УДК 681.5.037

РОБАСТНАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ С ПЕРИОДИЧЕСКИМИ ИНТЕРВАЛЬНЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ

М.В. Морозов

Рассмотрены линейные нестационарные дискретные системы управления с периодическими интервальными ограничениями на элементы матрицы системы. На основе метода сравнения с вектор-функцией Ляпунова специального вида установлено достаточное условие робастной устойчивости таких систем. Показано, что при некоторых дополнительных ограничениях полученное условие является не только достаточным, но и необходимым. Результаты обобщены на случай линейных управляемых систем с многогранными периодическими ограничениями. Приведены примеры рассматриваемых систем.

Ключевые слова: линейная нестационарная дискретная система управления, периодические интервальные ограничения, вектор-функция Ляпунова, робастная устойчивость, многогранные периодические ограничения.

ВВЕДЕНИЕ

Проблеме робастной устойчивости дискретных систем посвящено большое число работ, см., в частности, обзоры [1—3]. Во многих работах прикладного характера параметры дискретных систем выбираются таким образом, чтобы корни некоторого многочлена (или собственные значения некоторой матрицы) лежали внутри единичного круга, причем необходимо предусмотреть грубость системы к ошибкам. Такие задачи возникают во многих электротехнических приложениях и смежных с ними областях. Неопределенность в значениях параметров может быть включена либо в матричную передаточную функцию, либо в описание состояний системы. Этому кругу задач посвящен ряд публикаций, среди них работы, отправной точкой для которых послужили работы В.Л. Харитонова [4, 5]. Значительная часть публикаций посвящена получению условий робастности для интервальных многочленов и многочленов с многогранными возмущениями коэффициентов [6, 7], представляющих собой характеристические многочлены дискретных систем. Часто предпочтительней оказывается метод пространства состояний [8], при котором неопределенности реализуются в виде возмущений элементов различных матриц, связанных, в частности, с переменными состояния. Относительно неопределенных параметров предполагается известными лишь границы их изменения, и проблема робастной устойчивости состоит в том, сохраняется ли устойчивость для всех допустимых изменений неопределенных параметров. Появился ряд работ, посвященных получению условий робастности дискретных интервальных матриц [9—13]. Помимо харитоновского подхода к изучению робастности дискретных систем, имеющего алгебраический характер, существуют также и другие методы, прежде всего, методы параметрического пространства, ляпуновский подход и методы типа Риккати (см. обзоры в работах [14, 15]). Во многих работах даются лишь достаточные условия робастной устойчивости. Так, для линейных нестационарных дискретных систем управления со стационарными интервальными ограничениями на элементы матрицы системы достаточные условия были получены в работах [16, 17].

Рассматриваются, как правило, лишь стационарные множества, задающие ограничения на параметры системы. Однако ряд практических задач приводит к необходимости рассмотрения таких множеств изменения параметров системы, границы которых изменяются по заданным периодическим законам. В работе [18] с помощью метода функций Ляпунова были установлены общие критерии (необходимые и достаточные условия) робастной устойчивости для линейных нестационарных дискретных систем управления с периодически изменяющимися ограничениями на элементы матрицы системы. В общем случае эффективная проверка выполнения этих условий затруднительна, поскольку в конструкции соответствующей функции Ляпунова присутствуют параметры, значения которых априори неизвестны. В связи с этим несомненный теоретический и практический интерес представляет задача получения конструктивно проверяемых достаточных условий робастной устойчивости для заданного класса систем.

Настоящая работа представляет собой продолжение работы [19], посвященной получению, с помощью метода сравнения с вектор-функцией Ляпунова специального вида, достаточных условий робастной устойчивости линейных непрерывных нестационарных систем управления с периодическими интервальными ограничениями.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается линейная нестационарная дискретная система, описываемая уравнением вида

$$x(s+1) = A(s)x(s), \quad s = 0, 1, \ldots \qquad (1)$$

с периодическими интервальными ограничениями

$$\underline{A}(s) \leqslant A(s) \leqslant \bar{A}(s), \quad \underline{A}(s+N) \equiv \underline{A}(s),$$
$$\bar{A}(s+N) \equiv \bar{A}(s), \qquad (2)$$

где N — период системы.

Матричные неравенства в ограничениях (2) понимаются поэлементно (всюду в дальнейшем неравенства между матрицами и векторами понимаются как поэлементные неравенства), т. е.

$$\underline{a}_{ij}(s) \leqslant a_{ij}(s) \leqslant \bar{a}_{ij}(s), \quad i, j = \overline{1, n}, \quad s = 0, 1, \ldots$$

Таким образом, в силу ограничений (2) рассматривается не одна фиксированная система (1), а совокупность линейных нестационарных дискретных систем (1) с периодическими интервальными ограничениями.

Будем называть нестационарную дискретную систему (1) робастно устойчивой относительно периодических ограничений (2), если ее нулевое решение $x(s) \equiv 0$, $s = 0, 1, \ldots$ асимптотически устойчиво по Ляпунову при любом выборе матрицы $A(s)$, удовлетворяющей неравенствам (2).

Задача состоит в получении эффективно проверяемых достаточных условий робастной устойчивости нестационарной дискретной интервальной системы (1). Основой для получения этих условий служит метод сравнения с вектор-функцией Ляпунова специального вида.

2. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Введем в рассмотрение дискретную систему сравнения

$$x(s+1) = B(s)x(s), \quad s = 0, 1, \ldots, \qquad (3)$$

где периодическая матрица $B(s) = (b_{ij}(s))_{i,j=1}^{n}$, $B(s+N) \equiv B(s)$ определяется условиями

$$b_{ij}(s) = \max\{|\underline{a}_{ij}(s)|, |\bar{a}_{ij}(s)|\}, \quad i, j = \overline{1, n}. \qquad (4)$$

Достаточные условия робастной устойчивости системы (1) при периодических интервальных ограничениях (2) устанавливает следующая

Теорема 1. *Нестационарная дискретная система* (1) *робастно устойчива относительно периодических интервальных ограничений* (*2*), *если система сравнения* (3) *асимптотически устойчива по Ляпунову.* ♦

Доказательство теоремы приведено в Приложении.

Заметим, что условие асимптотической устойчивости дискретной периодической системы (3) сводится (см. работу [20]) к попаданию собственных значений матрицы монодромии $\Phi(N) = B(N-1)\ldots B(0)$ системы (3) внутрь круга радиуса 1.

В некоторых случаях достаточные условия теоремы 1 являются также и необходимыми для робастной устойчивости интервальной дискретной системы (1), (2). Эти случаи выделяются следующим утверждением.

Теорема 2. *Условие асимптотической устойчивости по Ляпунову дискретной системы сравнения* (3) *необходимо и достаточно для робастной устойчивости нестационарной интервальной системы* (1), (2) *в следующих случаях:*

1) $\underline{A}(s) \geqslant 0$, $s = 0, 1, \ldots$; 2) $\bar{A}(s) \leqslant 0$, $s = 0, 1, \ldots$;

3) $|\underline{A}(s)| \leqslant \bar{A}(s)$, $s = 0, 1, \ldots$; 4) $\underline{A}(s) \leqslant -|\bar{A}(s)|$, $s = 0, 1, \ldots$

Доказательство теоремы приведено в Приложении.

Теоремы 1 и 2 могут быть обобщены для дискретных систем с многогранными периодическими ограничениями

$$x(s+1) = A(s)x(s), \quad A(s) = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k(s) A_k(s),$$
$$s = 0, 1, \ldots, \qquad (5)$$

где $A_k(s) = (a_{ij}^k(s))_{i,j=1}^n$ — заданные периодические матрицы, $A_k(s+N) = A_k(s)$, $k = \overline{1, m}$, а функции $\lambda_k(s)$, $k = \overline{1, m}$, удовлетворяют условиям

$$\lambda_k(s) \geqslant 0, \quad \sum_{k=1}^{m} \lambda_k(s) = 1.$$

Системы вида (5) рассматривались в работе [21] в связи с задачей об абсолютной устойчивости нелинейных нестационарных дискретных систем управления с периодической линейной частью.

Достаточным условием робастной устойчивости системы (5) является асимптотическая устойчивость по Ляпунову дискретной системы сравнения (3), в которой элементы периодической матрицы $B(s)$ определены в соответствии с равенствами

$$b_{ii}(s) = \max_{1 \leq k \leq m} a_{ii}^k(s), \quad b_{ij} = \max_{1 \leq k \leq m} \left|a_{ij}^k(s)\right|,$$
$$i \neq j, \quad i, j = \overline{1, n}, \quad s = 0, 1, \ldots$$

3. ПРИМЕРЫ

Пример 1. В работе [22] рассмотрен ряд примеров, приводящих к системам вида (1) с ограничениями (2). Это и следящие системы, элементы которых работают на переменном токе, и системы управления с амплитудно-импульсной модуляцией, и задачи, возникающие при исследовании вибраций фрезерных станков. В частности показано [22], что периодические ограничения вида (2) возникают, например, при рассмотрении нестационарной системы (1), в которой элементы $a_{ij}(s)$ матрицы $A(s)$ представимы в виде $a_{ij}(s) = u_{ij}(s)f_{ij}(s)$, $s = 0, 1, \ldots$, где $f_{ij}(s)$, $s = 0, 1, \ldots$, — заданные периодические функции периода N, а $u_{ij}(s)$ — произвольные функции, удовлетворяющие стационарным ограничениям $\alpha_{ij} \leqslant u_{ij}(s) \leqslant \beta_{ij}$, $s = 0, 1, \ldots$

Нетрудно проверить, что в этом случае периодические функции $\underline{a}_{ij}(s)$ и $\bar{a}_{ij}(s)$ в ограничениях (2) определяются равенствами

$$\underline{a}_{ij}(s) = 0{,}5\{(\alpha_{ij} + \beta_{ij})f_{ij}(s) - |\alpha_{ij} - \beta_{ij}||f_{ij}(s)|\},$$
$$\bar{a}_{ij}(s) = 0{,}5\{(\alpha_{ij} + \beta_{ij})f_{ij}(s) + |\alpha_{ij} - \beta_{ij}||f_{ij}(s)|\}.$$

Приведем примеры, иллюстрирующие условия 1—4 теоремы 2.

Пример 2. Пусть функция $g(s)$, $s = 0, 1, \ldots$, имеет вид:

$$g(s) = \begin{cases} 2 \text{ при } s \in [4k, 4k+2], \\ 0 \text{ при } s \in [4k+2, 4k+4], \ k = 0, 1, \ldots \end{cases}$$

Рассмотрим систему (1), (2), в которой

$$\underline{A}(s) = \begin{pmatrix} g(s) & 1 \\ 1 & g(s) \end{pmatrix}, \quad \bar{A}(s) = \begin{pmatrix} g(s)+1 & 2 \\ 2 & g(s)+1 \end{pmatrix},$$
$$s = 0, 1, \ldots$$

Матрицы $\underline{A}(s)$ и $\bar{A}(s)$ имеют период $N = 2$. В этом случае выполнены условия 1, 3 теоремы 2 и система (1), (2) робастно устойчива.

Пример 3. Рассмотрим систему (1), (2), в которой

$$\underline{A}(s) = \begin{pmatrix} g(s) - 0{,}5 & 1 \\ 1 & g(s) - 0{,}5 \end{pmatrix},$$

$$\bar{A}(s) = \begin{pmatrix} g(s)+1 & 2 \\ 2 & g(s)+1 \end{pmatrix}, \quad s = 0, 1, \ldots$$

Матрицы $\underline{A}(s)$ и $\bar{A}(s)$ имеют период $N = 2$. В этом случае выполнено только условие 3 теоремы 2 и система (1), (2) робастно устойчива.

Следующий пример показывает применение теоремы 1.

Пример 4. Пусть функция $f(s)$, $s = 0, 1, \ldots$ имеет вид:

$$f(s) = \begin{cases} 0 \text{ при } s = 0 \text{ и нечетных}, \\ 0{,}25 \text{ при нечетных}. \end{cases}$$

Рассмотрим систему (1), (2), в которой

$$\underline{A}(s) = \begin{pmatrix} -0{,}5 + f(s) & f(s)/2 \\ f(s)/2 & -1 + 3f(s) \end{pmatrix},$$

$$\bar{A}(s) = \begin{pmatrix} 1 - 2f(s) & f(s) \\ f(s) & 0{,}5 \end{pmatrix}, \quad s = 0, 1, \ldots$$

Матрицы $\underline{A}(s)$ и $\bar{A}(s)$ имеют период $N = 2$.

В этом случае ни одно из условий теоремы 2 не выполнено и необходимо рассмотреть систему сравнения, матрица $B(s)$ которой имеет вид

$$B(s) = \begin{pmatrix} 1 - 2f(s) & f(s) \\ f(s) & 1 - 2f(s) \end{pmatrix},$$

и ее период равен 2. Вычислим матрицу монодромии системы сравнения:

$$\Phi(2) = B(0)B(1) = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}25 \\ 0{,}25 & 0{,}5 \end{pmatrix}.$$

Нетрудно убедиться, что собственные значения этой матрицы равны 0,25 и 0,75, лежат внутри единичного круга и, следовательно, система сравнения асимптотически устойчива, откуда, по теореме 1, следует робастная устойчивость рассматриваемой интервальной системы.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотрена задача робастной устойчивости линейных нестационарных дискретных систем управления с периодическими интервальными ограничениями на элементы матрицы системы. В работах, посвященных проблеме робастной устойчивости, рассматриваются, как правило, лишь стационарные множества, задающие ограничения на параметры системы. Получение условий робастной устойчивости для систем с нестационарными интервальными ограничениями представляет еще более сложную задачу. Теорема 1 дает простое и проверяемое, во многих случаях, условие робастной устойчивости рассматриваемых систем, которое сводится к проверке асимптотической устойчивости одной системы — системы сравнения (3). В большинстве работ, посвященных проблеме робастной устойчивости, устанавливаются лишь достаточные условия робастной устойчивости. Теорема 2 выделяет случаи, когда полученное в теореме 1 условие робастной устойчивости становится необходимым и достаточным. Приведены различные примеры рассматриваемых систем. Пример 1 касается связи рассматриваемых систем с практическими задачами. Примеры 2 и 3 иллюстрируют условия 1—4 теоремы 2 и показывают, что эти условия не вносят серьезные ограничения на выбор «нижней» и «верхней» матриц. Пример 4 показывает, что в случае невыполнения ни одного из условий 1—4 теоремы 2, на основе теоремы 1 могут быть построены система сравнения, ее матрица монодромии и проведен анализ устойчивости рассматриваемой интервальной системы.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство теоремы 1. Выберем для системы (1) вектор-функцию Ляпунова вида

$$V(x) = |x| = (|x_1|, ..., |x_n|)^T \qquad (\text{П}.1)$$

с компонентами

$$V_i(x) = |x_i|, \quad i = \overline{1, n}.$$

В формуле (П.1) и далее под абсолютной величиной $|x|$ вектора $x \in R^n$ понимается n-мерный вектор с компонентами $|x_1|, ..., |x_n|$.

В силу выражений (2)—(4) справедливы неравенства

$$V(A(s)x) = |A(s)x| \leqslant |A(s)||x| \leqslant B(s)V(x),$$

$$x \in R^n, \quad s = 0, 1, ...$$

Поэтому система (3) является системой сравнения для каждой конкретной системы (1) при любом выборе матрицы $A(s)$, удовлетворяющей интервальным ограничениям (2).

Используя дискретные аналоги теорем сравнения с вектор-функцией Ляпунова [23, *с. 259—277*], [24, *с. 92—128*], получим, что из асимптотической устойчивости по Ляпунову системы (3) следует асимптотическая устойчивость всякой конкретной системы (1) при ограничениях (2), т. е. робастная устойчивость интервальной системы (1), (2). Теорема 1 доказана.

Доказательство теоремы 2. Достаточность следует из теоремы 1.

Докажем необходимость. Пусть интервальная система (1), (2) робастно устойчива. Требуется доказать, что система сравнения (3) асимптотически устойчива. Из определения матрицы сравнения $B(s)$ в соответствии с условиями (4) следует, что в случаях 1 и 3

$$b_{ij}(s) = \max|\underline{a}_{ij}(s)|, |\bar{a}_{ij}(s)|\} = |\bar{a}_{ij}(s)| = \bar{a}_{ij}(s), \quad i, j = \overline{1, n}.$$

Следовательно, $B(s) \equiv \bar{A}(s)$. Поэтому в этих случаях система сравнения (3) совпадает с системой

$$x(s + 1) = \bar{A}(s)x(s),$$

которая асимптотически устойчива, поскольку, в силу определения, робастная устойчивость системы (1), (2) означает асимптотическую устойчивость системы (1) с любой матрицей $A(s)$, удовлетворяющей неравенствам (2), в том числе и в случае, когда $A(s) = \bar{A}(s)$.

В случаях 2 и 4 из определения матрицы сравнения $B(s)$ в соответствии с условиями (4)

$$b_{ij}(s) = \max\{|\underline{a}_{ij}(s)|, |\bar{a}_{ij}(s)|\} = |\underline{a}_{ij}(s)| = -\underline{a}_{ij}(s), \quad i, j = \overline{1, n}.$$

Следовательно $B(s) \equiv -\underline{A}(s)$, и система (3) совпадает с системой

$$x(s + 1) = -\underline{A}(s)x(s). \qquad (\text{П}.2)$$

Покажем, что система (П.2) асимптотически устойчива в том и только в том случае, когда этим свойством обладает система

$$x(s + 1) = \underline{A}(s)x(s). \qquad (\text{П}.3)$$

Пусть $x(s, s_0, x_0)$, $s \geqslant s_0 \geqslant 0$, — решение системы (П.3) с начальными условиями s_0, $x_0 = x(s_0)$. Тогда выполнено равенство $x(s, s_0, x_0) = A(s - 1)A(s - 2)...A(s_0)x(s_0)$. Пусть $y(s, s_0, x_0)$ — решение системы (П.2) с теми же начальными условиями s_0, $x_0 = x(s_0) = y(s_0)$. Аналогично $y(s, s_0, x_0) = (-1)^{s - s_0} A(s - 1)A(s - 2)...A(s_0)x(s_0)$. Следовательно, $y(s, s_0, x_0) = (-1)^{s - s_0} x(s, s_0, x_0)$, и нормы решений $x(s, s_0, x_0)$ и $y(s, s_0, x_0)$ совпадают, откуда вытекает, что асимптотическая устойчивость одной из систем (П.2) и (П.3) эквивалентна асимптотической устойчивости другой.

Система (П.3) асимптотически устойчива, поскольку, в силу определения, робастная устойчивость системы (1), (2) означает асимптотическую устойчивость системы (1) с любой матрицей $A(s)$, удовлетворяющей неравенствам (2), в том числе и в случае, когда $B(s) \equiv \underline{A}(s)$. Необходимость доказана. Теорема 2 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Dorato P., Yedavalli R.K.* Recent Advances in Robust Control. — N.-Y.: IEEE Press. — 1990.
2. *Гусев Ю.М., Ефанов В.Н., Крымский В.Г., Рутковский В.Ю.* Анализ и синтез линейных интервальных динамических систем (состояние проблемы). I, II // Изв. АН СССР. Техническая кибернетика. — 1991. — № 1. — С. 3—23; № 2. — С. 3—30.

3. *Джури Э.И.* Робастность дискретных систем (обзор) // Автоматика и телемеханика. — 1990. — № 5. — С. 3—28.
4. *Харитонов В.Л.* Асимптотическая устойчивость семейства систем линейных дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. — 1978. — Т. 14. — № 11. — С. 2086—2088.
5. *Харитонов В.Л.* Об обобщении критерия устойчивости // Изв. АН КазССР. Сер. физ.-мат. — 1978. — № 1. — С. 53—57.
6. *Cieslik J.* On posibilities of the extension of Kharitonov's stability test for interval polinomials to the discrete case // IEEE Trans. Automat. Control. — 1987. — Vol. AC-32. — N 3. — P. 237—238.
7. *Mansour M.*, *Kraus F.J.* On robust stability of Schur polynomials // Report No. 87-05. — Inst. Autonat. Cont. Ind. Electronics. — Swiss Fed. Inst. Tech. (ETH). — Zurich, 1987.
8. *Заде Л.*, *Дезоер Ч.* Теория линейных систем. Метод пространства состояний. — М.: Наука, 1970.
9. *Bialas S.* A necessary and sufficient condition for stability of interval matrices // Int. J. Control. — 1983. — Vol. 37. — N 4. — P. 717—722.
10. *Xu Daoui.* Simple Criteria for stability of interval matrices // Internat. Journ. Contr. — 1985. — Vol. 41. — N 1. — P. 289—295.
11. *Shih-Wei Kau*, *Yung-Sheng Liu.* A new LMI condition for robust stability of discrete-time uncertain systems // Systems & Control Letters. — December 2005. — Vol. 54. — Iss. 12. — P. 1195—1203.
12. *Buslowicz M.* Simple conditions for robust stability of positive discrete-time linear systems with delays // Control and Cybernetics. — 2010. — Vol. 39. — N 4. — P. 1159—1171.
13. *Buslowicz M.*, *Kaczorek T.* Robust stability of positive discrete-time interval systems with time- delays // Bulletin of the Polish Academy of Sciences. Technical Sciences. — 2004. — Vol. 52. — N 2. — P. 99—102.
14. *Siljak D.* Parameter space methods for robust control design: a guided tour // IEEE Trans. on Automat. Control. — 1989. — Vol. AC-34. — N 7. — P. 674—688.
15. *Поляк Б.Т.*, *Щербаков П.С.* Робастная устойчивость и управление. — М.: Наука, 2002.
16. *Bauer P.H.*, *Premaratne K.* Robust Stability of Time-Variant Interval Matrices // Proc. 29th Conf. on Decision and Control. Honolulu, HI. — Dec. 1990. — P. 334—335.
17. *Mota F.*, *Kaszkurewicz E.*, *Bhaya A.* Robust Stabilization of Time-Varying Discrete Interval Systems // Proc. 31st Conf. on Decision and Control. Tucson, AZ. — Dec. 1992. — P. 341—346.
18. *Молчанов А.П.*, *Морозов М.В.* Робастная абсолютная устойчивость нестационарных дискретных систем управления с периодическими ограничениями // Автоматика и телемеханика. — 1995. — № 10. — С. 93—100.
19. *Морозов М.В.* Условия робастной устойчивости линейных нестационарных систем управления с интервальными ограничениями // Проблемы управления. — 2009. — № 3. — С. 23—26.
20. *Халанай А.*, *Векслер Д.* Качественная теория импульсных систем. — М.: Мир, 1971.
21. *Молчанов А.П.*, *Морозов М.В.* Функции Ляпунова для нелинейных нестационарных дискретных систем управления с периодической линейной частью // Автоматика и телемеханика. — 1992. — № 10. — С. 37—45.
22. *Шильман С.В.* Метод производящих функций в теории динамических систем. — М.: Наука, 1978.
23. *Метод* векторных функций Ляпунова в теории устойчивости / Р.З. Абдуллин, Л.Ю. Анапольский, А.А. Воронов и др. Под ред. А.А. Воронова, В.М. Матросова. — М.: Наука, 1987.
24. *Анапольский Л.Ю.* Метод сравнения в анализе дискретных систем. Вектор-функции Ляпунова и их построение. — Новосибирск: Наука, 1980.

Статья представлена к публикации членом редколлегии В.Ю. Рутковским.

Михаил Владимирович Морозов — канд. физ.-мат. наук, ст. науч. сотрудник, Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, г. Москва,
☎ (495) 334-92-50, ✉ miguel@ipu.ru.