

# АЛГОРИТМ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ МНОГОМЕРНЫМИ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИМИ ОБЪЕКТАМИ ПРИ ИЗМЕНЕНИИ ИХ ПРОИЗВОДИТЕЛЬНОСТИ НА ДЛИТЕЛЬНОМ ИНТЕРВАЛЕ ВРЕМЕНИ<sup>1</sup>

Д.Ю. Муромцев, А.Н. Грибков, И.В. Тюрин, В.Н. Шамкин

**Аннотация.** Обсуждены вопросы управления сложными энерго- и ресурсоемкими технологическими объектами, работающими в режимах переменной производительности по получаемым продуктам на длительном интервале времени, с помощью алгоритмов дестабилизационной оптимизации. Рассмотрена линейная задача дестабилизационной оптимизации режимов многомерного технологического объекта, функционирующего на интервале времени, когда его производительность меняется дважды, при избыточности управляющих воздействий, влияющих на координаты состояния объекта, появляющиеся в результате дестабилизации. Задача декомпозирована на совокупность линейных одномерных задач дестабилизационной оптимизации с избыточностью управляющих воздействий, в основе решения которых лежит сформулированная теорема и разработанный на ее основе алгоритм. Геометрически проиллюстрирована работа этого алгоритма с указанием получаемого эффекта. Продемонстрирована возможность применения дестабилизационного управления реальным производственным объектом — крупной воздухоразделительной установкой низкого давления. Отмечена необходимость разработки алгоритма решения линейной задачи дестабилизационной оптимизации режимов многомерного технологического объекта с избыточностью управляющих воздействий, функционирующего при неоднократном изменении его производительности на интервале времени.

**Ключевые слова:** дестабилизация, интервал времени, интегральный критерий, многомерный объект, оптимизация, производительность, оптимальное управление, дополнительный эффект.

## ВВЕДЕНИЕ

Переход к анализу функционирования технологического объекта на некотором интервале времени открывает новые возможности оптимизации технологических режимов, обеспечивающих требуемые производительности. Такой переход возможен благодаря введению дополнительных (дестабилизационных) управляющих воздействий, расширяющих область допустимых управлений объекта. Возможность формирования дополнительных воз-

действий появляется в результате снятия ограничений на постоянство технологических параметров, характеризующих протекающие в объекте процессы и поддерживаемых с помощью автоматических систем регулирования. Другими словами, определенным образом организуется допустимое изменение упомянутых параметров на всем интервале времени, т. е. обеспечивается «режим дестабилизации» технологического процесса. В результате решения возникающей задачи оптимизации возможно получение дополнительного экономического эффекта по сравнению с традиционным решением задачи обеспечения требуемой производительности объекта. Естественно, что при этом наибольший эффект достижим именно в много-

<sup>1</sup> Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект № 18-08-00555-а.

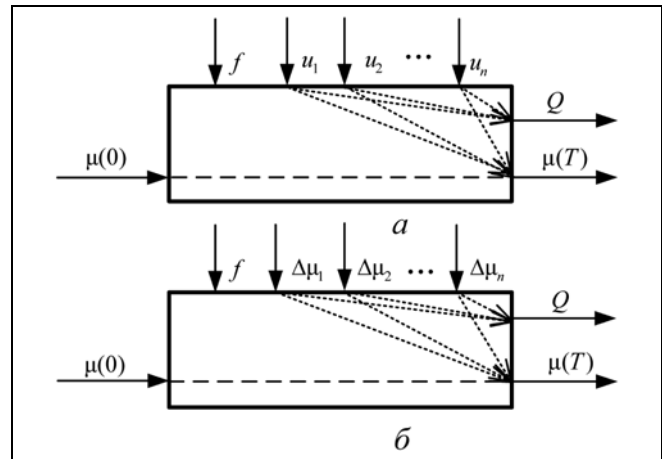
мерных технологических объектах, где дестабилизирующих управлений может быть несколько и необходимо экономить ресурсы.

Поиск возможностей управления многомерными объектами путем применения различных научных подходов описан в работах [1–10]. В частности, управление многомерными объектами, работающими при наличии случайных возмущений, и повышение качества процессов управления ряд авторов видят в применении адаптивного [1] и робастного управлений [2, 3]. Среди работ, посвященных оптимальному управлению, отметим публикации: [4], в которой для одного класса линейных многомерных объектов решается задача синтеза динамической управляющей подсистемы; [5], где описывается метод оптимального управления в реальном времени многомерным линейным динамическим объектом; [6], в которой решается задача синтеза систем автоматического управления неустойчивыми многомерными объектами. Настоящая статья продолжает исследования, результаты которых изложены в публикациях: [7], где введены основные понятия и сформулирована задача дестабилизационной оптимизации, поставлена, теоретически обоснована и решена линейная двухуровневая многомерная задача оптимизации технологического объекта, функционирующего при переменной производительности по выпускаемой продукции, когда его производительность меняется дважды; [8], в которой дана формализованная постановка линейной многоуровневой задачи управления такими объектами при неоднократном изменении заданий по их производительности, показано, что задача может быть декомпозирована на совокупность линейных  $n$ -уровневых одномерных задач, сформулирована одна из них, которая сведена к тождественной задаче, более приемлемой в смысле ее последующего решения; [9], где дано теоретическое обоснование решения линейной  $n$ -уровневой одномерной задачи; [10], в которой предложен алгоритм дестабилизационного управления многомерными технологическими объектами при неоднократном изменении их производительности на длительном интервале времени и дана геометрическая иллюстрация алгоритма.

## 1. ПОСТАНОВКА ЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧИ ДЕСТАБИЛИЗАЦИОННОЙ ОПТИМИЗАЦИИ ПРИ ИЗБЫТОЧНОСТИ УПРАВЛЯЮЩИХ ВОЗДЕЙСТВИЙ

### 1.1. Предварительные замечания

Далее рассмотрим задачу, формулируемую в соответствии с принятыми в работе [7] основными понятиями и допущениями, для случая, когда на каждую координату состояния  $\mu$ , характеризующую меру небаланса, появляющегося в результате дестабилизации, влияет не только свое, соответ-



**Рис. 1.** Мнемоническая схема дестабилизационной оптимизации при избыточности управляющих воздействий: *a* — в терминах управлений ( $u_1, u_2, \dots, u_n$ ) или ( $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ ); *б* — в терминах управлений ( $\Delta\mu_1, \Delta\mu_2, \dots, \Delta\mu_n$ )

ствующее ей, дополнительное управляющее воздействие, но и другие управления (как бы присутствует избыток управлений).

Согласно сформулированной в работе [7] линейной двухуровневой многомерной задаче дестабилизационной оптимизации, рассматриваемой при условии, что производительность объекта на интервале времени  $[0, T]$  меняется дважды, и доказанной основной теореме, эту задачу можно представить в виде совокупности квазинезависимых (локальных) задач, о чем свидетельствует приведенная там же мнемоническая схема оптимизации. Поэтому ее авторы вначале исследовали одномерный случай, когда имелось одно управление  $u$  и одна координата состояния  $\mu$ , а затем перешли к обобщениям.

Заявленная задача рассматривается также на примере одной локальной задачи, в которой объект имеет  $n$  управлений  $u_1, u_2, \dots, u_n$ , влияющих на одну координату состояния  $\mu$ . Мнемоническая схема дестабилизационной оптимизации для такого объекта с избыточностью управляющих воздействий представлена на рис. 1.

Заметим, что управление  $\omega_i(t) = u(t) - \dot{u}_i(t)$ ,  $i = \overline{1, n}$ , характеризует отклонение в момент  $t$  управления  $u_i(t)$  от стабилизирующего управления  $\dot{u}_i(t)$ , при котором поддерживается (стабилизируется) оптимальный статический режим объекта, соответствующий его производительности, заданной значением возмущения  $f$ .

Далее в п. 1.1 аналогично работе [7] формулируется с учетом условий (см. Приложение в конце настоящей статьи) следующая двухуровневая задача.



**1.2. Задача дестабилизационной оптимизации с избыточными управляющими воздействиями в терминах управлений  $(u_1, u_2, \dots, u_n)$  или  $(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)$**

Найти для заданной периодической с периодом  $T$  двухуровневой функции  $f(t) = (f_1, f_2, t_1)$  оптимальное управление  $\omega^*(t) = (\omega_1^*(t), \dots, \omega_n^*(t))$ , определенное на интервале  $[0, T]$ , и начальное состояние  $\mu^*(0)$ , характеризующее нарушение некоторого баланса в начальный момент времени, при которых принимает минимальное значение функционал

$$I(f, \omega) = \int_0^T Q(f(t), u(t))dt = \int_0^T \left[ a(f(t)) + \sum_{i=1}^n b_i(f(t)) \dot{u}_i(t) + \sum_{i=1}^n b_i(f(t)) \omega_i(t) \right] dt, \quad (1)$$

заданный на множестве кусочно-постоянных функций, в котором подынтегральная функция  $Q(f(t), u(t))$  в любой момент времени  $t$  представлена в виде семейства параметрических  $n$ -мерных плоскостей, и в любой момент времени  $t$  удовлетворяются соотношения

$$\omega_i^H(t) \leq \omega_i(t) \leq \omega_i^B(t), \quad i = \overline{1, n}, \quad (2)$$

$$\mu^H \leq \mu(t) \leq \mu^B, \quad (3)$$

$$\mu(0) = \mu(T), \quad (4)$$

$$\mu(t) = \mu(0) + \int_0^t \sum_{i=1}^n \beta_i(f(t)) \omega_i(t) dt, \quad (5)$$

где

$$\begin{cases} \omega_i^H(t) = \omega_i^H(f(t)) = u_i^H(f(t)) - \dot{u}_i(f(t)), \\ \omega_i^B(t) = \omega_i^B(f(t)) = u_i^B(f(t)) - \dot{u}_i(f(t)), \quad i = \overline{1, n}. \end{cases} \quad (6)$$

Здесь  $Q(f(t), u(t))$  — подынтегральная функция;  $a(f(t)), b_i(f(t)); \beta_i(f(t)), i = \overline{1, n}$ , — коэффициенты, являющиеся функциями возмущения  $f(t)$  в соответствующий момент времени  $t$ ;  $u_i^H(f(t)), u_i^B(f(t)); \omega_i^H(f(t)), \omega_i^B(f(t)), i = \overline{1, n}$ , — соответственно нижние и верхние допустимые значения управлений  $u_i$  и  $\omega_i$  при возмущении  $f(t)$  в момент времени  $t$ ;  $\mu^H$  и  $\mu^B$  — допустимые пределы изменения показателя  $\mu$  нарушения балансового соотношения при любом  $t \in [0, T]$ .

Выполненный анализ задачи (1)–(6) в виде доказанных теорем и следствий, показал, что она может быть переформулирована в терминах новых управлений  $\Delta\mu_i = \beta_i^1 \omega_i^1 t_1$ , характеризующих изменение показателя  $\mu$  за время  $[0, t_1]$  при действии управлений  $\omega_i^1, i = \overline{1, n}$ .

**1.3. Задача дестабилизационной оптимизации с избыточными управляющими воздействиями в терминах управлений  $(\Delta\mu_1, \Delta\mu_2, \dots, \Delta\mu_n)$**

Обозначим  $\Delta\mu(t) = \mu(t) - \mu(0)$ , тогда из соотношения (5) получим

$$\Delta\mu(t) = \int_0^t \sum_{i=1}^n \beta_i(f(t)) \omega_i(t) dt$$

или

$$\Delta\mu(t) = \sum_{i=1}^n \Delta\mu_i(t),$$

где

$$\Delta\mu_i(t) = \int_0^t \beta_i(f(t)) \omega_i(t) dt, \quad i = \overline{1, n}.$$

Из условия периодичности (4) имеем

$$\Delta\mu(T) = \int_0^T \sum_{i=1}^n \beta_i(f(t)) \omega_i(t) dt = 0, \quad (7)$$

следовательно,

$$\int_0^T \beta_i(f(t)) \omega_i(t) dt = 0, \quad i = \overline{1, n}. \quad (8)$$

С учетом выражений (7) и (8) имеет место следующая задача.

Найти для заданной периодической с периодом  $T$  двухуровневой функции  $f(t) = (f_1, f_2, t_1)$  оптимальное управление  $\Delta\mu^*(t) = (\Delta\mu_1^*, \Delta\mu_2^*, \dots, \Delta\mu_n^*)$ , начальное  $\mu_0^*$  и конечное  $\mu_{\text{кон}}^* = \mu(t_1)$  значения, при которых достигает минимума функционал

$$I(f, \Delta\mu) = A + \sum_{i=1}^n B_i \Delta\mu_i, \quad (9)$$

в любой момент времени удовлетворяются соотношения

$$\underline{\Delta\mu}_i \leq \Delta\mu_i \leq \overline{\Delta\mu}_i \quad (10)$$

и

$$\mu(t_1) = \mu_{\text{кон}} = \mu(0) + \sum_{i=1}^n \Delta\mu_i, \quad (11)$$

$$\mu^H \leq \mu(t_1) \leq \mu^B, \quad (12)$$

где

$$A = a_1 t_1 + a_2 (T - t_1) + \sum_{i=1}^n b_i^1 \dot{u}_i^1 t_1 + \sum_{i=1}^n b_i^2 \dot{u}_i^2 (T - t_1), \quad (13)$$

$$B_i = \left( \frac{b_i^1}{\beta_i^1} - \frac{b_i^2}{\beta_i^2} \right). \quad (14)$$

Здесь  $a_1 = a(f_1)$ ,  $a_2 = a(f_2)$ ;  $b_i^1 = b_i(f_1)$ ,  $b_i^2 = b_i(f_2)$ ,  
 $\beta_i^1 = \beta_i(f_1)$ ,  $\beta_i^2 = \beta_i(f_2)$ ,  $i = \overline{1, n}$ .

В основе решения задачи (7)–(14) лежит доказанная теорема, сформулированная после проведенного, подобно работе [7], теоретического обоснования решаемой задачи.

**Теорема.** Пусть возмущение  $f = (f_1, f_2, t_1)$  — двухуровневая периодическая с периодом  $T$  функция, последовательность  $B_i$  нормально упорядочена, функции  $\beta_i(f)$  при фиксированном  $i$  знакопостоянные (при этом значения  $\beta_i(f)$  и  $\beta_j(f)$  могут быть различными, если  $i \neq j$ ). В этом случае существуют оптимальное начальное значение  $\mu^*(0)$ , оптимальное конечное значение  $\mu^*(t_1)$  и оптимальное нормально упорядоченное двухуровневое периодическое с периодом  $T$  управление  $\omega(t) = (\omega_1^*, \omega_2^*, t_1)$ , определяемое соотношениями:

$$\omega_i^{1*} = \Delta\mu_i^* / \beta_i^1 t_1, \quad (15)$$

$$\omega_i^{2*} = -\frac{\beta_i^1}{\beta_i^2} \frac{t_1}{T-t_1} \omega_1^*, \quad (16)$$

$$\Delta\mu_i^* = \min(\overline{\Delta\mu}_i, \bar{\mu}_g^i, -\mu_{i-1}^*), \quad (17)$$

$$\bar{\mu}_g^i = \mu^*(t_1) - \sum_{j=i}^n \Delta\mu_j, \quad (18)$$

$$\mu_{i-1}^* = \mu^*(0) + \sum_{j=1}^{i-1} \Delta\mu_j, \quad i = \overline{2, n}, \quad \mu_0 = \mu^*,$$

$$\mu^*(0) = \begin{cases} \mu^B, & \text{если } B_1 > 0; \\ \mu^H, & \text{если } B_n < 0; \\ \mu^H \text{ или } \mu^B, & \text{если } B_n > 0, \text{ а } B_1 < 0, \end{cases} \quad (19)$$

$$\mu^*(t_1) = \begin{cases} \mu^B, & \text{если } \mu^*(0) = \mu^H; \\ \mu^H, & \text{если } \mu^*(0) = \mu^B, \end{cases} \quad (20)$$

где

$$\Delta\mu_i = \min\left(\frac{\omega_i^1}{\beta_i^1 t_1}, \frac{\bar{\omega}_i^1}{\beta_i^1 t_1}\right), \quad \Delta\bar{\mu}_i = \max\left(\frac{\omega_i^1}{\beta_i^1 t_1}, \frac{\bar{\omega}_i^1}{\beta_i^1 t_1}\right), \quad (21)$$

$$\omega_i^1 = \max\left(\omega_i^H(f_1), -\omega_i^B(f_2) \frac{\beta_i^1}{\beta_i^2} \frac{t_1}{T-t_1}\right),$$

$$\bar{\omega}_i^1 = \min\left(\omega_i^B(f_1), -\omega_i^H(f_2) \frac{\beta_i^1}{\beta_i^2} \frac{t_1}{T-t_1}\right), \quad (22)$$

где  $\Delta\mu_i$  и  $\Delta\bar{\mu}_i$  — минимально и максимально возможные изменения состояния  $\mu$  при работе в течение времени  $t_1$  при возмущении  $f_1$  и управлении  $u_i$ ;  $\omega_i^1$  и

$\bar{\omega}_i^1$  — минимально и максимально возможные управления  $\omega_i$ . ♦

Заметим, что управление упорядочено в соответствии со значением коэффициента  $B_i$ , так, что если  $i < j$ , то  $B_i < B_j$ , т. е. с увеличением индекса  $i$  значение  $B_i$  увеличивается, а сама последовательность управлений  $\omega_i$  называется нормально упорядоченной.

## 2. АЛГОРИТМ РАСЧЕТА ОПТИМАЛЬНЫХ УПРАВЛЕНИЙ, РЕАЛИЗУЮЩИЙ УТВЕРЖДЕНИЯ ТЕОРЕМЫ

По формуле (14) для каждого управления  $u_i$  вычисляется показатель  $B_i$ , все управления ранжируются в соответствии с возрастанием показателя  $B_i$  и проверяется знак  $B_i$ . Если  $B_1 > 0$ , то все показатели  $B_i$  положительны, и, согласно условию (19) теоремы, оптимальное начальное значение координаты состояния  $\mu^*(0) = \mu^B$ , т. е. равно верхнему пределу  $\mu^B$ . Если  $B_1 < 0$  и  $B_n < 0$ , то, согласно условию (19), все показатели  $B_i$  отрицательны и начальное значение  $\mu^*(0) = \mu^H$ , т. е. равно нижнему пределу  $\mu^H$ . Наконец, если  $B_1 < 0$ , а  $B_n > 0$ , то оптимальным состоянием  $\mu^*(0)$  будет либо  $\mu^H$ , либо  $\mu^B$ . В первом и втором случаях далее рассчитываются оптимальные управления  $u$  при  $\mu^*(0) = \mu^B$  и  $\mu^*(0) = \mu^H$  соответственно. В третьем случае последовательно проводятся два расчета управлений  $u^*$  при  $\mu^*(0) = \mu^H$  и при  $\mu^*(0) = \mu^B$ , а затем выбирается из двух расчетов наилучший.

Оптимальные управления  $u^*$  находятся следующим образом. Определяется, согласно условию (20), конечное значение координаты состояния  $\mu(t_1)$  в момент  $t_1$  переключения возмущающего воздействия  $f$ , причем, если  $\mu(0) = \mu^H$ , то  $\mu(t_1) = \mu^B$ , а если  $\mu(0) = \mu^B$ , то  $\mu(t_1) = \mu^H$ . Затем в цикле определяются по выражениям (22) максимально возможное  $\bar{\omega}_i^1$  и минимально возможное  $\omega_i^1$  управления, а по выражениям (21) максимально возможное  $\Delta\bar{\mu}_i$  и минимально возможное  $\Delta\mu_i$  изменение состояния  $\mu$  за время  $t_1$  при возмущении  $f_1$  и управлении  $u_i$ . При этом  $\bar{\omega}_i^1$  выбирается как минимальное из физически осуществимых управлений  $\omega_i^B(f_1)$  и максимального управления  $-\omega_i^H(f_2) \frac{\beta_i^1}{\beta_i^2} \frac{t_1}{T-t_1}$ , при котором еще возможен периодический режим. Анало-



гично,  $\underline{\omega}_i^1 < 0$  выбирается как максимальное из физически осуществимого  $\omega_i^H(f_1) < 0$  и минимально возможного  $-\omega_i^B(f_2) \frac{\beta_i^1}{\beta_i^2} \frac{t_1}{T-t_1}$ , при котором еще осуществим периодический режим. По найденным значениям  $\overline{\omega}_i^1$  и  $\underline{\omega}_i^1$ , с помощью выражений (21), определяются приращения  $\Delta\bar{\mu}_i$  и  $\Delta\underline{\mu}_i$ . Далее определяется по формуле (18) линия достижимости  $\bar{\mu}_g^i$ ,  $i = \overline{1, n}$ , конечного состояния  $\mu(t_1)$ . После этого в цикле с помощью выражения (17) рассчитываются оптимальные управления  $\omega_i^{1*}$  и  $\omega_i^{2*}$  по формулам (15) и (16) для случая, когда максимально возможное приращение состояния  $\Delta\bar{\mu}_i$  от  $i$ -го управления меньше расстояния до линии достижимости  $\Delta\mu_g$ :  $\Delta\bar{\mu}_i \leq \mu_g^i - \mu_{i-1}^*$ , и когда  $\Delta\bar{\mu}_i$  больше расстояния до линии достижимости  $\Delta\mu_g$ :  $\Delta\bar{\mu}_i > \mu_g^i - \mu_{i-1}^*$ .

### 3. ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ РАБОТЫ АЛГОРИТМА

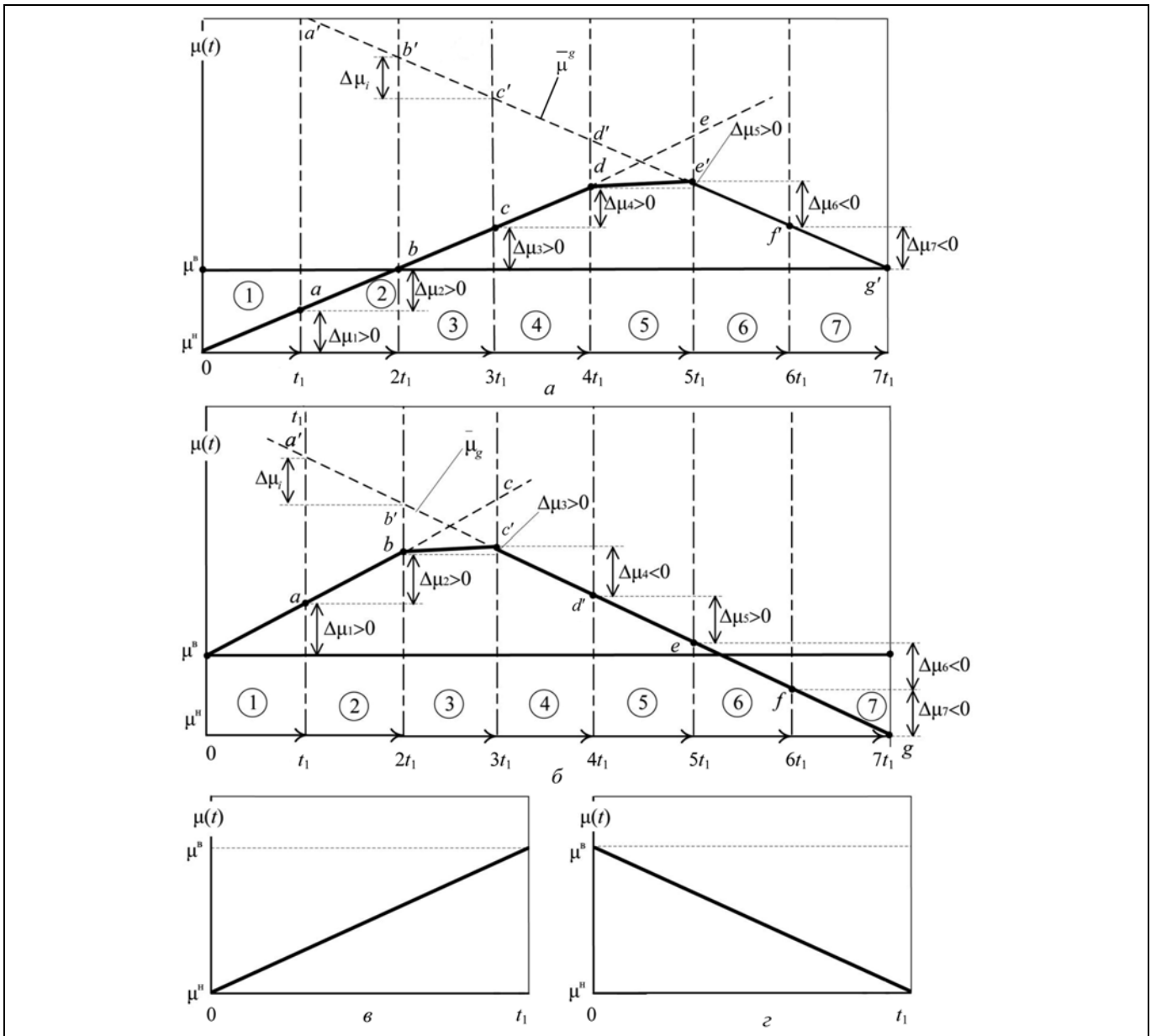
На рис. 2 приведена геометрическая иллюстрация работы алгоритма с избыточными управляющими воздействиями в терминах управлений ( $\Delta\mu_1, \Delta\mu_2, \dots, n$ ). Работа алгоритма разбита на этапы 1, 2, ..., 7.

На рис. 2, *а* первый этап отображает изменения координаты состояния  $\mu(t)$ , если в течение времени  $[0, t_1]$  действует только одно управление  $\omega_1^1$ , а остальные управления равны нулю. Достигнутое при этом состояние  $\mu + \Delta\mu_1$  в конце первого этапа называем состоянием перед вторым этапом (точка *а*). На втором этапе действуют два управления  $\omega_1^1$  и  $\omega_2^1$ , остальные равны нулю. Приращение координаты состояния  $\Delta\mu_2 > 0$  на интервале  $[t_1, 2t_1]$  обусловлено действием второго управления. Состояние  $\mu(t)$  перед третьим этапом обозначено буквой *б*. Для этапов 1–5 управление  $\omega_i^1 > 0$ , и координата состояния  $\mu$  увеличивается, а на этапе 6 управление  $\omega_i^1 < 0$ , и координата состояния уменьшается. Из рисунка следует, что ее уменьшение в результате действия управления  $\omega_6^1 < 0$  составит  $\Delta\mu_6 < 0$ . Состояние  $\mu(t)$  при одновременном действии шести управлений обозначено на рис. 2 буквой *г*. Последнее управление  $\omega_7^1 < 0$  вызывает изменение  $\Delta\mu_7 < 0$  и приводит координату состояния в задан-

ное конечное состояние  $\mu_{\text{кон}}$ , которому соответствует точка *г*'. Аналогично описывается рис. 2, *б*. Таким образом, состояние  $\mu$  на интервале времени  $[0, t_1]$  может изменяться, если действуют все управления, удовлетворяющие утверждениям теоремы, так, как изображено на рис. 2, *в* и *г*.

Линия достижимости  $\bar{\mu}_g$ , изображенная на рис. 2, *а* и *б*, строится согласно формуле (18). В общем случае при  $i = n$   $\bar{\mu}_g^n = \mu_{\text{кон}}$ , а при  $i = n - 1$   $\bar{\mu}_g^{n-1} = \mu_{\text{кон}} - \Delta\underline{\mu}_n$ , т. е.  $\bar{\mu}_g^{n-1}$  — это предельное состояние перед  $(n - 1)$ -м этапом, из которого еще можно попасть в заданное конечное состояние  $\mu_{\text{кон}}$ . Управление, при котором на этом этапе можно попасть в конечное состояние  $\mu_{\text{кон}}$ , является предельно возможным отрицательным управлением  $\Delta\underline{\mu}_n < 0$ . Аналогично, при  $i = n - 2$  предельным состоянием, из которого можно попасть в конечное состояние  $\mu_{\text{кон}}$ , будет состояние  $\bar{\mu}_g^{n-2} = \mu_{\text{кон}} - \Delta\underline{\mu}_n - \Delta\underline{\mu}_{n-1}$ . При этом попасть в состояние  $\mu_{\text{кон}}$  из состояния  $\bar{\mu}_g^{n-2}$  можно лишь, используя минимально возможные приращения управлений  $\Delta\underline{\mu}_n < 0$  и  $\Delta\underline{\mu}_{n-1} < 0$ . Согласно формуле (18)  $\bar{\mu}_g^i$  — это предельное состояние перед  $i$ -м этапом, из которого еще можно попасть в конечное состояние  $\mu_{\text{кон}}$ , если на всех последующих этапах  $j = i + 1, \dots, n$  принимать минимальные управления  $\Delta\underline{\mu}_j, \dots, \Delta\underline{\mu}_n$ . Линия достижимости  $\bar{\mu}_g$  строится на рис. 2, *а* из точки  $\mu_{\text{кон}} = \mu^B$ , а на рис. 2, *б* — из точки  $\mu_{\text{кон}} = \mu^H$ .

Согласно теореме и алгоритму расчет оптимального управления состоит в следующем. Пусть управления  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$  ранжированы в соответствии с показателем  $B_j$ . В этом случае на каждом этапе управление  $\Delta\mu_j$  выбирается максимально возможным, если состояние после принятия этого управления меньше уровня линии достижимости  $\bar{\mu}_g^i$ . Так, на рис. 2, *а* на первом этапе принимается максимально возможное управление, поскольку координата состояния, обозначенная точкой *а*, меньше координаты состояния, обозначенной точкой *а*'. Аналогично максимальное управление принимается на этапах 2, 3 и 4. Однако на этапе 5 выбор максимального управления  $\Delta\bar{\mu}_5$  привел бы в точку *е*. Эта точка выше точки *е*', лежащей на линии достижимости  $\bar{\mu}_g^5$ . Поэтому в соответствии с теоремой выбирается управление  $\Delta\mu_5 > 0$ , которое приводит в точку допустимости *е*'. Из этой точки попасть в заданное конечное состояние  $\mu_{\text{кон}}$  можно лишь,



**Рис. 2.** Геометрическая интерпретация работы алгоритма дестабилизационной оптимизации при избыточности управляющих воздействий: *a* — случай  $\mu(0) = \mu_0 = \mu''$ ,  $\mu_{\text{кон}} = \mu(t_1) = \mu^b$ ; *б* — случай  $\mu_0 = \mu^b$ ,  $\mu_{\text{кон}} = \mu(t_1) = \mu''$ ; *в* и *г* — изменение состояния  $\mu$  на интервале  $[0, t_1]$  при действии всех управлений для случаев *a* и *б* соответственно

принимая на всех последующих этапах минимально возможные изменения состояний  $\Delta\mu_6 < 0$ ,  $\Delta\mu_7 < 0$ .

#### 4. ПРИМЕР РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ДЛЯ ДВУХ УПРАВЛЕНИЙ

Рассматривается объект с одной координатой состояния  $\mu$  для случая двух управлений  $u_1 = (u_1^1, u_1^2, t_1)$  и  $u_2 = (u_2^1, u_2^2, t_1)$ , имеющих на интервале

$[0, T]$  точку переключения при  $t_1 = T/2$ , и при условии  $\beta_1^1 = \beta_1^2 = \beta_2^1 = \beta_2^2 = \beta > 0$ . Геометрическая интерпретация приведена на рис. 3.

В соответствии с условиями теоремы последовательность управлений  $u_1$  и  $u_2$  нормально упорядочена, поскольку  $B_1 < B_2$ . Действительно, так как  $B_1 = (b_1^1 - b_1^2)/\beta$ ,  $B_2 = (b_2^1 - b_2^2)/\beta$ , а из рис. 3 следует, что  $b_1^2 \approx b_2^2$ , и в силу того, что  $b_1^1 < 0$ ,  $b_1^2 > 0$ ,



имеем  $B_1 < B_2$ . Стабилизирующие управления, соответствующие оптимальным статическим режимам при возмущении  $f_1$ , действующем на отрезке  $[0, t_1]$ , и возмущении  $f_2$ , действующем на отрезке  $[t_1, T]$ , обозначены  $\dot{u}_1 = (\dot{u}_1^1, \dot{u}_1^2)$ ,  $\dot{u}_2 = (\dot{u}_2^1, \dot{u}_2^2)$ . Значения подинтегральной функции  $Q(f, u)$  функционала  $I(1)$  при этих управлениях равны ординатам точек, обозначенных буквами  $a_1, b_1$  и  $a_2, b_2$ . Среднее значение  $\bar{I}$  функционала на интервале  $[0, T]$  при возмущении  $(f_1, f_2)$  для управления  $u_1$  соответствует точке, лежащей на пунктирной линии, проведенной через точки  $a_1, b_1$ , и так как  $\beta_1^1 = \beta_1^2 = \beta$ , а  $t_1 = T/2$ , то, согласно работе [7], оптимальное среднее значение  $\dot{Q}_1$  соответствует точке  $O_1$  при  $\bar{u}_1 = (\dot{u}_1^1 + \dot{u}_1^2)/2$ . Аналогичные построения сделаны пунктиром для управления  $u_2$ , при этом среднее значение  $\dot{Q}_2$  соответствует точке  $O_2$ . На оси

ординат справа обозначено суммарное значение  $\dot{Q}_1 + \dot{Q}_2$ , характеризующее значение функционала  $I$  на интервале  $[0, T]$ . Так как для управлений  $u_1$  и  $u_2$  справедливо  $b_1^1 < b_2^1, b_1^2 > b_2^2$ , то уменьшение целевой функции можно получить, если  $\omega_1^1 > 0$  ( $\omega_1^2 < 0$ ) и  $\omega_2^1 > 0$  ( $\omega_2^2 < 0$ ). На рис. 3 этот вариант изображен штрих-пунктирными линиями. Пусть предельно возможное значение при этом будет  $\tilde{u}_1^1, \tilde{u}_1^2$  (соответственно  $\tilde{u}_2^1, \tilde{u}_2^2$ ), значения функции  $Q(f, u)$  для этих управлений соответствуют ординатам точек  $\tilde{a}_1, \tilde{b}_1$  и  $\tilde{a}_2, \tilde{b}_2$ , а средние значения функции равны  $\tilde{Q}_1$  и  $\tilde{Q}_2$ , причем, как видно из рис. 3, имеет место неравенство  $\tilde{Q}_1 + \tilde{Q}_2 < \dot{Q}_1 + \dot{Q}_2$ . Отметим, что при наличии двух управлений суммарное значение функции  $Q(f, u)$  можно еще более снизить. Примем для управления  $\dot{u}_2 = (\dot{u}_2^1, \dot{u}_2^2, t_1)$

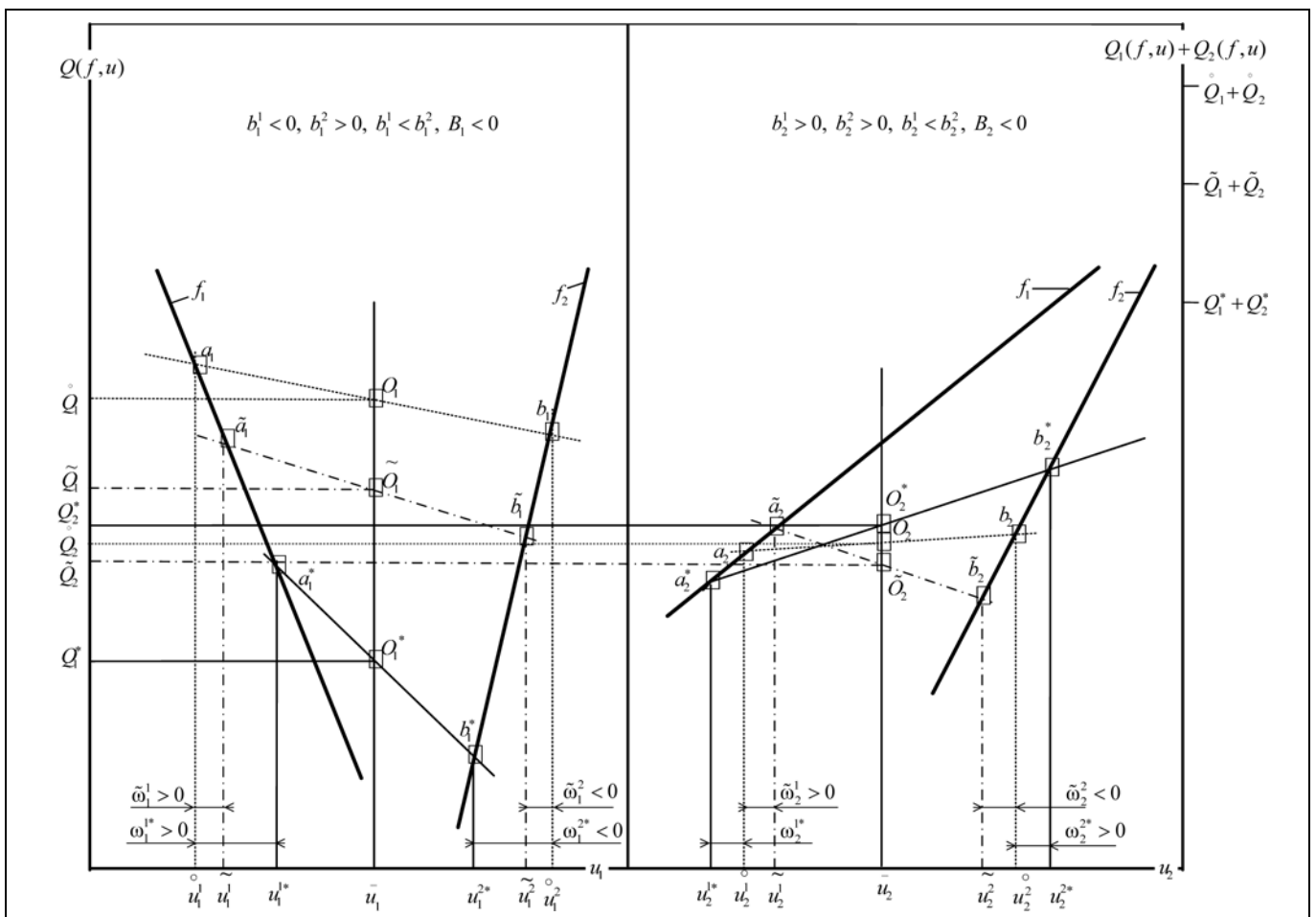


Рис. 3. Алгоритм выбора дестабилизирующего управления при избыточности в терминах управлений  $(u_1, u_2)$

и  $\omega_2^{1*} < 0$  (а, следовательно,  $\omega_2^{2*} > 0$ ), тогда значение функции (точка  $O_2^*$ ) ухудшится по сравнению со значением при стабилизационном управлении, т. е.  $O_2^* > \dot{Q}_2$ . Однако для первого управления можно взять  $\omega_1^{1*} > \tilde{\omega}_1^1$ . Действительно, для управлений  $\tilde{\omega}_1^1 > 0$  и  $\tilde{\omega}_2^1 > 0$  получим  $\mu(t_1) = \beta t_1(\tilde{\omega}_1^1 - |\tilde{\omega}_2^1|)$ , а для  $\omega_1^{1*} > 0$ ,  $\omega_2^{1*} < 0$ , соответственно,  $\mu(t_1) = \beta t_1(\omega_1^{1*} - |\omega_2^{1*}|)$ . Таким образом, при  $|\omega_2^{1*}| = \tilde{\omega}_2^1$  для одного и того же  $\mu(t_1)$  имеем  $\omega_1^{1*} = 3\tilde{\omega}_1^1$  и  $Q_1^* \ll \dot{Q}_2$ , а соответствующее суммарное значение функции удовлетворяет неравенствам  $Q_1^* + Q_2^* < \tilde{Q}_1 + \tilde{Q}_2 < \dot{Q}_1 + \dot{Q}_2$ .

Алгоритм решения задачи двухуровневой многомерной линейной дестабилизационной оптимизации при избыточности управляющих воздействий, в состав которого входит разработанный алгоритм одномерной оптимизации, организован подобно алгоритму из работы [7].

## 5. ВОЗМОЖНОСТЬ ПРИМЕНЕНИЯ ДЕСТАБИЛИЗАЦИОННОГО УПРАВЛЕНИЯ НА ПРИМЕРЕ УПРАВЛЕНИЯ ВОЗДУХОРАЗДЕЛИТЕЛЬНОЙ УСТАНОВКОЙ

Предлагаемым в статье способом можно управлять технологическими объектами, к которым допустимо применение идей дестабилизационной оптимизации (дестабилизационного управления). В частности, на таких объектах, как высокопроизводительные энергоемкие установки разделения воздуха и нефтеперерабатывающие установки, представляющих собой классические многомерные технологические объекты, дополнительный эффект от дестабилизации при управлении может быть заметен. Известно [11], что основной промышленный способ получения газообразных и жидких кислорода, азота и других криогенных продуктов заключается в ректификации воздуха, осуществляемой в воздуходелительных установках (ВРУ) при низких температурах. На установках большой мощности получают более 90 % общего количества потребляемых в промышленности продуктов разделения воздуха. Эти продукты используются в черной и цветной металлургии, химической промышленности и промышленности минеральных удобрений.

Далее кратко излагается решение задачи дестабилизационного управления ВРУ низкого давления типа КА-32, перерабатывающей в номинальном режиме 180 000 м<sup>3</sup>/ч воздуха и предназначенной для получения  $V_k = 32\,000$  м<sup>3</sup>/ч газообразного техниче-

ского кислорода (с концентрацией  $y_k = 99,5$  % O<sub>2</sub>) и газообразного чистого азота  $V_a = 22\,000$  м<sup>3</sup>/ч (с концентрацией  $y_a = 0,0005$  % O<sub>2</sub>), в которой также возможен небольшой отбор жидких продуктов — технического кислорода  $G_k = 400$  кг/ч (с концентрацией  $y_k = 99,7$  % O<sub>2</sub>) и чистого азота  $G_a = 1200$  кг/ч (с концентрацией  $x_a = 0,0005$  % O<sub>2</sub>). Возможны один газовый и три газожидкостных режима работы установки: газовый имеет место, когда  $G_k$  и  $G_a$  равны нулю, а газожидкостные, когда хотя бы один из этих параметров не равен нулю. Технологическая схема ВРУ построена по холодильному циклу низкого давления с турбодетандером, состоит из подсистемы охлаждения-очистки воздуха и подсистемы его разделения (ректификации). Установка работает при переменной производительности по продуктам разделения воздуха, задаваемой их потребителями, в диапазоне от -30 до +10 % от номинальных значений.

Как объект управления установка характеризуется векторами выходных  $\vec{y}$ , управляющих  $\vec{u}$  и возмущающих  $\vec{z}$  переменных компоненты. Вектор  $\vec{y}$ : концентрации  $y_k, y_a, x_k, x_a$  и концентрация газообразного отбросного азота  $y_{oa}$ ; давления  $P_k^{ВЫХ}, P_a^{ВЫХ}, P_{кж}^{ВЫХ}, P_{аж}^{ВЫХ}, P_{oa}^{ВЫХ}$  и температуры  $t_k^{ВЫХ}, t_a^{ВЫХ}, t_{кж}^{ВЫХ}, t_{аж}^{ВЫХ}, t_{oa}^{ВЫХ}$  соответствующих газовых и жидкостных потоков на выходе установки, а также расход отбросного азота  $V_{oa}$  и потери воздуха при переключении регенераторов  $V_{пот}$ . Вектор  $\vec{u}$ , значения компонент которого можно независимо изменять, содержит расходы — воздуха на входе в установку  $V_B^{ВХ}$ , петлевого  $V_{п}$  и детандерного  $V_d$  воздуха, грязной  $G_{фл}^Г$  и чистой  $G_{фл}^Ч$  азотной флегм; время — прямого дутья  $\tau_{пр}$  и цикла дутья  $\tau_{ц}$  регенераторов. Поскольку можно считать  $V_{п} = V_d$  [11], в векторе  $\vec{u}$  оставлен только расход  $V_d$ , а с учетом допущения об идентичности регенераторов для переменных  $\tau_{пр}$  и  $\tau_{ц}$  справедливо соотношение —  $\tau_{пр} = \tau_{ц}/3$ , и независимой переменной можно считать  $\tau_{ц}$ . В качестве компонент возмущающих воздействий вектора  $\vec{z}$  выступают расходы получаемых продуктов  $V_k, V_a, G_k$  и  $G_a$ .

При решении задачи статической оптимизации ВРУ, функционирующей при переменной производительности по продуктам разделения воздуха, в качестве критерия приняты затраты электроэнергии на разделение воздуха. Получены оптимальные значения  $V_B^{*ВХ}, G_{фл}^{*Г}, G_{фл}^{*Ч}, V_d^*$  и  $\tau_{ц}$  управляющих воздействий установки для различных





значений  $V_k$  и  $V_a$ , представленные в виде функций, зависящих от изменения расхода  $V_k$  при постоянном расходе  $V_a$  и от изменения расхода  $V_a$  при постоянном расходе  $V_k$ . Реализация этих функций обеспечивает технологические режимы установки, при которых получают требуемые отборы продуктов разделения воздуха и минимизируется критерий  $Q_{oa}$  — потери кислорода с отбросным азотом, который, как показали исследования, эквивалентен затратам электроэнергии на разделение воздуха.

В ходе проведенного анализа сделан вывод о том, что дополнительный эффект от дестабилизационной оптимизации в данной установке разделения воздуха возможен благодаря ее подсистеме ректификации (рис. 4), где происходит непосредственное разделение воздуха в нижней и верхней ректификационных колоннах (НРК и ВРК). Воздух  $V_b$  предварительно разделяется в НРК на кубовую жидкость  $G_{куб}$  (с концентрацией 39 %  $O_2$ ) и грязную азотную флегму  $G_{фл}^r$  (с концентрацией 2,5–5,0 %  $O_2$ ), которые затем дросселируются в ВРК, и газобразный азот  $V_{a1}$  (с концентрацией 0,0005 %  $O_2$ ). Весь газобразный азот  $V_{a1}$  конденсируется в конденсаторах-испарителях (на схеме не показаны и обозначены жирной точкой), откуда дросселируется в ВРК в качестве чистой азотной флегмы  $G_{фл}^ч$  (с концентрацией 0,0005 %  $O_2$ ), а также возвращается в НРК. Часть конденсировавшейся жидкости может отбираться в виде продукта — жидкого азота  $G_a$ . Окончательное разделение воздуха происходит в ВРК, где получают газобразный чистый азот  $V_a$  — продукт, отбросной азот  $V_{oa}$ , продуктом не являющийся, и жидкий технический кислород  $G_{к1}$ . После испарения жидкого кислорода в конденсаторах-испарителях часть потока отводится потребителю в виде газобразного технического кислорода  $V_k$ , а остальное возвращается в колонну. Возможна также выдача жидкого кислорода в виде продукта  $G_k$ .

На примере наиболее общего газожидкостного режима установки, функционирующей при переменном потреблении продуктов разделения воздуха, далее проведен анализ работы этой подсистемы, позволяющий перейти к задаче дестабилизационной оптимизации.

Вначале решается задача статической оптимизации режимов подсистемы ректификации, названная задачей стабилизации. Она сводится к определению вектора  $U^* = (V_b^*, G_{фл}^*, G_{фл}^{*r}, G_{куб}^*, V_{oa}^*, V_d^*)$ , при котором достигает минимума целевая функ-

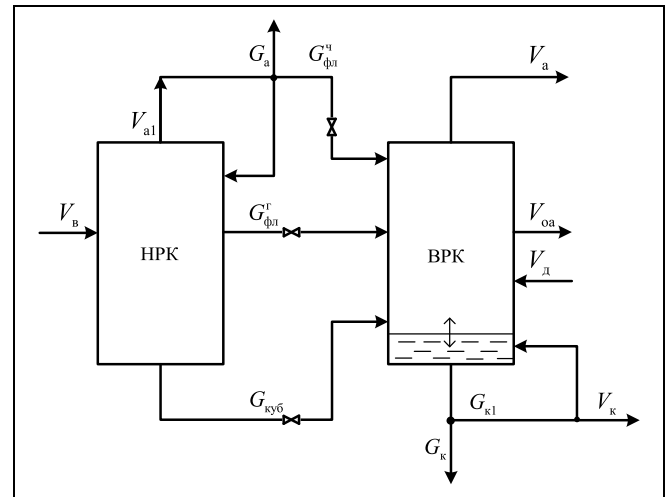


Рис. 4. Упрощенная схема материальных потоков подсистемы ректификации воздухоразделительной установки КА-32

ция  $Q_{oa}$  и выполняются определенные условия и ограничения. При этом значения  $V_b^*$ ,  $G_{фл}^*$  и  $G_{фл}^{*r}$  — независимые управляющие воздействия, а  $G_{куб}^*$ ,  $V_{oa}^*$  и  $V_d^*$  находятся из уравнений материальных балансов НРК и подсистемы ректификации, а также теплового баланса установки. Компоненты вектора  $U^*$  определяются только параметрами режима потребления продуктов разделения, заданного вектором  $(V_k^3, y_k^3, V_a^3, y_a^3, G_k^3, G_a^3, x_a^3)$ , в котором отсутствует заданная концентрация  $x_k^3$  жидкого кислорода, поскольку по условиям технологии  $x_k^3 = x_k^* = f(y_k^3)$ , где  $x_k^*$  — концентрация, равновесная заданной концентрации кислорода  $y_k^3$ .

Уравнение, описывающее материальный баланс для куба ВРУ, в которой получается жидкий кислород, можно интерпретировать как уравнение  $\Delta H(t) = 0$ , где  $\Delta H(t)$  — изменение уровня жидкости как функции времени, т. е. уровень в колонне остается неизменным. Расширение области допустимых управлений подсистемы ректификации на интервале времени  $[0, T]$ , когда изменяется производительность установки, может дать некоторый эффект из-за снятия ограничения на постоянство жидкости в кубе. При постоянном уровне количество вырабатываемого жидкого кислорода в подсистеме определяется заданием по газобразным и жидким продуктам, а в случае снятия этого ограничения оно может быть не равно заданию потребителя. Если жидкости вырабатывается больше, чем требуется, то происходит ее накопление, в противном случае — сбрасывание. Изменение уровня жидкости может быть интерпретировано

как изменение производительности установки по жидкому кислороду. Пусть  $\bar{G}_k$  представляет сумму расходов жидкого кислорода  $G_k^3$  и  $G_k^B$  соответственно требуемому потребителю и внутреннего, связанного с накоплением (срабатыванием) жидкости. Ввод  $\bar{G}_k$  в вектор варьируемых параметров позволяет расширить область допустимых управлений и записать вектор, характеризующий потребление продуктов разделения в виде  $(V_k^3, y_k^3, V_a^3, y_a^3, \bar{G}_k, G_a^3, x_a^3)$ . Он отличается от ранее введенного тем, что  $\bar{G}_k$  — независимое управляющее воздействие, а значит, можно получить оптимальное решение лучшее, чем в задаче стабилизации. Выражения, определяющие изменение уровня жидкости, имеют вид:

$$H^H \leq H(t) \leq H^B, \quad (24)$$

$$H(t) = H(0) + \frac{1}{S} \int_0^t (\bar{G}_k(t) - G_k^3(t)) dt, \quad (25)$$

$$H(0) = H(T), \quad (26)$$

где  $H^H$ ,  $H^B$ ,  $H(t)$  и  $H(0)$  — значения уровня соответственно нижнее и верхнее допустимые, текущее, в момент времени  $t = 0$ ;  $S$  — площадь поперечного сечения сборника ВРУ.

Вновь введенное управление  $\bar{G}_k$  нельзя устанавливать на произвольный интервал времени. Связь между максимально возможным временем  $t_{п}$  постоянства значения  $\bar{G}_k$  до точки переключения, значениями уровня  $H^H$ ,  $H^B$  и заданным отбором  $G_k^3$ , выдаваемого потребителю, выражается соотношением, полученным из неравенства (25):

$$t_{п} = \begin{cases} \frac{H^B - H(0)}{\bar{G}_k - G_k^3} & \text{при накоплении жидкости,} \\ \frac{H(0) - H^H}{G_k^3 - \bar{G}_k} & \text{при срабатывании жидкости.} \end{cases}$$

Задача дестабилизационной оптимизации подсистемы ректификации для наиболее общего газожидкостного режима функционирования установки формулируется следующим образом.

Для заданного на интервале времени  $[0, T]$  изменения производительности получаемого кислорода  $V_k^3(t)$  и заданных значений  $G_k^3$ ,  $y_k^3$ ,  $V_a^3$ ,  $y_a^3$ ,  $G_a^3$  и  $x_a^3$  найти оптимальную, определенную на интервале  $[0, T]$  такую вектор-функцию

$$U^*(t) = (\bar{G}_k^*(t), V_b^*(t), G_{фл}^{*\Gamma}(t), G_{фл}^*(t), G_{куб}^*(t), V_{oa}^*(t), V_d^*(t)), \quad (27)$$

что принимает минимальное значение функционал вида

$$I(U^*(t)) = \int_0^T Q_{oa}(U^*(t)) dt, \quad (28)$$

выполняются для всех  $t \in [0, T]$  ограничения на компоненты вектора  $U(t)$

$$\begin{aligned} \bar{G}_k^H &\leq G_k(t) \leq \bar{G}_k^B, & G_k^H &\leq G_k(t) \leq G_k^B, & V_b^H &\leq V_b(t) \leq V_b^B, \\ G_{фл}^H &\leq G_{фл}(t) \leq G_{фл}^B, & G_{фл}^{H\Gamma} &\leq G_{фл}^\Gamma(t) \leq G_{фл}^B, \\ G_{куб}^H &\leq G_{куб}(t) \leq G_{куб}^B, & V_{oa}^H &\leq V_{oa}(t) \leq V_{oa}^B, \\ V_d^H &\leq V_d(t) \leq V_d^B, \end{aligned} \quad (29)$$

удовлетворяются условия физической реализуемости

$$\begin{aligned} 0 &\leq y_k(t) \leq 100 \% O_2, & 0 &\leq y_a(t) \leq 100 \% O_2, \\ 0 &\leq x_k(t) \leq 100 \% O_2, & 0 &\leq x_a(t) \leq 100 \% O_2, \end{aligned} \quad (30)$$

обеспечиваются ограничения на получаемые продукты

$$\begin{aligned} V_k(t) &\geq V_k^3, & V_a(t) &\geq V_a^3, & G_a(t) &\geq G_a^3, \\ y_k(t) &\geq y_k^3, & y_a(t) &\leq y_a^3, & x_a(t) &\leq x_a^3, \end{aligned} \quad (31)$$

а также соблюдаются условия (24)—(26) и уравнения связи в виде математической модели подсистемы ректификации (здесь не приведенной).

Решение задачи получено для случая, когда возмущающее воздействие  $V_k^3(t)$  представляет собой двухуровневую, кусочно-постоянную функцию

$$V_k^3(t) = \begin{cases} V_k^{(1)}, & \text{при } 0 \leq t < t_1; \\ V_k^{(2)}, & \text{при } t_1 \leq t \leq T, \end{cases} \quad (32)$$

где  $t_1$  — точка переключения.

При решении сформулированной задачи дестабилизационной оптимизации применялся алгоритм, в основе которого лежат идеи, изложенные в работе [7], а сама задача (27)—(32), с учетом конкретных особенностей подсистемы ректификации, декомпозируется на две отдельные задачи оптимизации: внешнюю А и внутреннюю В. Решение задачи А позволяет определить закон изменения на интервале  $[0, T]$  выработки жидкого кислорода  $\bar{G}_k$ , минимизирующей суммарные потери кислорода с отбросным азотом  $Q_{oa}^*$  на этом интервале, а в задаче В осуществляется статическая оптимизация процесса разделения воздуха при заданной производительности установки и определенном в задаче А значении выработки жидкого кислорода. Получены зависимости  $Q_{oa}^*$  ( $\bar{G}_k$ ) для различных значений  $V_k^3$ , представляющие собой однопараметрическое семейство выпуклых вниз функций, в котором па-



раметром является  $V_k^3$ . Их кривизна влияет на получаемый эффект от дестабилизации, на размер которого оказывает влияние также и момент переключения  $t_1$ . При неограниченной емкости куба колонны эффект не зависит от времени  $T$ , а при ограниченной емкости зависит, причем с ростом  $T$  размер эффекта уменьшается. Оптимальное дестабилизационное управление подсистемой ректификации ВРУ в рассмотренных нами диапазонах изменения производительности по получаемым продуктам разделения позволяет снижать потери кислорода с отбросным азотом, а значит, и затраты электрической энергии в установке, на несколько процентов. Это, с учетом высокой энергоемкости процесса разделения воздуха и мощности установки, в абсолютном выражении представляется весьма значительным. Дополнительный эффект может быть получен и от применения избыточного управления, если в качестве последнего выбрать  $V_{oa}$  и применить предложенные алгоритмы.

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В заключение сформулируем основные выводы.

Рассмотрен линейный случай задачи дестабилизационной оптимизации режимов многомерного технологического объекта, функционирующего на интервале времени, когда его производительность меняется дважды, при избыточности управляющих воздействий, влияющих на координаты состояния объекта, появляющиеся в результате дестабилизации.

Задача может быть декомпозирована на совокупность линейных одномерных задач дестабилизационной оптимизации с избыточностью управляющих воздействий. Сформулирована одна из таких задач, которая затем сведена к более приемлемой, в смысле упрощения решения, задаче.

В основе ее решения лежит сформулированная теорема, на основе которой разработан алгоритм двухуровневой линейной одномерной дестабилизационной оптимизации при избыточности управляющих воздействий и геометрически проиллюстрирована его работа с указанием получаемого эффекта.

В дальнейшем представляется необходимым разработать алгоритм решения линейной задачи дестабилизационной оптимизации режимов многомерного технологического объекта с избыточностью управляющих воздействий, функционирующего при неоднократном изменении его производительности на интервале времени.

Продемонстрирована возможность применения дестабилизационного управления реальными производственными объектами, приведен конкретный пример.

Условия, принятые при постановке задачи:

— возмущающее воздействие будем считать периодическим с периодом  $T$  и двухуровневым, т. е.  $f(t) = f(t + T)$ ,  $f(t) = f(f_1, f_2, t_1)$ ;

— управляющее воздействие  $u(t) = (u_1(t), u_2(t), \dots, u_n(t))$  — кусочно-постоянная вектор-функция;

— подынтегральная функция  $Q(u(t), f(t))$  в функционале  $I$  в любой момент времени  $t$  может быть представлена в виде семейства параметрических  $n$ -мерных плоскостей

$$Q(u(t), f(t)) = a(f(t)) + \sum_{i=1}^n b_i(f(t))u_i(t),$$

где коэффициенты  $a(f(t))$ ,  $b_i(f(t))$ ,  $i = \overline{1, n}$ , являются функциями значений воздействия  $f(t)$  в соответствующий момент времени;

— функционал  $\mu(u', f')$  — скалярный, однако зависящий от векторного управления  $u' = (u'_1, u'_2, \dots, u'_n)$ ;

— функция  $\varphi(u(t), f(t))$  под знаком интеграла в функционале  $\mu(u', f')$ , характеризующего изменение переменной  $\mu$ , может быть представлена в любой момент времени  $t$  семейством параметрических  $n$ -мерных плоскостей:

$$\varphi(u(t), f(t)) = \alpha(f(t)) + \sum_{i=1}^n \beta_i(f(t))u_i(t); \quad (\text{П } 1)$$

— задача стабилизации разрешима во всей области  $F$  изменения возмущающих воздействий, т. е. для любого  $f \in F$  существует вектор  $\dot{u}$ , однозначно зависящий от  $f$ , при котором

$$\varphi(\dot{u}(t), f(t)) = 0, \quad (\text{П } 2)$$

причем  $u^H(f(t)) \leq \dot{u}(t) \leq u^B(f(t))$ .

Значение  $\dot{u}(t)$  может быть, в частности, получено из решения задачи оптимизации при заданном  $f(t)$  и выполнении условия (П 2).

В соответствии с (П 1) и (П 2) при стабилизирующем управлении  $\dot{u}(t)$  справедливо равенство

$$\varphi(\dot{u}(t), f(t)) = \alpha(f(t)) + \sum_{i=1}^n \beta_i(f(t))\dot{u}_i(t) = 0. \quad (\text{П } 3)$$

Введя обозначение  $\omega_i(t) = u_i(t) - \dot{u}_i(t)$ ,  $i = \overline{1, n}$ , и учитывая равенство (П 3), получим вместо условия (П 1) выражение

$$\varphi(\omega(t), f(t)) = \sum_{i=1}^n \beta_i(f(t))\omega_i(t).$$

### ЛИТЕРАТУРА

1. Косарев Д.А., Ремизова О.В., Сыроквашин В.В., Фокин А.Л. Робастное управление многомерным линейным объектом с запаздыванием // Известия СПб ГТИ (ТУ). — 2012. — № 17 (43). — С. 77–82. [Kosarev, D.A., Remizova, O.V., Syrokvashin, V.V., Fokin, A.L. Robust control of a multidimensional linear object with delay // Bulletin of St. Petersburg State Technical University (TU). — 2012. — No. 17 (43). — P. 77–82. (In Russian)]

2. Еремин Е.Л. Адаптивное управление динамическим объектом на множестве состояний функционирования // Информатика и системы управления. — 2012. — № 4 (34). — С. 107—118. [Eremin, E.L. Adaptive control of a dynamic object on a set of functioning states // Informatics and control systems. — 2012. — No. 4 (34). — P. 107—118. (In Russian)]
  3. Еремин Е.Л., Шеленок Е.А. Робастное управление для одного класса многосвязных динамических объектов // Автоматика и телемеханика. — 2017. — № 6. — С. 106—121. [Eremin, E.L., Shelенок, E.A. Robust control for one class of multivariable dynamic plants // Automation and Remote Control. — 2017. — Vol. 78, no. 6. — P. 1046—1058.]
  4. Жолдошов Т.М., Оморов Т.Т. Синтез динамической управляющей подсистемы для стационарного многомерного объекта // Технические науки — от теории к практике. — 2012. — № 12. — С. 27—32. [Zholdoshev, T.M., Omorov, T.T. Synthesis of dynamic management subsystem for stationary multidimensional object // Engineering — from theory to practice — 2012. — No. 12. — P. 27—32. (In Russian)]
  5. Габасов Р., Кириллова Ф.М., Во Тху Тань Ха. Оптимальное управление в реальном времени многомерным динамическим объектом // Автоматика и телемеханика. — 2015. — № 1. — С. 121—135. [Gabasov, R., Kirillova, F.M., Vo Thi Thanh Ha. Optimal real-time control of multidimensional dynamic plant // Automation and Remote Control. — 2015. — Vol. 76, no. 1. — P. 98—110.]
  6. Гайдук А.Р., Колоколова К.В. Синтез систем автоматического управления неустойчивыми многомерными объектами // Науч. вестник Новосибир. гос. техн. ун-та. — 2017. — № 1 (66). — С. 26—40. [Gaiduk, A.R., Kolokolova, K.V. Synthesis of automatic control systems for unstable multidimensional objects // Scientific. Bulletin of the Novosibirsk State Technical University. — 2017. — No. 1 (66). — P. 26—40. (In Russian)]
  7. Shamkin, V.N., Muromtsev, D.Yu., Gribkov, A.N. Using destabilization control to improve the functioning of complex multidimensional technological objects on the time interval // Journal of Engineering and Applied Sciences. — 2017. — Vol. 12, — no. 24, December. — P. 7198—7217.
  8. Муромцев Д.Ю., Грибков А.Н., Тюрин И.В., Шамкин В.Н. Формализованная постановка задачи дестабилизационного энергосберегающего управления многомерными технологическими объектами при неоднократном изменении заданий по их производительности на длительном интервале времени // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. «Приборостроение». — 2018. — № 5 (122). — С. 99—115. [Muromtsev, D.Yu., Gribkov, A.N., Tyurin, I.V., Shamkin, V.N. Formalised Statement of a Problem Dealing with Energy-Efficient Destabilisation Control of Multidimensional Technological Objects for the Case of Repeated Adjustment of Expected Performance over a Long Period of Time // Herald of the Bauman Moscow State Technical University. Series Instrument Engineering — 2018. — No. 5 (122). — P. 99—115. (In Russian)]
  9. Muromtsev, D.Yu., Gribkov, A.N., Tyurin, I.V., Shamkin, V.N. Theoretical justification for the solution of the problem of destabilization energy-saving control of multidimensional technological objects operating in variable performance conditions over a long time interval // Herald of the Bauman Moscow State Technical University. Series Instrument Engineering. — 2019. — No. 1 (124). — P. 109—128.
  10. Muromtsev D.Y., Belousov O.A., Gribkov A.N., et al. An algorithm for destabilization control over MIMO systems with a continuous variation of their performance at long time interval // AIP Conf. Proceedings «Oil and Gas Engineering, OGE 2018». 050010.
  11. Беляков В.П. Криогенная техника и технология. — М.: Энергоатомиздат, 1982. — 271 с. [Belyakov, V.P. Cryogenic equipment and technology. — M.: Energoatomizdat, 1982. — 271 p. (In Russian)]
- Статья представлена к публикации членом редколлегии Н.Н. Бахтадзе.*
- Поступила в редакцию 13.05.2019, после доработки 21.11.2019.  
Принята к публикации 2.12.2019.*
- Муромцев Дмитрий Юрьевич** — д-р техн. наук,  
✉ mdjur@mail.ru,  
**Грибков Алексей Николаевич** — д-р техн. наук,  
✉ GribkovAlexey@yandex.ru,  
**Тюрин Илья Вячеславович** — канд. техн. наук,  
✉ tyurinilja@yandex.ru,  
**Шамкин Валерий Николаевич** — д-р техн. наук,  
✉ shamkin-v@mail.ru,  
Тамбовский государственный технический университет.

## ALGORITHM OF OPTIMAL CONTROL OF MIMO TECHNOLOGICAL SYSTEMS WHEN CHANGING THEIR PERFORMANCE INDICATORS OVER A LONG TIME INTERVAL

D.Yu. Muromtsev<sup>#</sup>, A.N. Gribkov, I.V. Tyurin, V.N. Shamkin

Tambov State Technical University, Russia

<sup>#</sup>✉ mdjur@mail.ru

**Abstract.** The issues of managing complex energy- and resource-intensive technological objects that operate in variable performance modes for the products produced over a long period of time using algorithms of destabilization optimization are discussed. The linear problem of destabilization optimization of the regimes of a multidimensional technological object, which operates over a time interval when its productivity changes twice, is considered with redundant control actions affecting the coordinates of the state of the object that appear as a result of destabilization. The problem is decomposed into a set of linear one-dimensional problems of destabilization optimization with redundancy of control actions, which are based on the formulated theorem and an algorithm developed on its basis. The operation of this algorithm is illustrated geometrically indicating the effect obtained. The possibility of using destabilization control of a real production facility, a large low-pressure air separation unit, is demonstrated. The necessity of developing an algorithm for solving the linear problem of destabilization optimization of the regimes of a multidimensional technological object with redundancy of control actions, which functions with repeated changes in its performance over a time interval, is noted.

**Keywords:** destabilization, time interval, integral criterion, MIMO system, optimization, performance, optimal control, additional effect.

**Funding.** The work is performed with financial support of Russian Foundation of Basic Research, project no. 18-08-00555-a.