\rho(i)}(k\xi) + \lambda.$$

Из формулы (П2) следует $f_{\pi(i)}(m\xi - \xi) < f_{\rho(i)}(k\xi)$. Тогда $\forall\theta\in(0;\ \xi)$ выполняется $f_{\pi(i)}(m\xi + \theta) < f_{\rho(i)}(k\xi + \lambda)$.

2.2. $x_{\pi(i)} \le m\xi$, $x_{\rho(i)} > k\xi$. Тогда

$$f_{\pi(i)}(m\xi + \eta) = f_{\pi(i)}(m\xi - \xi) + \xi + \eta,$$
$$f_{\pi(i)}(m\xi + \theta) = f_{\pi(i)}(m\xi - \xi) + \xi + \theta,$$
$$f_{\rho(i)}(k\xi + \varepsilon) = f_{\rho(i)}(k\xi + 2\xi) + 2\xi - \varepsilon,$$
$$f_{\rho(i)}(k\xi + \lambda) = f_{\rho(i)}(k\xi + 2\xi) + 2\xi - \lambda.$$

Из формулы (П2) следует $(f_{\pi(i)}(m\xi - \xi) < f_{\rho(i)}(k\xi + 2\xi)) \vee (f_{\pi(i)}(m\xi - \xi) = f_{\rho(i)}(k\xi + 2\xi) \wedge \eta \le (\xi - \varepsilon))$.

Если $f_{\pi(i)}(m\xi - \xi) < f_{\rho(i)}(k\xi + 2\xi)$, то $\forall\theta\in(0;\ \xi)$ выполняется $f_{\pi(i)}(m\xi + \theta) < f_{\rho(i)}(k\xi + \lambda)$.

Если $f_{\pi(i)}(m\xi - \xi) = f_{\rho(i)}(k\xi + 2\xi)$, то $\forall\theta\in(0;\ (\xi - \lambda)]$ выполняется $f_{\pi(i)}(m\xi + \theta) \le f_{\rho(i)}(k\xi + \lambda)$.

Причем если i-е неравенство в (П2) выполняется как равенство, то должно быть $\eta = (\xi - \varepsilon)$, а θ также можно выбрать равным $(\xi - \lambda)$.

2.3. $x_{\pi(i)} > m\xi$, $x_{\rho(i)} \le k\xi$. Тогда

$$f_{\pi(i)}(m\xi + \eta) = f_{\pi(i)}(m\xi + \xi) + \xi - \eta,$$

$$f_{\pi(i)}(m\xi + \theta) = f_{\pi(i)}(m\xi + \xi) + \xi - \theta,$$

$$f_{\rho(i)}(k\xi + \varepsilon) = f_{\rho(i)}(k\xi) + \varepsilon,\ \ f_{\rho(i)}(k\xi + \lambda) = f_{\rho(i)}(k\xi) + \lambda.$$

Из формулы (П2) следует $(f_{\pi(i)}(m\xi + \xi) < f_{\rho(i)}(k\xi)) \vee (f_{\pi(i)}(m\xi + \xi) = f_{\rho(i)}(k\xi) \wedge \eta \ge (\xi - \varepsilon))$.

Если $f_{\pi(i)}(m\xi + \xi) < f_{\rho(i)}(k\xi)$, то $\forall\theta\in(0;\ \xi)$ выполняется $f_{\pi(i)}(m\xi + \theta) < f_{\rho(i)}(k\xi + \lambda)$.

Если $f_{\pi(i)}(m\xi + \xi) = f_{\rho(i)}(k\xi)$, то $\forall\theta\in[(\xi - \lambda);\ \xi]$ выполняется $f_{\pi(i)}(m\xi + \theta) \le f_{\rho(i)}(k\xi + \lambda)$.

Причем если i-е неравенство в (П2) выполняется как равенство, то должно быть $\eta = (\xi - \varepsilon)$, а θ также можно выбрать равным $(\xi - \lambda)$.

2.4. $x_{\pi(i)} > m\xi$, $x_{\rho(i)} > k\xi$. Тогда

$$f_{\pi(i)}(m\xi + \eta) = f_{\pi(i)}(m\xi + \xi) + \xi - \eta,$$

$$f_{\pi(i)}(m\xi + \theta) = f_{\pi(i)}(m\xi + \xi) + \xi - \theta,$$

$$f_{\rho(i)}(k\xi + \varepsilon) = f_{\rho(i)}(k\xi + 2\xi) + 2\xi - \varepsilon,$$

$$f_{\rho(i)}(k\xi + \lambda) = f_{\rho(i)}(k\xi + 2\xi) + 2\xi - \lambda.$$

Из формулы (П2) следует $f_{\pi(i)}(m\xi + \xi) < f_{\rho(i)}(k\xi + 2\xi)$. Тогда $\forall\theta\in(0;\ \xi)$ выполняется $f_{\pi(i)}(m\xi + \theta) < f_{\rho(i)}(k\xi + \lambda)$.

Если в разных неравенствах (П2) встречаются случаи 2.2 и 2.3, из которых следует одновременно $\eta \le (\xi - \varepsilon)$ и $\eta \ge (\xi - \varepsilon)$, то такое возможно только при $\eta = (\xi - \varepsilon)$, тогда и θ должно быть равным $(\xi - \lambda)$. В результате получаем неравенства (П3), причем если в (П2) есть строгое неравенство, то и в (П3) соответствующее неравенство строгое. Таким образом, для случая, когда k четное, а m нечетное, также доказано существование θ такого, что $(m\xi + \theta)\ P_E\ (k\xi + \lambda)$.

Для комбинаций k – нечетное, m – нечетное; k – нечетное, m – четное доказательства проводятся аналогично. В итоге доказана первая часть утверждения 2: если произвольная точка из интервала $(k\xi;\ k\xi + \xi)$ доминируема по P_E на Re, то доминируема и любая другая точка из этого интервала.

Докажем теперь, что если произвольная точка $k\xi + \varepsilon$, где k – целое, $0 < \varepsilon < \xi$, из интервала $(k\xi;\ k\xi + \xi)$ не доминируема по P_E на Re, то недоминируема по P_E на Re и любая другая точка $k\xi + \lambda$, $0 < \lambda < \xi$, из этого интервала. Предположим обратное, что точка $k\xi + \lambda$ доминируема по P_E на Re. Но тогда из доказанного выше следует, что и точка $k\xi + \varepsilon$ доминируема по P_E. А это противоречит сделанному предположению. Вторая часть утверждения 2 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Bullen P.S.* Handbook of Means and Their Inequality. – Dordrecht: Springer, 2003. – 538 p.
2. *Lawrence M.L.* Mathematical Statistics. – London: Ascended Idea, 2020. – 518 p.
3. *Джини К.* Средние величины. – М.: Статистика, 1970. – 447 с. [*Gini, C.* Le Medie. – Torino: Ulet, 1957.]
4. *Подиновский В.В., Нелюбин А.П.* Средние величины: многокритериальный подход // Проблемы управления. – 2020. – № 5. – С. 3–16. [*Podinovski, V.V., Nelyubin, A.P.* Mean Quantities: A Multicriteria Approach // Control Sciences. – 2020. – No. 5. – P. 3–16.] (In Russian)]
5. *Подиновский В.В., Нелюбин А.П.* Средние величины: многокритериальный подход. II // Проблемы управления. – 2021. – № 2. – С. 33–41. [*Podinovski, V.V., Nelyubin, A.P.* Means: A Multicriteria Approach. Part II // Control Sciences. – 2021. – No. 2. – P. 33–41.] (In Russian)]
6. *Пфанцагль И.* Теория измерений. – М.: Мир, 1976. [*Pfanzagl, J.* Theory of Measurement. – Berlin: Springer, 1971. – 235 p.]
7. *Roberts, F.S.* Measurement Theory: With Applications to Decisionmaking, Utility, and Social Sciences (Encyclopedia of Mathematics and its Applications). – Cambridge: Cambridge University Press, 1984. – 420 p.

Статья представлена к публикации членом редколлегии Ф.Т. Алескеровым.

Поступила в редакцию 29.08.2023,
после доработки 25.09.2023.
Принята к публикации 25.10.2023.

Нелюбин Андрей Павлович – канд. физ.-мат. наук, Институт машиноведения им. А.А. Благонравова Российской академии наук, г. Москва, ✉ nelubin@gmail.com,
ORCID iD: https://orcid.org/0000-0002-7064-3103

Подиновский Владислав Владимирович – д-р техн. наук, Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», г. Москва, ✉ podinovski@mail.ru.
ORCID iD: https://orcid.org/0000-0002-4859-5942

MEAN VALUES: A MULTICRITERIA APPROACH. PART III

A.P. Nelyubin* and V.V. Podinovski**

*Mechanical Engineering Research Institute, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia
**National Research University Higher School of Economics, Moscow, Russia

*✉ nelubin@gmail.com, **✉ podinovski@mail.ru

Abstract. A new approach to defining mean values based on the ideas of multicriteria optimization was proposed and developed previously; see the papers [4] and [5]. The distances between the current point and the sample points were treated as components of a vector estimate. The conventional approach to defining mean values involves the scalarization of vector estimates: they are replaced, e.g., by the sums of their squared components. On the contrary, we proceeded from comparing vector estimates by preference. Several types of mean values corresponding to different amounts of information about preferences were considered. The properties of such mean values were investigated, and computational methods for constructing them were given. However, in the case of equally important criteria, the method turns out to be approximate and rather computationally intensive. In this paper, we present an exact and efficient numerical method for constructing a set of mean values of the specified type. The method is illustrated by a computational example.

Keywords: mean values, multicriteria choice problems, preference relations, criteria importance theory.

Acknowledgments. This work was supported in part by the International Center of Decision Choice and Analysis.