УДК 681.5.037

УСЛОВИЯ РОБАСТНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ЛИНЕЙНЫХ НЕСТАЦИОНАРНЫХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ С ИНТЕРВАЛЬНЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ

М.В. Морозов

На основе метода сравнения с вектор-функцией Ляпунова специального вида установлены достаточные условия робастной устойчивости систем рассматриваемого класса. В случае периодических интервальных ограничений на элементы матрицы системы найден вид систем, для которых полученные условия являются не только достаточными, но и необходимыми.

Ключевые слова: система управления, робастная устойчивость, интервальные ограничения, вектор-функция Ляпунова.

ВВЕДЕНИЕ

Важное место в теории управления занимает проблема робастной устойчивости, которая связана с получением условий устойчивости не одной конкретной системы, а целой совокупности систем с заданными ограничениями на их параметры. Её решению для линейных систем управления с параметрической неопределенностью посвящено большое число работ (см., например, библиографию в работах [1—8]). В них рассматривались, как правило, лишь стационарные множества, задающие ограничения на параметры системы. Обычно для матрицы линейной части системы в качестве такого множества рассматривается некоторый выпуклый многогранник в пространстве матриц заданной размерности. В частном случае так называемых интервальных матриц [2, 3, 7] таким многогранником является многомерный параллелепипед, грани которого параллельны соответствующим координатным плоскостям в матричном пространстве. Относительно характеристик нелинейных элементов обычно предполагается, что они принадлежат заданным секторам (с фиксированными границами), как в случае классической задачи об абсолютной устойчивости.

Однако, как отмечалось в работах [9, 10], ряд практических задач, в частности, задача об абсолютной устойчивости систем управления с периодически изменяющимися параметрами, приводит к необходимости рассмотрения таких множеств изменения параметров системы, границы которых изменяются по заданным периодическим законам.

В работах [11, 12] с помощью метода функций Ляпунова были установлены общие критерии (необходимые и достаточные условия) робастной устойчивости для линейных нестационарных непрерывных и дискретных систем управления с периодически изменяющимися ограничениями на элементы матрицы системы. Эти критерии сформулированы в форме условий существования положительно определенной функции Ляпунова из некоторого функционального (в непрерывном случае) или параметрического (в дискретном случае) класса, строго убывающей на решениях рассматриваемой системы.

В общем случае эффективная проверка выполнения этих условий затруднительна, поскольку в конструкции соответствующей функции Ляпунова присутствуют параметры, значения которых априори неизвестны. В связи с этим несомненный теоретический и практический интерес представляет задача получения конструктивно проверяемых достаточных условий робастной устойчивости для заданного класса систем. Для линейных нестационарных систем управления со стационарными интервальными ограничениями на элементы матрицы системы такие достаточные условия были получены в работах [13] (в непрерывном случае) и [14, 15] (в дискретном случае).

В настоящей работе установлены достаточные условия робастной устойчивости для случая нестационарных интервальных ограничений. Для их получения используется метод сравнения с вектор-функцией Ляпунова специального вида. Показано, что если интервальные ограничения являются периодическими, то в ряде случаев полученные достаточные условия робастной устойчивости оказываются одновременно и необходимыми.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается линейная нестационарная система, описываемая уравнением вида

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x \in R^n, \tag{1}$$

где $A(t) = (a_{ij}(t))_{i,j=1}^{n}$ — произвольная матрица ($a_{ij}(t)$, $i, j = \overline{1, n}$ — измеримые функции), которая на всяком конечном интервале полуоси $[0, \infty)$ почти всюду удовлетворяет неравенствам

$$\underline{A}(t) \leqslant A(t) \leqslant \bar{A}(t), \quad \underline{A}(t) = (\underline{a}_{ij}(t))_{n,j=1}^{n},$$
$$\bar{A}(t) = (\bar{a}_{ij}(t))_{i,j=1}^{n}. \tag{2}$$

Матричные неравенства здесь понимаются поэлементно (всюду в дальнейшем неравенства между матрицами и векторами понимаются как поэлементные неравенства), т. е.

$$\underline{a}_{ij}(t) \leqslant a_{ij} \leqslant \bar{a}_{ij}(t), \quad i, j = \overline{1, n},$$

где $\underline{a}_{ij}(t)$, $\bar{a}_{ij}(t)$, $i, j = \overline{1, n}$ — произвольные измеримые функции.

Таким образом, рассматривается не одна фиксированная система (1), а совокупность линейных нестационарных систем (1) с интервальными ограничениями (2). Будем в дальнейшем называть систему (1) интервальной нестационарной системой.

Как и в работе [11], будем называть интервальную нестационарную систему (1) робастно устойчивой относительно ограничений (2), если ее нулевое решение $x(t) \equiv 0$ асимптотически устойчиво по Ляпунову при любом выборе матрицы $A(t)$, удовлетворяющей неравенствам (2).

Задача состоит в получении эффективно проверяемых достаточных условий робастной устойчивости нестационарной интервальной системы (1). Основой для получения этих условий служит метод сравнения с вектор-функцией Ляпунова специального вида [16].

2. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Введем в рассмотрение матрицу

$$\widehat{A} = (a_{ij}(t))_{i,j=1}^{n}, \quad \widehat{a}_{ii}(t) = \bar{a}_{ii}(t),$$
$$\widehat{a}_{ii}(t) = \max\{|\underline{a}_{ij}(t)|, |\bar{a}_{ij}(t)|\}, \quad i \neq j, \quad i, j = \overline{1, n}. \tag{3}$$

Сопоставим матрице $\widehat{A}(t)$ систему

$$\dot{x} = \widehat{A}(t)x. \tag{4}$$

Теорема 1. *Интервальная нестационарная система* (1) *робастно устойчива относительно ограничений* (2)*, если система* (4) *асимптотически устойчива по Ляпунову.* ♦

Доказательство теоремы приведено в Приложении.

Предположим, что заданные ограниченные «крайние» матрицы $\underline{A}(t)$ и $\bar{A}(t)$ периодичны с периодом $T > 0$, т. е. выполнены условия

$$\underline{A}(t + T) \equiv \underline{A}(t), \quad \bar{A}(t + T) \equiv \bar{A}(t). \tag{5}$$

В этом случае матрица $\widehat{A}(t)$ периодична с периодом T.

Периодические ограничения вида (5) возникают, например, при рассмотрении нестационарной системы (1) [17], в которой элементы $a_{ij}(t)$ матрицы $A(t)$ представимы в виде

$$a_{ij}(t) = u_{ij}(t)f_{ij}(t), \quad i, j = \overline{1, n}, \tag{6}$$

где $f_{ij}(t)$, $i, j = \overline{1, n}$ — заданные периодические функции периода T, а $u_{ij}(t)$ — произвольные измеримые функции, удовлетворяющие стационарным ограничениям

$$\alpha_{ij} \leqslant u_{ij}(t) \leqslant \beta_{ij}, \quad i, j = \overline{1, n}. \tag{7}$$

Нетрудно проверить, что в этом случае периодические функции $\underline{a}_{ij}(t)$ и $\bar{a}_{ij}(t)$ в неравенствах (2) определяются равенствами

$$\underline{a}_{ij}(t) = 0{,}5\{(\alpha_{ij} + \beta_{ij})f_{ij}(t) - |\alpha_{ij} - \beta_{ij}||f_{ij}|\},$$
$$\bar{a}_{ij}(t) = 0{,}5\{(\alpha_{ij} + \beta_{ij})f_{ij}(t) + |\alpha_{ij} - \beta_{ij}||f_{ij}|\}.$$

Как известно [18], необходимым и достаточным условием асимптотической устойчивости системы (4) является неравенство

$$\rho(\Phi(T)) < 1, \tag{8}$$

где через $\rho(\Phi(T))$ обозначен спектральный радиус матрицы монодромии $\Phi(T)$ системы (4).

В общем случае аналитическая проверка выполнения условия (8) затруднительна в связи со сложностью построения матрицы монодромии $\Phi(T)$ в явном виде. В таких случаях можно применять численно-аналитические методы [18], связанные с численным построением матрицы $\Phi(T)$.

Можно выделить один частный случай, когда достаточные условия робастной устойчивости системы (1) с интервальными ограничениями (2) периодического вида (5), устанавливаемые теоремой 1, оказываются одновременно и необходимыми.

Теорема 2. *Пусть выполнены неравенства*

$$|\underline{a}_{ij}(t)| \leqslant \bar{a}_{ij}(t) \text{ при всех } i \neq j,\ i, j = \overline{1, n}. \qquad (9)$$

Тогда для робастной устойчивости системы (1) *относительно интервальных ограничений* (2) *периодического вида* (5) *необходимо и достаточно, чтобы было выполнено условие* (8). ♦

Доказательство теоремы приведено в Приложении.

Заметим, что неравенства (9) заведомо выполнены в случае, когда элементы матрицы $A(t)$ представимы в виде (6) и в неравенствах (7) $\alpha_{ij} = -1$, $\beta_{ij}(t) = 1$, $i, j = \overline{1, n}$.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство теоремы 1. Используем метод сравнения с вектор-функцией Ляпунова [16]. Рассмотрим вектор-функцию Ляпунова вида

$$V(x) = |x| = (|x_1|, \ldots, |x_n|)^T \qquad (\text{П}.1)$$

с компонентами

$$V_i(x) = |x_i|, \quad i = \overline{1, n}. \qquad (\text{П}.2)$$

В выражении (П.1) и далее под абсолютной величиной $|x|$ вектора $x \in R^n$ понимается n-мерный вектор с компонентами $|x_1|, \ldots, |x_n|$.

Правой верхней производной от $V(x)$ относительно системы (1) будем называть вектор-функцию [13]

$$D^+V(x(t)) = \overline{\lim_{h \to +0}} \frac{V(x(t+h)) - V(x(t))}{h}.$$

Вычислим компоненты вектор-функции $D^+V(x(t)) = (D^+V_1(x(t)), \ldots, D^+V_n(x(t)))^T$:

$$D^+V_i(x(t)) = \operatorname{sign} x_i(t+0)\dot{x}_i(t) = a_{ii}(t)|x_i(t)| +$$
$$+ \{\operatorname{sign} x_i(t+0)\} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} a_{ij}(t)x_j(t) \leqslant a_{ii}(t)|x_i(t)| + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}(t)||x_j(t)|.$$

Отсюда с учетом неравенства (2) и определения матрицы $\hat{A}(t)$ в силу формул (3) вытекает неравенство:

$$D^+V_i(x(t)) \leqslant \hat{a}_{ii}(t)|x_i(t)| + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \hat{a}_{ij}(t)|x_j(t)|. \qquad (\text{П}.3)$$

Следовательно, в силу формулы (П.2) и неравенства (П.3) справедливы неравенства

$$D^+V_i(x(t)) \leqslant \hat{a}_{ii}(t)V_i(t) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \hat{a}_{ij}(t)V_j(t), \quad i = \overline{1, n}. \qquad (\text{П}.4)$$

Система скалярных неравенств (П.4) эквивалентна матричному неравенству

$$D^+V(x(t)) \leqslant \hat{A}(t)V(x(t)). \qquad (\text{П}.5)$$

В работе [16] (см. гл. 2, § 2) рассматривается система

$$\frac{dx}{dt} = X(t, x), \quad X(t, 0) \equiv 0, \quad x \in R^n. \qquad (\text{П}.6)$$

Вещественные функции $X^i(t, x^1, \ldots, x^n)$ определены и непрерывны в области $\Gamma = \{(t, x)\colon \|x\| < \eta,\ t \geqslant 0\}$ ($\eta = \text{const} > 0$ или $\eta = \to +\infty$) и имеют в ней непрерывные частные производные по $x^1, \ldots, x^n$, которые ограничены в каждой замкнутой области $\Gamma_0 = \{(t, x) \in \Gamma\colon \|x\| \leqslant \eta_0,\ t \geqslant 0\}$, $0 < \eta_0 < \eta$. Это обеспечивает существование, единственность и нелокальную продолжимость решений системы, непрерывную зависимость их от начальных условий (и времени t) в области Γ. При $\eta \to \infty$ предполагается продолжимость решений для всех $t \in I = [0, +\infty)$. Рассматривается также вектор-функция $\gamma(t, x) = (\gamma^1(t, x), \ldots, \gamma^k(t, x))^T$, $\gamma\colon \Gamma \to R^k$. Для нее вводится норма $\|\gamma(t, x)\| = |\gamma^1(t, x)| + \ldots + |\gamma^k(t, x)|$ и производная по времени в силу системы (П.6)

$$\dot{\gamma}(t, x) = \begin{pmatrix} \dot{\gamma}^1(t, x) \\ \ldots \\ \dot{\gamma}^k(t, x) \end{pmatrix} = \frac{\partial \gamma(t, x)}{\partial t} + \frac{\partial \gamma(t, x)}{\partial x} X(t, x),$$

где $\frac{\partial \gamma}{\partial t}$ — вектор-столбец, а $\frac{\partial \gamma}{\partial x}$ — $k \times n$-матрица с элементами $\frac{\partial \gamma^s}{\partial x^i}$.

Непрерывно дифференцируемая функция $\gamma\colon \Gamma \to R^k$ и вспомогательное дифференциальное уравнение

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y), \quad y \in R^k, \qquad (\text{П}.7)$$

называются вектор-функцией сравнения и системой сравнения для системы (П.6), если для них выполнены условия

$$\dot{\gamma}(t, x) \leqslant f(t, \gamma(t, x)) \text{ при } (t, x) \in \Gamma,$$

$$f \in W(\Omega), \quad f(t, 0) = 0,$$
$$\Omega = \{(t, y) \in I \times R^k\colon \|y\| < K_1,\ t \geqslant 0\},$$

$$K_1 \to +\infty \text{ или } \sup_{(t, x) \in \Gamma} \|\gamma(t, x)\| = K < K_1 < +\infty,$$

где $W(\Omega)$ — класс функций, определенных, непрерывных в открытой области $\Omega \subseteq I \times R^k$ и квазимонотонных в следующем смысле: каждая вещественная функция f^s является неубывающей по совокупности внедиагональных переменных ($y^1, \ldots, y^{s-1}, y^{s+1}, \ldots, y^k$) в области Ω, т. е. такой, что $f^s(t, y_1) \leqslant f^s(t, y_2)$ для любых $(t, y_1), (t, y_2) \in \Omega$: $y_1^1 \leqslant y_2^1, \ldots, y_1^{s-1} \leqslant y_2^{s-1}$, $y_1^s = y_2^s$, $y_1^{s+1} \leqslant y_2^{s+1}, \ldots, y_1^k \leqslant y_2^k$.

Для вектор-функции $\gamma(t, x)$ и целого числа $l(1 \leqslant l \leqslant k)$ на Γ определена скалярная непрерывная функция $\bar\gamma(t, x) = \max\limits_{s=\overline{1, l}} \gamma^s(t, x)$.

Вектор-функция сравнения γ для системы (П.6) называется вектор-функцией Ляпунова для этой системы, если она обладает одним из следующих свойств:

$\bar\gamma(t, x) > 0$ при $\|x\| > 0$, $t \geqslant 0$;

$\bar\gamma(t, x)$ определенно положительна;

$\bar\gamma(t, x)$ допускает бесконечно большой низший предел;

$\bar\gamma(t, x) \geqslant \alpha\|x\|^\xi$ $(\alpha > 0, \xi \geqslant 1)$;

$\gamma^s(t, x)$ допускает бесконечно малый высший предел;

$\|\gamma(t, x)\| \leqslant \beta\|x\|^\xi$ $(\beta > 0, \xi \geqslant 1)$.

В работе [16] (см. гл. 2, § 4) доказана следующая теорема.

Для асимптотической устойчивости невозмущенного движения $x = 0$ системы (П.6) *достаточно, чтобы для некоторых Γ_0, k и $l(1 \leqslant l \leqslant k)$ существовала вектор-функция Ляпунова, обладающая в Γ_0 следующими свойствами:*

— функция $\bar\gamma(t, x)$ определенно положительна;

— нулевое решение системы сравнения (П.7) *асимптотически устойчиво относительно $y^1, ..., y^l$ при условии $y_0 = \gamma(t_0, x_0)$ при $(t_0, x_0) \in \Gamma_0$.*

Так как скалярная функция $\bar v(x) = \max\limits_{1 \leq i \leq n} V_i(x) = \max\limits_{1 \leq i \leq n} |x_i|$ определенно положительна в R^n, то в соответствии с приведенными выше определениями и с учетом неравенства (П.5) вектор-функция $V(x)$ и система (4) являются соответственно вектор-функцией Ляпунова и системой сравнения для всякой конкретной системы вида (1) при любом выборе матрицы $A(t)$, удовлетворяющей неравенствам (2). Поэтому из приведенной выше теоремы следует, что условие асимптотической устойчивости системы сравнения (4) обеспечивает асимптотическую устойчивость всякой системы из интервального множества (1), (2), а значит, и робастную устойчивость системы (1) относительно интервальных ограничений (2). Теорема 1 доказана.

Доказательство теоремы 2. В доказательстве нуждается лишь необходимость, так как достаточность следует из теоремы 1. Для доказательства необходимости заметим, что из определения матрицы $\hat A(t)$ в соответствии с выражением (3) и условия (9), вытекает неравенство $\hat A(t) = \bar A(t)$. Поэтому в рассматриваемом случае матрица монодромии $\Phi(T)$ для системы (7) будет одновременно матрицей монодромии для периодической системы

$$\dot x = \bar A(t)x. \tag{П.8}$$

Асимптотическая устойчивость системы (П.8) является необходимым условием для робастной устойчивости интервальной системы (1), (2). Следовательно, в условиях теоремы 2 неравенство (8) определяет не только достаточное, но также и необходимое условие робастной устойчивости системы (1), (2). Теорема 2 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Dorato P., Yedavalli R.K.* Recent Advances in Robust Control. — New York: IEEE Press, 1990.
2. *Гусев Ю.М., Ефанов В.Н., Крымский В.Г., Рутковский В.Ю.* Анализ и синтез линейных интервальных динамических систем (состояние проблемы). I, II // Изв. АН СССР. Техническая кибернетика. — 1991. — № 1. — С. 3—23; № 2. — С. 3—30.
3. *Джури Э.И.* Робастность дискретных систем (обзор) // Автоматика и телемеханика. — 1990. — № 5. — С. 3—28.
4. *Zhoy K., Doyle J.C., Glover K.* Robust and optimal control. Upper Saddle River. — NJ: Prentice Hall, 1996.
5. *Sanchez-Pena R., Sznaier M.* Robust systems: theory and applications. — New York, Wiley, 1998.
6. *Keel L.H., Bhattacharyya S.P.* Robust stability and performance with fixed-order controllers // Automatica. — 1999. — Vol. 35. — P. 1717—1724.
7. *Поляк Б.Т., Щербаков П.С.* Робастная устойчивость и управление. — М.: Наука, 2002.
8. *Поляк Б.Т., Щербаков П.С.* Трудные задачи линейной теории управления и некоторые подходы к их решению // Автоматика и телемеханика. — 2005. — № 5. — С. 7—46.
9. *Молчанов А.П., Морозов М.В.* Абсолютная устойчивость нелинейных нестационарных систем управления с периодической линейной частью // Там же. — 1992. — № 2. — С. 49—59.
10. *Молчанов А.П., Морозов М.В.* Функции Ляпунова для нелинейных нестационарных дискретных систем управления с периодической линейной частью // Там же. — 1992. — № 10. — С. 37—45.
11. *Молчанов А.П., Морозов М.В.* Робастная устойчивость линейных нестационарных систем с периодическими параметрами // Устойчивость и колебания нелинейных систем управления / Тез. докл. Междун. семинара. Самара, июль 1994. — С. 32.
12. *Молчанов А.П., Морозов М.В.* Робастная абсолютная устойчивость нестационарных дискретных систем управления с периодическими ограничениями // Автоматика и телемеханика. — 1995. — № 10. — С. 93—100.
13. *Xu Daoui.* Simple Criteria for stability of interval matrices // Internat. Journ. Contr. — 1985. — Vol. 41, N 1. — P. 289—295.
14. *Bauer P.H., Premaratne K.* Robust Stability of Time-Variant Interval Matrices // Proc. 29th Conference on Decision and Control. Honolulu, HI. — Dec. 1990. — P. 334—335.
15. *Mota F, Kaszkurewicz and Bhaya A.* Robust Stabilization of Time-Varying Discrete Interval Systems // Proc. 31st Conference on Decision and Control. Tucson, AZ. Dec. 1992. — P. 341—346.
16. *Абдуллин Р.З.* и др. Метод векторных функций Ляпунова в теории устойчивости / Под ред. А.А. Воронова, В.М. Матросова. — М.: Наука, 1987.
17. *Шильман С.В.* Метод производящих функций в теории динамических систем. — М.: Наука, 1978.
18. *Якубович В.А., Старжинский В.М.* Линейные и дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения. — М.: Наука, 1978.

Статья представлена к публикации членом редколлегии С.Д. Земляковым.

Морозов Михаил Владимирович — канд. физ.-мат. наук,
ст. науч. сотрудник, Институт проблем управления
им. В.А. Трапезникова РАН, г. Москва, ☎ (495) 334-90-31,
✉ miguel@ipu.ru.