УДК 62-501.42;62-504.12

# АЛГОРИТМ АНАЛИЗА РОБАСТНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ НЕПРЕРЫВНЫХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ С ПЕРИОДИЧЕСКИМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ

М.В. Морозов

Для непрерывных линейных нестационарных систем управления с периодическими ограничениями на их параметры предложен алгоритм численного построения периодических по времени функций Ляпунова из заданных параметрических классов. Алгоритм основан на решении соответствующих минимаксных задач математического программирования. Установлена его сходимость и приведен пример его реализации на компьютере.

**Ключевые слова:** непрерывная линейная нестационарная система управления, периодическое ограничение, функции Ляпунова, алгоритм численного построения, параметрический класс, минимаксная задача, математическое программирование.

## ВВЕДЕНИЕ

Одно из основных требований к системе управления состоит в обеспечении ее устойчивости. В реальных условиях из-за наличия различных возмущений параметры системы управления и характеристики ее отдельных элементов часто известны неточно и определены неоднозначно. Это приводит к необходимости анализа устойчивости семейства систем, параметры и характеристики элементов которых принадлежат некоторым заданным множествам. В современной литературе по теории управления соответствующая проблема получила название задачи робастной устойчивости [1, 2].

Анализу робастной устойчивости линейных систем управления, как с параметрической, так и непараметрической неопределенностью, посвящено большое число работ (см., например, обзор [3]). Большинство результатов получено для линейных стационарных систем. Значительно меньшее число работ связано с рассмотрением линейных нестационарных и нелинейных систем (см., например, работы [4—7]). В известных автору работах, посвященных анализу как стационарных, так и нестационарных систем, рассматривались лишь стационарные множества, задающие ограничения на параметры системы и характеристики нелинейных элементов. Как правило, для матрицы линейной части системы в качестве такого множества рассматривается некоторый заданный выпуклый многогранник в пространстве матриц заданной размерности. В частном случае так называемых интервальных матриц [8—14] таким многогранником служит многомерный параллелепипед, грани которого параллельны соответствующим координатным плоскостям в матричном пространстве. Относительно характеристик нелинейных элементов обычно предполагается [5, 6], что они принадлежат заданным секторам (с фиксированными границами), как в случае классической задачи об абсолютной устойчивости [15].

Однако ряд практических задач, в частности задача об абсолютной устойчивости систем управления с периодически меняющимися параметрами [16, 17], приводит к необходимости рассмотрения таких множеств изменения параметров системы и характеристик нелинейных элементов, границы которых изменяются по заданным периодическим законам.

Из работ [16, 17] вытекает, что необходимые и достаточные условия робастной устойчивости таких систем могут быть установлены с помощью периодических по времени функций Ляпунова из класса квазиформ четной степени (в случае непрерывных систем) и из класса форм четной степени (в случае дискретных систем). Получению условий робастной устойчивости систем с периодическими ограничениями на параметры посвящены работы [18, 19], в которых был применен метод сравнения с вектор-функцией Ляпунова специального вида. Поскольку в общем случае аналитическая проверка условий соответствующих теорем затруднительна, возникает необходимость разработки эффективных методов численного построения функций Ляпунова из классов, выделенных в работах [16, 17].

В настоящей работе для анализа линейных непрерывных нестационарных систем управления с периодическими ограничениями развиваются методы численного построения функций Ляпунова из заданных параметрических классов, разработанные для нелинейных систем управления со стационарными ограничениями на их параметры [20—23]. Показано, что в стационарном случае задача построения таких функций Ляпунова сводится к минимаксным задачам математического программирования (в частности, к задаче поиска седловых точек [22, 23]), для решения которых можно воспользоваться известными методами нелинейного программирования [20—23].

Основу разработанного в настоящей работе алгоритма составляет изложенный в работе [24] численный метод анализа устойчивости линейных непрерывных систем управления с фиксированной матрицей коэффициентов. Для анализа устойчивости таких систем использовались функции Ляпунова из класса квадратичных форм с периодической матрицей, представимой конечной матричной суммой ряда Фурье. В данной работе для линейных непрерывных нестационарных систем управления с периодическими ограничениями разработан сходящийся алгоритм численного построения функций Ляпунова из класса однородных форм четной степени с периодическими коэффициентами, представимыми в виде конечной суммы ряда Фурье. Так же, как и в работе [24], показано, что задача построения таких функций Ляпунова сводится к соответствующей минимаксной задаче и приведены теоремы, обосновывающие его применение.

Построенный алгоритм может служить критерием робастной устойчивости рассматриваемых систем управления и, одновременно, критерием абсолютной устойчивости систем, рассмотренных в работах [16, 17], в форме численной процедуры.

## 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматриваются линейные нестационарные непрерывные системы управления, описываемые дифференциальными уравнениями вида

$$\dot{x} = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k(t) A_k(t) x, \tag{1}$$

где $x$ — $n$-мерный вектор состояния системы, $A_k(t) = (a_{ij}^k(t))_{i,j=1}^n$ — фиксированные непрерывные периодические матрицы периода $T > 0$, $A_k(t + T) = A_k(t)$, $k = \overline{1, m}$, а $\lambda_k(t)$, $k = \overline{1, m}$, — произвольные ограниченные и измеримые функции, удовлетворяющие при $t \geqslant 0$ условиям

$$\lambda_k(t) \geqslant 0, \quad \sum_{k=1}^{m} \lambda_k(t) = 1. \tag{2}$$

Будем называть систему (1) робастно устойчивой относительно нестационарной параметрической неопределенности $\lambda(t) = \{\lambda_k(t), k = \overline{1, m}\}$, если ее нулевое решение $x(t) \equiv 0$ асимптотически устойчиво по Ляпунову при любом выборе неопределенности $\lambda(t)$, удовлетворяющей условиям (2).

Из работы [16] следует, что система (1) эквивалентна дифференциальному включению

$$\dot{x} \in F(t, x), \quad F(t, x) = \\ = \left\{ y : y = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k A_k(t) x,\ \lambda_k \geqslant 0,\ \sum_{k=1}^{m} \lambda_k = 1 \right\}, \tag{3}$$

с периодической по $t$ многозначной правой частью $F(t, x)$, $F(t + T, x) \equiv F(t, x)$. Эквивалентность понимается в смысле совпадения множеств решений системы (1) и включения (3) при одинаковых начальных условиях. Множество $F(t, x)$ в каждой точке $x \in R^n$ представляет собой выпуклый многогранник, границы которого периодически изменяются с периодом $T$. По этой причине функция $F(t, x)$ задает периодические ограничения на параметры исходной нестационарной системы (1).

Из работы [16] также вытекает, что для робастной устойчивости системы (1) (или, что то же самое, для асимптотической устойчивости нулевого решения $x(t) \equiv 0$ включения (3)) необходимо и достаточно существование единой, периодической по времени, с периодом $T$, функции Ляпунова вида квазиформы по $x$ степени $2p$, $p \geqslant 1$:

$$V_{2p}(t, x) = \sum_{i=1}^{N_p} \gamma_i(t, x) \psi_i(x), \tag{4}$$

$$\gamma_i(t, \mu x) = \gamma_i(t, x), \quad x \neq 0, \quad \mu \neq 0,$$

$$\gamma_i(t + T, x) = \gamma_i(t, x), \quad i = \overline{1, N_p},$$

где $\psi_i(x)$, $i = \overline{1, N_p}$ — всевозможные элементарные мономы степени $2p$ $\left(\text{т. е. } \psi_i(x) = x_1^{m_{1i}} \dots x_n^{m_{ni}}, \text{ где } \sum_{j=1}^{n} m_{ji} = 2p\right)$, $N_p = C_{n+2p-1}^{2p}$ — общее число таких мономов. К функциям вида (4) относятся функции из класса форм степени $2p$, $p \geqslant 1$, по $x$ с периодическими по $t$ коэффициентами

$$V_{2p}(t, x) = \sum_{i=1}^{N_p} \gamma_i(t)\psi_i(x), \qquad (5)$$

где $\gamma_i(t)$ $(\gamma_i(t + T) = \gamma_i(t))$, $i = \overline{1, N_p}$ — коэффициенты формы (5). Предполагается, что периодические коэффициенты

$$\gamma_i(t) = b_0^i + \sum_{j=1}^{M} (l_j^i \sin\omega jt + b_j^i \cos\omega jt),$$
$$\omega = 2\pi T^{-1}, \quad i = \overline{1, N_p}. \qquad (6)$$

Функции Ляпунова (5), (6) являются подклассом класса функций (4) и устанавливают, в отличие от функций Ляпунова (4), лишь достаточные условия робастной устойчивости системы (1) (или асимптотической устойчивости решения включения (3)). Однако, рассмотрение в функции (5) параметрических коэффициентов $\gamma_i(t)$, $i = \overline{1, N_p}$ вида (6), зависящих лишь от $t$, позволяет перейти к параметрическому классу функций Ляпунова (5), (6), что существенно облегчает задачу построения таких функций.

Задача состоит в разработке эффективного алгоритма численного построения для включения (3), а, следовательно, и для системы (1), функций Ляпунова $V_{2p}(t, x)$ вида (5), (6). В соответствии с работой [24] такой алгоритм будет служить численным критерием асимптотической устойчивости нулевого решения включения (3) и, одновременно, критерием робастной устойчивости системы (1).

## 2. АЛГОРИТМ ЧИСЛЕННОГО ПОСТРОЕНИЯ ФУНКЦИЙ ЛЯПУНОВА

Метод построения функций Ляпунова, изложенный в работе [24], обобщим на случай дифференциальных включений (3).

Для анализа асимптотической устойчивости нулевого решения $x(t) \equiv 0$ включения (3) будем пользоваться функциями Ляпунова (5), (6). В соответствии с определением, приведенным в работе [25], производная функций Ляпунова $V_{2p}(t, x)$ в силу включения (3) определяется как

$$\dot V_{2p}(t, x) = \frac{\partial V_{2p}(t, x)}{\partial t} + \max_{y \in F(t, x)}\left(\frac{\partial V_{2p}(t, x)}{\partial x}, y\right) =$$
$$= \frac{\partial V_{2p}(t, x)}{\partial t} + \max_{1 \le k \le m}\left(\frac{\partial V_{2p}(t, x)}{\partial x}, A_k(t)x\right). \qquad (7)$$

Отсюда следует, что условие отрицательной определенности производной (7) эквивалентно выполнению совокупности неравенств

$$f_k(\alpha, t, x) = \sum_{i=1}^{N_p} \dot\gamma_i(t)\psi_i(x) +$$
$$+ \sum_{i=1}^{N_p} \gamma_i(t)\left(\frac{\partial \psi_i(x)}{\partial x}, A_k(t)x\right) < 0,$$
$$x \ne 0, \quad t \in [0, T], \qquad (8)$$

где $k = \overline{1, m}$, а через $\alpha$ обозначен $N_\alpha$-мерный вектор $(\alpha_j)$, $j = \overline{1, N_\alpha}$, $N_\alpha = (2M + 1)N_p$, составленный из коэффициентов $b_0^i$, $l_j^i$, $b_j^i$, $i = \overline{1, N_p}$, $j = \overline{1, M}$, в представлении (6) коэффициентов $\gamma_i(t)$ функции Ляпунова (5).

При дополнительном условии (это условие используется в приведенной далее лемме при оценке констант Липшица и может быть заменено любым другим, менее жестким условием, позволяющим выполнить такую оценку) о непрерывной дифференцируемости всех элементов матриц $A_k(t)$, $k = \overline{1, m}$, (см. включение (3)) рассмотрим задачу математического программирования

$$\beta = \min_{\alpha \in G} \max_{t \in [0, T]} \max_{\|x\|_\infty = 1} \max_{1 \le k \le m} f_k(\alpha, t, x), \qquad (9)$$

где $G = \left\{\alpha : \sum_{i=1}^{N_\alpha} \alpha_i^2 \le 1\right\}$, $\|x\|_\infty = \max_{1 \le i \le n} |x_i|$.

**Теорема 1.** *Для того чтобы для включения* (3) *существовала функция Ляпунова* $V_{2p}(\alpha, t, x)$ *вида* (5), (6) *с отрицательно определенной в силу включения* (3) *производной* $\dot V_{2p}(\alpha, t, x)$, *необходимо и достаточно, чтобы решение задачи* (8) *удовлетворяло неравенству*

$$\beta < 0. \ \blacklozenge \qquad (10)$$

Доказательство теоремы 1 проводится с надлежащими изменениями по схеме доказательства теоремы 1 в работе [24].

Для решения минимаксной задачи (9), так же, как и в работе [1], предлагается воспользоваться, с необходимыми изменениями, схемой алгоритма, описанного в статье [24]. В ней функция $\dot V(t, x)$ представляла собой форму второй степени по $x$, у которой локальный максимум по $x$ совпадает с глобальным, и при максимизации $\dot V(t, x)$ по $x$ в соответствующей минимаксной задаче была использована одна из модификаций метода наискорейшего спуска. В случае задачи (9) глобальная максимизация по $x$ функции максимума $\max\limits_{1 \le k \le m} f_k(\alpha, t, x)$ градиентными методами затруднена тем обстоятельством, что у рассматриваемой функции локальный максимум может не совпадать с глобальным максимумом. В связи с этим, в отличие от алгоритма, приведенного в статье [24], в задаче (9) максимизацию по $x$, так же, как и по $t$, предполагается проводить на дискретной сетке. Поэтому, для удобства, максимизация по $x$ проводится не на сфере $\left\{x\colon \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 = 1\right\}$, а на поверхности единичного куба $\{x\colon \|x\|_\infty = 1\}$.

На множестве $D = [0, T] \times \{\|x\|_\infty = 1\}$ введем последовательность вложенных друг в друга сеток $\{S(h_i^t, h_i^x)\}$, $i = 1, 2, \ldots$ Множества узлов $t_\nu$, $\nu = \overline{1, [T/h_i^t] + 1}$ и $x_s$, $s = \overline{1, 2n([2/h_i^x] + 1)}$, сетки $\{S(h_i^t, h_i^x)\}$ определяются ее шагами $h_i^t$ и $h_i^x$ (по $t$ и по $x$ соответственно). Будем предполагать, что сетки вложены друг в друга, т. е. $\{S(h_i^t, h_i^x)\} \in \{S(h_{i+1}^t, h_{i+1}^x)\}$ и $h_{i+1}^t = h_i^t/2$, $h_{i+1}^x = h_i^x/2$.

На сетке $\{S(h_i^t, h_i^x)\}$ определим функцию

$$\chi_i(\alpha) = \max_{(t, x) \in S(h_i^t h_i^x)} \max_{1 \le k \le m} f_k(\alpha, t, x) \qquad (11)$$

и число

$$\beta_i = \min_{\alpha \in G} \chi_i(\alpha). \qquad (12)$$

В силу вложенности сеток $\{S(h_i^t, h_i^x)\}$ справедливо соотношение $\beta_1 \leqslant \beta_2 \leqslant \ldots \leqslant \beta$.

Повторением рассуждений, приведенных в доказательстве теоремы 2 в работе [24], устанавливается

**Теорема 2.** *Пусть числа* $\beta_i$ *определены в соответствии с выражением* (12). *Тогда выполнено предельное соотношение* $\lim\beta_i = \beta$ при $i \to \infty$. ♦

Для получения необходимых и достаточных условий выполнения неравенства (10), сформулированных далее в теоремах 3 и 4, требуется

**Лемма.** *Если все элементы периодических матриц* $A_k(t)$, $k = \overline{1, m}$, *во включении* (3) *непрерывно дифференцируемы при всех* $t \leqslant 0$, *то каждая из функций* $f_k(\alpha, t, x)$, $k = \overline{1, m}$, *удовлетворяет в области* $D = \{(t, x)\colon t \in [0, T], \{\|x\|_\infty = 1\}$ *условию Липшица по* $t$ *и* $x$ *с константами* $L_t > 0$, $L_x > 0$, *не зависящими от* $\alpha \in G$, $k = \overline{1, m}$.

Доказательство. Для любых $t_1$, $t_2 \in [0, T]$ и любых $x_1$, $x_2 \in \{\|x\|_\infty = 1\}$ справедливо неравенство $|f_k(\alpha, t_2, x_2) - f_k(\alpha, t_1, x_1)| \leqslant L_t|t_2 - t_1| + L_x\|x_2 - x_1\|_\infty$, где

$$L_t = \max_{t \in [0, T]} \max_{\|x\|_\infty = 1} \max_{1 \le k \le m} \left|\frac{\partial f_k(\alpha, t, x)}{\partial t}\right|,$$

$$L_x = \max_{t \in [0, T]} \max_{\|x\|_\infty = 1} \max_{1 \le k \le m} \left|\frac{\partial f_k(\alpha, t, x)}{\partial x}\right|, \qquad (13)$$

Пусть $Q = (q_{ij})_{i,j}^{n}$ — произвольная $(n \times n)$-матрица. Под нормой $\|Q\|_\infty$ будем понимать число $\|Q\|_\infty = \max\limits_{1 \le i \le n} \sum\limits_{j=1}^{n} |q_{ij}|$.

Введем обозначения

$$A_m = \max_{t \in [0, T]} \max_{1 \le k \le m} \|A_k(t)\|_\infty,$$

$$\hat{A}_m = \max_{t \in [0, T]} \max_{1 \le k \le m} \|\dot{A}_k(t)\|_\infty. \qquad (14)$$

С учетом выражений (8), (13) и (14) получим

$$L_t = (N_p(2M + 1))^{1/2}(\omega^2 M^2 + 2p(\omega M A_m + \hat{A}_m)),$$

$$L_x = 2p(N_p(2M + 1))^{1/2}(\omega M + n(1 + 2np)A_m).$$

Лемма доказана. ♦

Обобщением теорем 3 и 4 в работе [24] на случай дифференциального включения (3) служат следующие две теоремы.

**Теорема 3.** *Для выполнения условия* (10) *необходимо и достаточно, чтобы существовало такое число* $i \geqslant 1$, *что* $\beta_i < 0$ *и* $h_i^t L_t + h_i^x L_x < -2\beta_i$.

**Теорема 4.** *Для выполнения условия* (10) *необходимо и достаточно, чтобы существовали такое число* $i \geqslant 1$ *и вектор* $\alpha_i \in G$, *что*

$$\chi_i(\alpha_i) < 0 \text{ и } h_i^t L_t + h_i^x L_x < -2\chi_i(\alpha_i). \ ♦ \qquad (15)$$

Доказательство теорем 3 и 4 аналогично доказательству теорем 3 и 4 в работе [24].

Предлагаемый алгоритм проверки выполнения условия (10) опирается на утверждение теоремы 4. На $q$-м шаге, $q = 1, 2, \ldots$, алгоритма вычисляется значение функции $\chi_i(\alpha_i)$ на векторе $\alpha^{q-1} \in G$, найденном на $(q - 1)$-шаге алгоритма (вектор $\alpha^0$ выбирается произвольно из множества $G$), и проверяется выполнение условий (15). Если они выполняются, то алгоритм останавливается, поскольку в этом случае вектор параметров $\alpha^{q-1} \in G$ определяет функцию Ляпунова $V_{2p}(\alpha, t, x)$ вида (5), (6) с отрицательно определенной производной.

Заметим, что выполнение условий (15) можно обеспечить лишь уменьшением значения функции $\chi_i(\alpha)$. В соответствии с этим, если условия (15) не выполнены, на $q$-м шаге алгоритма с помощью метода эллипсоидов [26, 27], который может быть использован для решения задачи (12) минимизации выпуклой функции, определяется вектор $\alpha^q$. По формулам метода эллипсоидов [27] вычисляются вспомогательный вектор $d(\alpha^{q-1})$ и шаг $H_{q-1}$. Значение $\alpha^q$ определяется соотношением

$$\alpha^q = \alpha^{q-1} + H_{q-1}d(\alpha^{q-1}). \qquad (16)$$

Если условия (15) не выполняются за заданное число шагов алгоритма (16), то необходимо повторить алгоритм на новой сетке $S(h^t_{i+1},\ h^x_{i+1})$. Размер шагов сетки в случае необходимости уменьшается до тех пор, пока не нарушится условие $\min\{h^t_i,\ h^x_i\} > \delta$, где $\delta$ — заданное положительное число, определяемое особенностями реализации на компьютере предлагаемого алгоритма.

Если с помощью предлагаемого алгоритма не удается построить функцию Ляпунова (5), (6) для включения (3) с заданными значениями параметров $M$ и $p$, то необходимо увеличить значения $M$ или $p$ и повторить алгоритм с этими новыми значениями.

Если удалось построить функцию Ляпунова (5), (6) с отрицательно определенной производной $\dot V_{2p}(\alpha,\ t,\ x) < 0$, тогда на сетке $S(h^t_i,\ h^x_i)$ простым вычислением значений проверяется положительная определенность построенной функции Ляпунова $V_{2p}(\alpha,\ t,\ x)$ с учетом условий на $h^t_i$ и $h^x_i$, аналогичных условиям, фигурирующим в теоремах 3, 4 (эти условия будут гарантировать положительную определенность $V_{2p}(\alpha,\ t,\ x)$ в точках $(t,\ x) \in D$, не принадлежащих $S(h^t_i,\ h^x_i)$). Дробление шагов сетки, в случае необходимости, осуществляется до тех пор, пока не нарушится условие $\min\{h^t_i,\ h^x_i\} > \delta$. Если в некоторой точке сетки построенная функция Ляпунова (5), (6) с отрицательно определенной производной $\dot V_{2p}(\alpha, t, x) < 0$ принимает неположительное значение, то выполнены условия первой теоремы Ляпунова о неустойчивости, и нулевое решение включения (3) будет неустойчиво.

## 3. ПРИМЕР

Рассматривается линейная непрерывная система управления второго порядка с периодически изменяющимися параметрами

$$\dot x_1 = x_2, \quad \dot x_2 = -x_1 - x_2 + u(t)x_1\cos(\theta t), \qquad (17)$$

где $u(t)$ — произвольная измеримая функция, удовлетворяющая условию $|u(t)| \leqslant k,\ k > 0,\ \theta \geqslant 0$. Совокупность всех таких функций $u(t)$ обозначим через $U$.

Система (17) в классе $U$ эквивалентна дифференциальному включению вида (3) с $m = 2$, $T = 2\pi/\theta$, в котором матрицы $A_k(t)$, $k = 1, 2$, имеют вид:

$$A_1(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 - k\cos(\theta t) & -1 \end{pmatrix},$$

$$A_2(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 + k\cos(\theta t) & -1 \end{pmatrix}.$$

Для системы (17) с помощью предложенного алгоритма были построены функции Ляпунова (5), (6) при различных значениях параметров $k$, $\theta$ и значениях $p = 1$, $M = 4$. Как отмечено в работе [28], критерий Бонджиорно [29] для системы (17) при $u(t) \equiv k$ дает условие асимптотической устойчивости

$$k < (\max_{\omega \in R} |W(i\omega)|)^{-1} = 0{,}866, \quad W(i\omega) = 1/(1 - \omega^2 + i\omega)$$

и выделяемая им область робастной устойчивости системы (17) совпадает с областью, которую дает круговой критерий [30].

В таблице приведены максимальные значения параметра $k$, для которых робастная устойчивость системы (17) в классе $U$ при $\theta = 0{,}5$ устанавливается с помощью функций Ляпунова (5), (6) с соответствующим значением параметров $M$ и $p$.

**Значения параметра *k***

| p | M | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 1 | 0,866 | 2,625 | 3,067 | 3,189 | 3,284 |
| 2 | 0,993 | 2,417 | 2,842 | 3,012 | 3,153 |
| 3 | 0,997 | 2,194 | 2,608 | 2,866 | 2,972 |

Заметим, что полученный в работе [28] критерий в случае $\theta = 0{,}5$ дает максимальное значение $k = 0{,}867$.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Одна из важнейших задач теории устойчивости систем управления заключается в поиске проверяемых критериев устойчивости. Часто, в силу сложности системы, проверка полученного критерия затруднительна, и он носит, по существу, чисто теоретический характер. Предложенный алгоритм численного построения функций Ляпунова позволяет проверить робастную устойчивость рассматриваемых систем и основан на решении задачи математического программирования с многократным вложением максимизации.

В силу сложности решаемой задачи математического программирования алгоритм требует серьезных вычислительных ресурсов, что особенно заметно при увеличении параметров $M$ и $p$ в функциях Ляпунова (5), (6). Однако приведенный пример подтверждает конструктивность продемонстрированного в настоящей работе подхода и его эффективность по сравнению с применением критериев, полученных в работах [28, 29]. Дальнейшее совершенствование алгоритма может быть связано с поиском более эффективных методов оптимизации, необходимых для решения минимаксных задач.

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Dorato P., Yedavalli R.K.* Recent Advances in Robust Control. — N.-Y.: IEEE Press. — 1990.
2. *Morari M., Zafiriou E.* Robust Process Control. — New Jersey: Prentice Hall, 1989.
3. *Джури Э.И.* Робастность дискретных систем (обзор) // Автоматика и телемеханика. — 1990. — № 5. — С. 3—28.
4. *Kolla S.R., Vedavalli R.K., Farison J.B.* Robust Stability Bounds of Time-Varying Perturbations for State Space Models of Discrete-Time Systems // Int. J. Control. — 1989. — Vol. 50, N 1. — P. 151—159.
5. *Цыпкин Я.З.* Робастно устойчивые нелинейные дискретные системы управления // Изв. РАН. Техн. кибернетика. — 1992. — № 6. — С. 18—29.
6. *Mota F., Kaszkurewicz E. and Bhaya A.* Robust Stabilization of Time-Varying Discrete Interval Systems // Proc. of 31st Conf. on Decision and Control. Tucson, AZ, Dec. 1992. — Vol. 1. — P. 341—346.
7. *Bauer P.H., Premaratne K., Duran J.* A Necessary and Sufficient Condition for Robust Asymptotic Stability of Time-Variant Discrete Systems // IEEE Trans. Automat. Control. — 1993. — Vol. 38, N 9. — P. 1427—1430.
8. *Mansour M.* Robust Stability of Interval Matrices // Proc 28-th Conference of Decision and Control., Tampa, FL, Dec. 1989. — P. 46—51.
9. *Wang K., Michel A.N.* On Sufficient Conditions for the Stability of Interval Matrices // Systems and Control Letters. — 1993. — Vol. 20, N 6. — P. 345—351.
10. *Bialas S.* A necessary and sufficient condition for stability of interval matrices // Int. J. Control. — 1983. — Vol. 37, N 4. — P. 717—722.
11. *Xu Daoui.* Simple Criteria for stability of interval matrices // Internat. Journ. Contr. — 1985. — Vol. 41, N 1. — P. 289—295.
12. *Shih-Wei Kau, Yung-Sheng Liu.* A new LMI condition for robust stability of discrete-time uncertain systems // Systems & Control Letters. — Dec. 2005. — Vol. 54, iss. 12. — P. 1195—1203.
13. *Buslowicz M.* Simple conditions for robust stability of positive discrete-time linear systems with delays // Control and Cybernetics. — 2010. — Vol. 39, N 4. — P. 1159—1171.
14. *Buslowicz M, Kaczorek T.* Robust stability of positive discrete-time interval systems with time-delays // Bulletin of the Polish Academy of Sciences. Technical Sciences. — 2004. — Vol. 52, N 2. — P. 99—102.
15. *Цыпкин Я.З.* Абсолютная устойчивость положения равновесия и процессов в нелинейных импульсных автоматических системах // Автоматика и телемеханика. — 1963. — № 12. — С. 1601—1615.
16. *Молчанов А.П., Морозов М.В.* Абсолютная устойчивость нелинейных нестационарных систем управления с периодической линейной частью // Автоматика и телемеханика. — 1992. — № 2. — С. 49—59.
17. *Молчанов А.П., Морозов М.В.* Функции Ляпунова для нелинейных нестационарных дискретных систем управления с периодической линейной частью // Автоматика и телемеханика. — 1992. — № 10. — С. 37—45.
18. *Морозов М.В.* Условия робастной устойчивости линейных нестационарных систем управления с интервальными ограничениями // Проблемы управления. — 2009. — № 3. — С. 23—26.
19. *Морозов М.В.* Робастная устойчивость дискретных систем управления с периодическими интервальными ограничениями // Проблемы управления. — 2013. — № 4. — С. 11—15.
20. *Pyatnitsky Ye, S., Skorodinskiy V.I.* Numerical methods of Lyapunov function construction and their application to the absolute stability problem // Systems and Control Letters. — 1982. — Vol. 2, N 2. — P. 130—135.
21. *Пятницкий Е. С., Скородинский В. И.* Численные методы построения функций Ляпунова и критерии абсолютной устойчивости в форме численных процедур // Автоматика и телемеханика. — 1983. — № 11. — С. 52—63.
22. *Каменецкий В. А., Пятницкий Е. С.* Градиентный метод построения функций Ляпунова в задачах абсолютной устойчивости // Автоматика и телемеханика. — 1987. — № 1. — С. 3—12.
23. *Методы* анализа устойчивости нелинейных систем управления на ЭВМ. Препринт / А.В. Богатырев, В.А. Каменецкий, А.П. Молчанов и др. — М.: ИПУ РАН, 1989.
24. *Морозов М. В.* Алгоритм анализа устойчивости линейных периодических систем и его реализация на ЭВМ // Автоматика и телемеханика. — 1990. — № 4. — С. 27—35.
25. *Филиппов А.Ф.* Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. — М.: Наука, 1985.
26. *Немировский А.С., Юдин Д.Б.* Сложность задач и эффективность методов оптимизации. — М.: Наука, 1979.
27. *Шор Н.З.* Методы минимизации недифференцируемых функций и их приложения. — Киев: Наукова думка, 1979.
28. *Савкин А. В.* Критерий абсолютной устойчивости нелинейных систем управления с периодически нестационарной линейной частью // Автоматика и телемеханика. — 1990. — № 8.
29. *Бонджиорно Мл.* Критерии устойчивости линейных систем с переменными во времени параметрами, выраженные через характеристики в области действительных частот // ТИИЭР. — 1964. — № 7.
30. *Гелиг А.Х., Леонов Г.А., Якубович В.А.* Устойчивость нелинейных систем с неединственным состоянием равновесия. — М.: Наука, 1978.

*Статья представлена к публикации членом редколлегии академиком РАН С.Н. Васильевым.*

**Морозов Михаил Владимирович** — канд. физ.-мат. наук, ст. науч. сотрудник, Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, г. Москва,
☎ (495) 334-92-50, ✉ miguel@ipu.ru.