



# ОЦЕНИВАНИЕ ХРУПКОСТИ ПИ-РЕГУЛЯТОРОВ С ПОМОЩЬЮ АППАРАТА ЛИНЕЙНЫХ МАТРИЧНЫХ НЕРАВЕНСТВ И СРЕДСТВ ВИЗУАЛИЗАЦИИ<sup>#</sup>

А. А. Мохначева\*, М. В. Хлебников\*\*

<sup>\*\*\*</sup>Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, г. Москва

\*✉ arinamokh14@gmail.com, \*\*✉ khlebnik@ipu.ru

**Аннотация.** Рассмотрена задача оценивания хрупкости ПИ-регулятора для линейной системы управления, состоящая в конструктивном построении областей допустимых изменений коэффициентов регулятора, при которых сохраняется устойчивость замкнутой системы. Предлагаемый метод основан на технике линейных матричных неравенств; он сводит исходную задачу к решению несложных задач выпуклой оптимизации. Введено понятие радиуса нехрупкости ПИ-регулятора, а также понятие нехрупкого ограничивающего эллипсоида применительно к задаче подавления неслучайных ограниченных внешних возмущений. Предложен простой способ, позволяющий получить представление об области стабилизируемости, в целом. Результаты численного моделирования подтверждают эффективность предлагаемого подхода. Существенно, что данный подход может быть легко распространен и на более общие постановки задач, в частности – на анализ хрупкости ПИД-регуляторов и ПИД-регуляторов с апериодическим фильтром.

**Ключевые слова:** линейная система управления, ПИ-регулятор, устойчивость, хрупкость, нехрупкость, линейные матричные неравенства, ограничивающий эллипс, эллипс допустимых возмущений.

## ВВЕДЕНИЕ

Как известно, ПИ/ПИД-регуляторы являются наиболее распространенным типом автоматических регуляторов. Это объясняется их пригодностью для решения большинства практических задач, невысокой стоимостью, а также простотой: для настройки необходимо правильно выбрать всего несколько коэффициентов – три для ПИД-регулятора; два, если речь идет о ПИ-регуляторе; иногда четыре, если речь идет, например, о ПИД-регуляторе с фильтром. Однако сделать этот выбор очень непросто, так что процедуры практической настройки регуляторов во многом происходят

вручную, исходя из интуитивного понимания технологического процесса.

Вместе с тем, при практической реализации и настройке ПИ/ПИД-регуляторов неизбежно появление неопределенности, источник которой связан с неточностью технической реализации регулятора или с необходимостью настройки его параметров в процессе эксплуатации. В знаменитой работе [1] на ряде примеров было показано, что малые изменения коэффициентов регулятора могут привести к значительному снижению качества регулирования или даже к потере устойчивости замкнутой им системы. Этот эффект получил название *хрупкости*; впоследствии появились многочисленные работы, в которых он исследовался в разнообразных постановках задач (см., например, работы [2–7]).

Явление хрупкости хорошо известно из инженерной практики, и при описании систем в частотной области для его предотвращения разработаны

<sup>#</sup> Результаты исследований, представленные в § 3, получены при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 25-29-20062), <https://rscf.ru/project/25-29-20062/>.

различные методики. Здесь же (следуя описанию в пространстве состояний) под приданием регулятору свойства нехрупкости имеется в виду робастность относительно изменений его параметров, а данный термин позволяет отличать неопределенность в регуляторе от неопределенности в параметрах модели (в матрицах системы). Иногда в литературе используется термин *грубый регулятор*, восходящий к статье [8], однако в данном контексте целесообразнее использовать понятие хрупкости: дело в том, что грубость обычно предполагает малое изменение свойств системы, здесь же возможные отклонения не предполагаются малыми.

Настоящая статья, имеющая похожую структуру, посвящена вопросам хрупкости ПИ-регуляторов и, главным образом, оцениванию допустимых изменений коэффициентов ПИ-регулятора, при которых сохраняется устойчивость замкнутой системы. Часто применяемым методом анализа областей устойчивости, зависящих от двух параметров, является техника D-разбиения [9]. Авторы же используют иной подход, основанный на технике линейных матричных неравенств (ЛМН) [10, 11], которая показала свою эффективность при исследовании систем с неопределенностями, а в работах [12–14] была применена в целях синтеза ПИ/ПИД-регуляторов. Это обусловлено двумя следующими моментами. Во-первых, D-разбиение позволяет аналитически построить двумерную область устойчивости ПИ-регулятора, однако для ПИД-регулятора построение соответствующей трехмерной области уже сопряжено с труднопреодолимыми (за исключением некоторых частных ситуаций, подробнее см. статью [9]) сложностями, тогда как обсуждаемый в настоящей работе подход легко переносится и на ПИД-случай. Во-вторых, данная техника может быть применена и к задаче *синтеза* нехрупких ПИ-регуляторов.

Также в статье большое внимание уделяется вопросу визуализации получаемых оценок нехрупкости. А именно, проведена и обсуждена серия численных экспериментов по оценке хрупкости ПИ-регуляторов, в рамках которых получены простые оценки области допустимых изменений коэффициентов стабилизирующего регулятора и дано их явное графическое представление; предложен простой способ, позволяющий получить представление об области стабилизируемости в целом. Наконец, обсуждено понятие нехрупкого ограничивающего эллипса применительно к задаче подавления ограниченных внешних возмущений.

Важно отметить, что развиваемый подход может быть распространен и на анализ хрупкости ПИД-регуляторов. При этом приходится иметь дело уже с эллипсоидальными оценками, тогда как идейная сторона меняется мало.

Предварительные результаты исследования были представлены на XXI Всероссийской школе-конференции молодых ученых «Управление большими системами» [15].

Далее используются следующие обозначения:  $\|\cdot\|$  – евклидова норма вектора;  $^T$  – символ транспонирования;  $I$  – единичная матрица соответствующей размерности;  $\lambda_i(A)$  – собственные значения матрицы  $A$ ;  $\mathbb{S}^n$  – пространство симметричных матриц  $n$ -го порядка. Матричные неравенства понимаются в смысле знакоопределенности матриц.

## 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ПОДХОДЫ К ЕЕ РЕШЕНИЮ

Рассмотрим линейную SISO-систему

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + bu + Dw, \quad x(0) = x_0, \\ y &= c^T x, \\ z &= Cx, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $b \in \mathbb{R}^n$ ,  $D \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ,  $c \in \mathbb{R}^n$ ,  $C \in \mathbb{R}^{r \times n}$ , с состоянием  $x(t) \in \mathbb{R}^n$ , наблюдаемым выходом  $y(t) \in \mathbb{R}$ , регулируемым выходом  $z(t) \in \mathbb{R}^r$ , ограниченным внешним возмущением  $w(t) \in \mathbb{R}^m$ ,

$$\|w(t)\| \leq 1 \quad \forall t \geq 0,$$

и управлением  $u(t) \in \mathbb{R}$  виде ПИ-регулятора:

$$u = -k_p y - k_i \int_0^t y(\tau) d\tau. \quad (2)$$

Будем полагать, что задан некоторый ПИ-регулятор (2) с коэффициентами

$$K_0 = \begin{pmatrix} k_p \\ k_i \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2,$$

стабилизирующий систему (1). Придавая компонентам вектора  $K_0$  некоторые возмущения, рассмотрим вектор  $K_{\text{stab}} = K_0 + \delta$  возмущенных коэффициентов регулятора. При этом полагаем, что



возмущения эллипсоидально ограничены, т. е. принадлежат эллипсу с некоторой матрицей  $R \succ 0$  и центром в начале координат:

$$\delta = \begin{pmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{pmatrix} \in \mathcal{E}(R) = \{ \delta \in \mathbb{R}^2 : \delta^T R^{-1} \delta \leq 1 \}.$$

Далее обозначим:

$$A_0 = \begin{pmatrix} A & 0 \\ c^T & 0 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} -b \\ 0 \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} c^T & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A_c(K) = A_0 + FK^T H,$$

$$D_c = \begin{pmatrix} D \\ 0 \end{pmatrix}, \quad C_c = (C \ 0).$$

Поставим задачу нахождения эллиптической области допустимых возмущений  $\delta: \|\delta\| \leq r$  коэффициентов  $K_0$  ПИ-регулятора (2), сохраняющих устойчивость замкнутой системы (1). Величину  $r$  назовем *радиусом нехрупкости* ПИ-регулятора с коэффициентами  $K_0$ . Один из подходов к решению этой задачи сводится к максимизации длины наименьшей полуоси эллипса  $\mathcal{E}(R)$  допустимых неопределенностей; иными словами, максимизируется радиус круга, содержащего допустимые возмущения коэффициентов регулятора. А именно, справедлив следующий результат.

**Лемма 1 ([16]).** Пусть  $\hat{\gamma}$ ,  $\hat{R}_{\text{axis}}$  – решение задачи полуопределенного программирования

$$\max \gamma$$

при ограничениях

$$\begin{pmatrix} A_c^T(K_0)Q + QA_c(K_0) + H^T R H & QF \\ F^T Q & -I \end{pmatrix} \prec 0,$$

$$Q \succ 0, R \succeq \gamma I,$$

где оптимизация проводится по матричным переменным  $Q \in \mathbb{S}^{n+1}$ ,  $R \in \mathbb{S}^2$  и скалярной переменной  $\gamma$ .

Тогда система (1), замкнутая стабилизирующим ПИ-регулятором (2) с коэффициентами  $K_0$ , сохраняет устойчивость при всех возмущениях

$\delta = \begin{pmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{pmatrix}$  его коэффициентов таких, что

$$\delta^T \hat{R}_{\text{axis}}^{-1} \delta < 1$$

и, в частности, таких, что

$$\|\delta\| < \sqrt{\hat{\gamma}}.$$

Таким образом, радиус нехрупкости  $r$  заданного ПИ-регулятора определяется величиной  $\sqrt{\hat{\gamma}}$ .

Возможна и иная оценка области допустимых возмущений  $\delta$ ; она устанавливается путем максимизации площади эллипса  $\mathcal{E}(R)$ . А именно, справедлив следующий результат.

**Лемма 2 ([16]).** Пусть  $\hat{R}_{\text{area}}$  – решение задачи выпуклой оптимизации

$$\min(-\log \det R)$$

при ограничениях

$$\begin{pmatrix} A_c^T(K_0)Q + QA_c(K_0) + H^T R H & QF \\ F^T Q & -I \end{pmatrix} \prec 0,$$

$$Q \succ 0, R \succ 0,$$

где оптимизация проводится по матричным переменным  $Q \in \mathbb{S}^{n+1}$ ,  $R \in \mathbb{S}^2$ .

Тогда система (1), замкнутая стабилизирующим ПИ-регулятором (2) с коэффициентами  $K_0$ , сохраняет устойчивость при всех возмущениях

$\delta = \begin{pmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{pmatrix}$  его коэффициентов таких, что

$$\delta^T \hat{R}_{\text{area}}^{-1} \delta < 1.$$

## 2. НЕХРУПКИЙ ОГРАНИЧИВАЮЩИЙ ЭЛЛИПСОИД

В этом параграфе рассмотрим задачу подавления ограниченных внешних возмущений, воздействующих на систему (1). Она заключается в минимизации влияния возмущений на выход системы в смысле минимизации величины

$$\max_{t \geq 0} \max_{\|w\| \leq 1} \|z(t)\|.$$

Получить точное решение этой задачи затруднительно, однако в работе [11] был предложен ЛМН-подход к получению верхних оценок данной величины. В рамках этого подхода одним из ключевых понятий является понятие *инвариантного эллипсоида*; напомним его. Рассмотрим систему

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Dw, \quad x(0) = x_0, \\ z &= Cx, \end{aligned} \tag{3}$$

с гурвицевой матрицей  $A$  и внешним возмущением  $w$ . Эллипсоид вида

$$\mathcal{E} = \{x \in \mathbb{R}^n : x^T P^{-1} x \leq 1\}$$

с центром в начале координат назовем инвариантным, если он обладает следующим свойством:

$$x_0 \in \mathcal{E} \Rightarrow x(t) \in \mathcal{E} \quad \forall t \geq 0.$$

Иными словами, если инвариантному эллипсоиду принадлежит начальная точка  $x_0$ , то и вся траектория состояния системы (3) будет оставаться внутри такого эллипсоида при всех допустимых возмущениях  $w$ , воздействующих на систему. С инвариантным эллипсоидом тесно связано понятие *ограничивающего эллипсоида*, который определяется как

$$\mathcal{E}_z = \left\{ z \in \mathbb{R}^r : z^T (CPC^T)^{-1} z \leq 1 \right\}$$

и при всех возмущениях, воздействующих на систему (3), содержит ее выход  $z$ . При этом естественно задаваться целью минимизации ограничивающего эллипсоида по тому или иному критерию; часто в качестве него принимается величина  $\text{tr } CPC^T$ , которая соответствует сумме квадратов полуосей ограничивающего эллипсоида.

Теперь сформулируем задачу: построить минимальный эллипсоид, содержащий выход  $z$  системы (1) при всех возмущениях  $\delta$  коэффициентов регулятора  $K$  допустимого уровня  $\|\delta\| \leq \gamma < r$ . Будем называть его *нехрупким ограничивающим эллипсоидом*, соответствующим уровню нехрупкости  $\gamma$ . Способ его нахождения дается следующей теоремой, установленной в статье [16].

**Теорема 1.** Пусть  $\hat{P}$  – решение задачи полуопределенного программирования

$$\min \text{tr } C_c P C_c^T$$

при ограничениях

$$\begin{pmatrix} A_c(K_0)P + PA_c^T(K_0) + \alpha P + \frac{1}{\alpha} D_c D_c^T + \varepsilon \gamma^2 FF^T & PH^T \\ HP & -\varepsilon I \end{pmatrix} \preceq 0, \\ P \succ 0,$$

где оптимизация проводится по матричной переменной  $P \in \mathbb{S}^{n+1}$ , скалярной переменной  $\varepsilon$  и ска-

лярному параметру  $\alpha > 0$ .

Тогда эллипсоид с матрицей

$$C_c \hat{P} C_c^T$$

является нехрупким ограничивающим эллипсоидом для выхода  $z$  системы (1) при  $x_0 = 0$ , замкнутой стабилизирующим ПИ-регулятором (2) с коэффициентами  $K_0$ , соответствующим допустимому уровню нехрупкости  $\gamma$ .

Оптимизационная задача, сформулированная в теореме 1, представляет собой параметризованную задачу полуопределенного программирования. Как показывает численное моделирование, минимизация по параметру  $\alpha$  всегда оказывается выпуклой (хотя строгое обоснование этого факта пока остается открытой задачей). Это позволяет осуществлять минимизацию по  $\alpha$  не поиском на одномерной сетке, а пользоваться гораздо более быстрыми методами одномерной выпуклой оптимизации (например, методом золотого сечения).

### 3. ЧИСЛЕННЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТЫ И ВИЗУАЛИЗАЦИЯ

**Пример 1.** Рассмотрим систему управления

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{pmatrix} -1,3690 & 1 \\ -0,1488 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} -0,3214 \\ 0,4018 \end{pmatrix} u + \begin{pmatrix} -0,3214 \\ 0,4018 \end{pmatrix} w, \\ y &= (1 \ 0) x, \\ z &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x, \end{aligned}$$

с состоянием  $x$ , управлением  $u$ , наблюдаемым выходом  $y$ , регулируемым выходом  $z$  и ограниченным внешним возмущением  $\|w\| \leq 1$ .

Замкнем ее стабилизирующим ПИ-регулятором с коэффициентами

$$K_{pi} = \begin{pmatrix} 0,832 \\ 0,120 \end{pmatrix}$$

и найдем матрицы эллипсов допустимых неопределенностей

$$\hat{R}_{axis} = \begin{pmatrix} 0,1021 & 0 \\ 0 & 0,0144 \end{pmatrix}, \hat{R}_{area} = \begin{pmatrix} 0,6343 & 0 \\ 0 & 0,0135 \end{pmatrix}$$

и радиус нехрупкости

$$r = 0,12.$$

Здесь и далее вычисления производились в среде MATLAB при помощи программного пакета cvx [17].

На рис. 1 эллипс с матрицей  $\hat{R}_{axis}$  изображен пунктиром, а с матрицей  $\hat{R}_{area}$  – сплошной линией серым цветом показан круг радиуса  $r$ . Также жирной сплошной линией показана область стабилизирующих регуляторов, построенная с помощью D-разбиения. Естественно, что найденные эллиптические оценки принадлежат области стабилизирующих регуляторов.

С помощью обсуждаемого подхода можно строить простые внутренние аппроксимации множества стабилизирующих регуляторов, итеративно повторяя процесс построения эллипсоидальных оценок (в качестве стартовой берется точка, соответствующая предзаданному ПИ-регулятору, очередная точка берется случайным образом на границе построенного эллипса). Результат проведения 40 итераций показан на рис. 2.

Теперь для рассматриваемой системы с помощью теоремы 1 найдем нехрупкий ограничивающий эллипс для выхода  $z$ , соответствующий допустимому уровню нехрупкости  $\gamma = 0,02$ , а также найдем ограничивающий

эллипс без учета требований нехрупкости (вычисления производились на ноутбуке с процессором Intel Core i7-1165G7 (11-го поколения, 2.8 ГГц) и 16 ГБ оперативной памяти; время вычисления ограничивающего эллипса составляет 1,5–2 с). Первый из них обладает матрицей

$$C_c P C_c^T = \begin{pmatrix} 4,9971 & 5,0735 \\ 5,0735 & 9,0761 \end{pmatrix}$$

(длины его полуосей равны 1,25 и 3,54) и показан сплошной линией на рис. 3, а минимальный ограничивающий эллипс имеет матрицу

$$C_c \tilde{P} C_c^T = \begin{pmatrix} 3,5414 & 3,5712 \\ 3,5712 & 6,2697 \end{pmatrix}$$

(его полуоси равны 1,04 и 2,95) и показан пунктиром.

Также на рис. 3 показаны траектории регулируемого выхода  $z$  при допустимых возмущениях в номинальном регуляторе  $K_{pi}$  уровня  $\gamma = 0,02$ . ♦

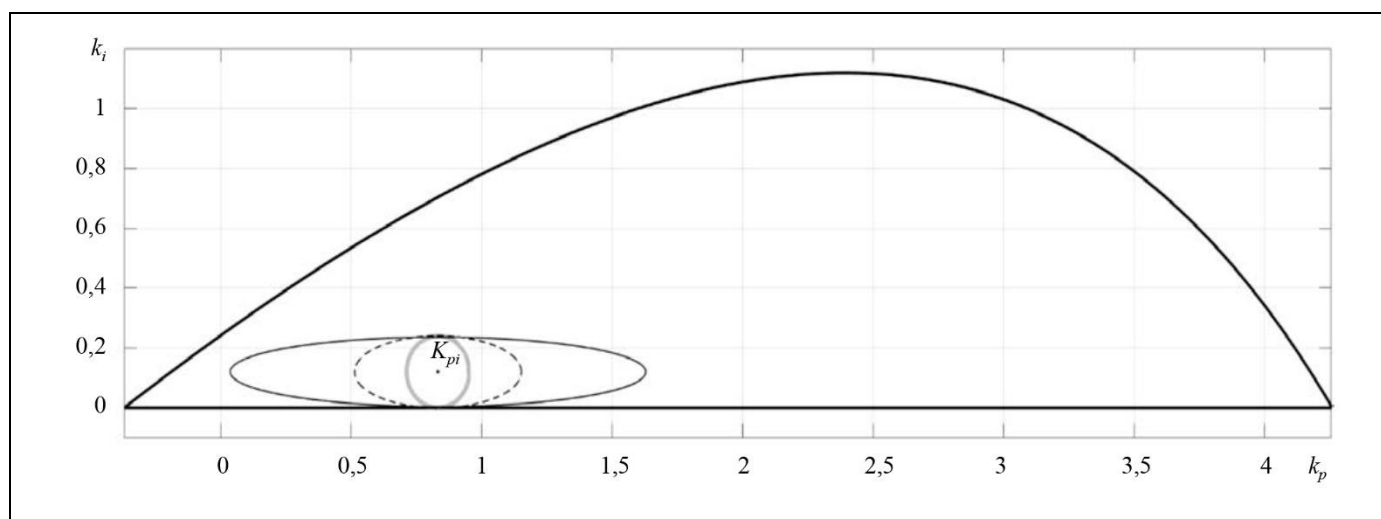


Рис. 1. Оценка хрупкости ПИ-регулятора с коэффициентами  $K_{pi}$  в примере 1

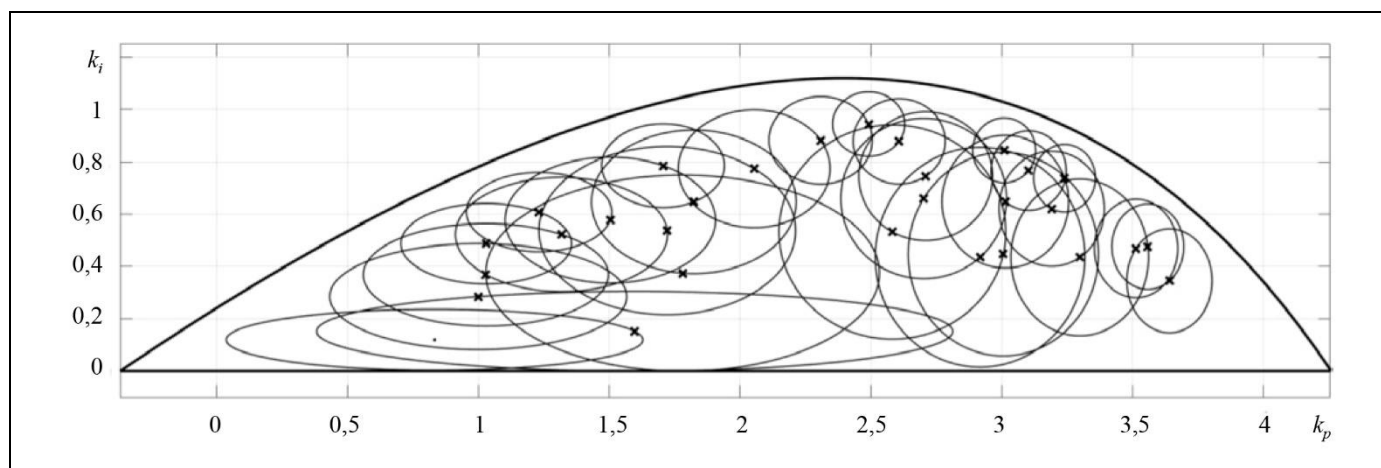


Рис. 2. Внутренняя аппроксимация множества стабилизирующих регуляторов в примере 1

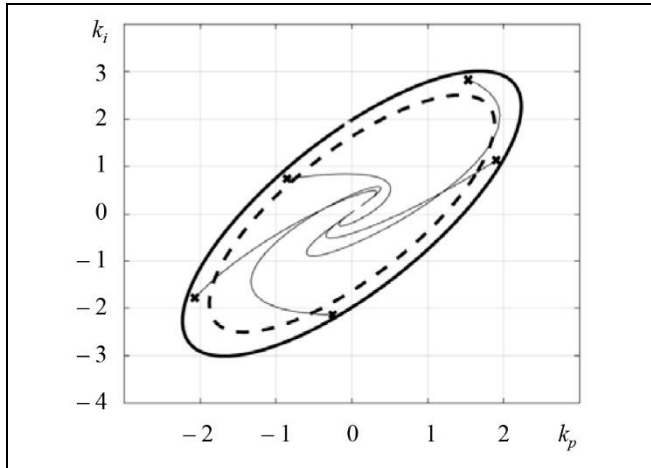


Рис. 3. Нехрупкий ограничивающий эллипс и минимальный ограничивающий эллипс в примере 1

**Пример 2.** Рассмотрим систему управления

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} -0,5 \\ -0,5 \end{pmatrix} u + \begin{pmatrix} -0,4 \\ -0,3 \end{pmatrix} w, \\ y &= (1 \ 0) x, \\ z &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x, \end{aligned}$$

с состоянием  $x$ , наблюдаемым выходом  $y$ , регулируемым выходом  $z$ , управлением  $u$  и ограниченным внешним возмущением  $\|w\| \leq 1$  и замкнем ее случайно вы-

бранными стабилизирующими ПИ-регуляторами с коэффициентами

$$\begin{aligned} K_0 &= \begin{pmatrix} 1,713 \\ 2,556 \end{pmatrix}, & K_1 &= \begin{pmatrix} 3,999 \\ 96,265 \end{pmatrix}, & K_2 &= \begin{pmatrix} 44,388 \\ 61,927 \end{pmatrix}, \\ K_3 &= \begin{pmatrix} 57,561 \\ 92,464 \end{pmatrix}, & K_4 &= \begin{pmatrix} 86,593 \\ 5,046 \end{pmatrix}, & K_5 &= \begin{pmatrix} 100 \\ 100 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Для каждого регулятора были получены эллипсы допустимых неопределенностей, полученных путем максимизации наименьшей полуоси (пунктир на рис. 4), площади (сплошная линия), а также определены соответствующие радиусы нехрупкости:

$$r_0 = 2,4745, \quad r_1 = 5,9376, \quad r_2 = 45,5202,$$

$$r_3 = 58,8467, \quad r_4 = 5,0460, \quad r_5 = 100$$

(круги соответствующих радиусов показаны серым цветом).

На рис. 5, а показан ограничивающий эллипс для выхода  $z$ , соответствующий регулятору с коэффициентами  $K_0$ . Как и ранее, пунктиром показан минимальный ограничивающий эллипс (при  $\gamma = 0$ ). На том же рисунке показаны траектории выхода замкнутой системы уровня нехрупкости  $\gamma = 1$ .

На рис. 5, б показаны ограничивающие эллипсы для выхода  $z$ , соответствующие регулятору с коэффициентами  $K_5$  для уровней нехрупкости  $\gamma = 0$  (пунктир) и  $\gamma = 10$  (сплошная линия). ♦

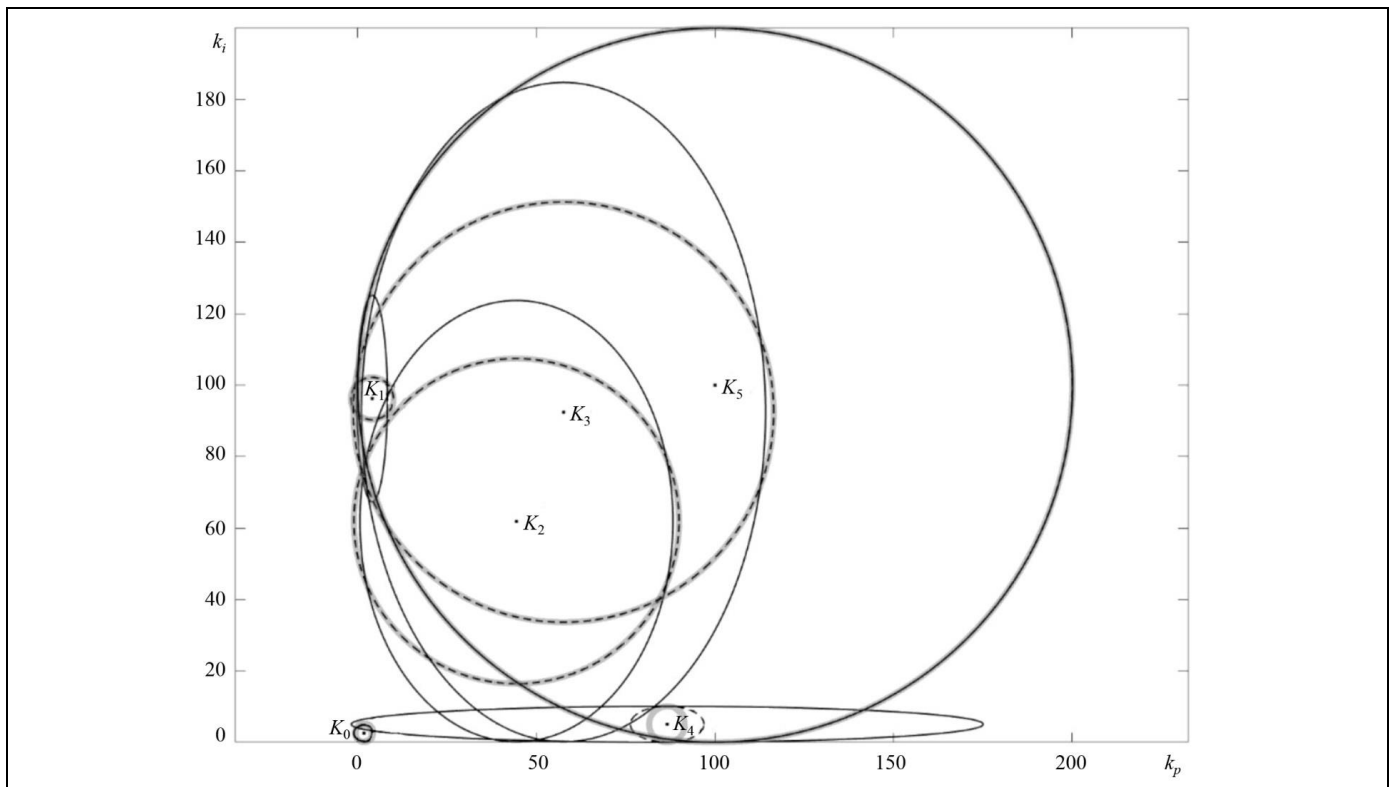


Рис. 4. Области стабилизирующих ПИ-регуляторов в примере 2



**Пример 3.** Замкнем систему управления четвертого порядка

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -15 & -70 & -120 & -64 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} u,$$

$$y = (0 \ 0 \ 0 \ 64)x,$$

с состоянием  $x$ , наблюдаемым выходом  $y$  и управлением  $u$  ПИ-регуляторами с коэффициентами

$$K_0 = \begin{pmatrix} -10 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ и } K_1 = \begin{pmatrix} -13 \\ 1,5 \end{pmatrix}.$$

Соответствующие эллиптические области допустимых возмущений, а также круги с радиусами нехрупкости

$$r_0 = 0,2874, \quad r_1 = 0,0994$$

показаны на рис. 6.

Рассмотрим возмущенные ПИ-регуляторы с коэффициентами

$$K_2 = \begin{pmatrix} -9 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ и } K_3 = \begin{pmatrix} -7,5 \\ 0,85 \end{pmatrix},$$

лежащие внутри найденных областей (см. рис. 6). Собственные значения матриц замкнутой ими системы таковы:

$$\lambda_{K_2} = \begin{pmatrix} -2,0624 \pm j7,5523 \\ -0,1042 \pm j0,7846 \\ -1,6668 \end{pmatrix},$$

$$\lambda_{K_3} = \begin{pmatrix} -2,7747 \pm j7,1039 \\ -0,1352 \pm j0,7338 \\ -1,6801 \end{pmatrix}.$$

Соответственно, они являются стабилизирующими.

На рис. 7 показаны результаты построения внутренней аппроксимации множества стабилизирующих регуляторов. ♦

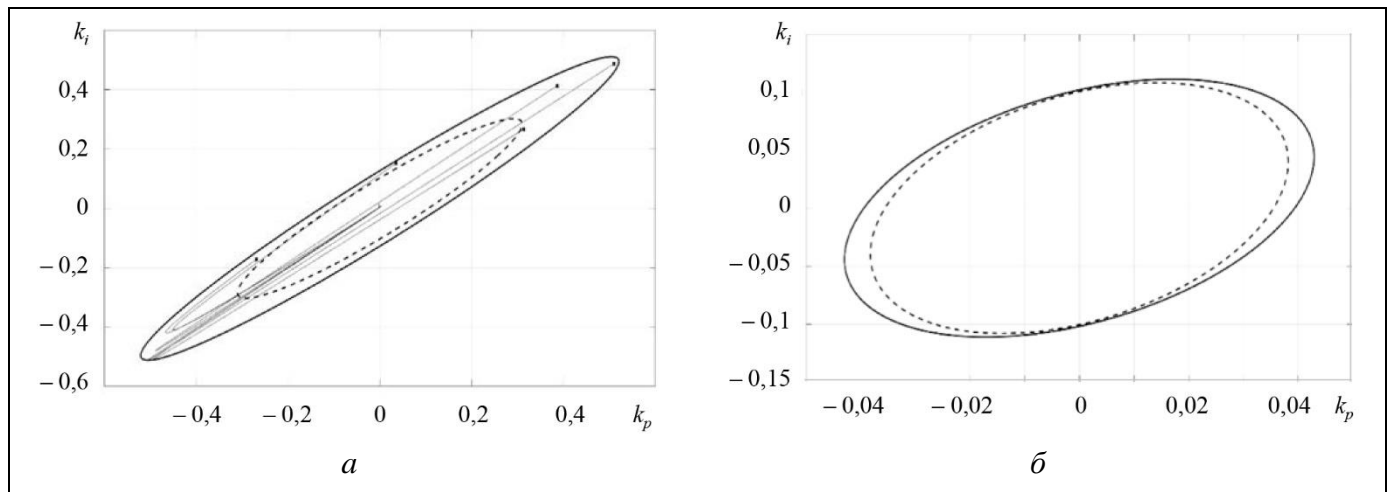


Рис. 5. Нехрупкие ограничивающие эллипсы в примере 2 для регуляторов с коэффициентами:  $a - K_0$ ,  $b - K_1$

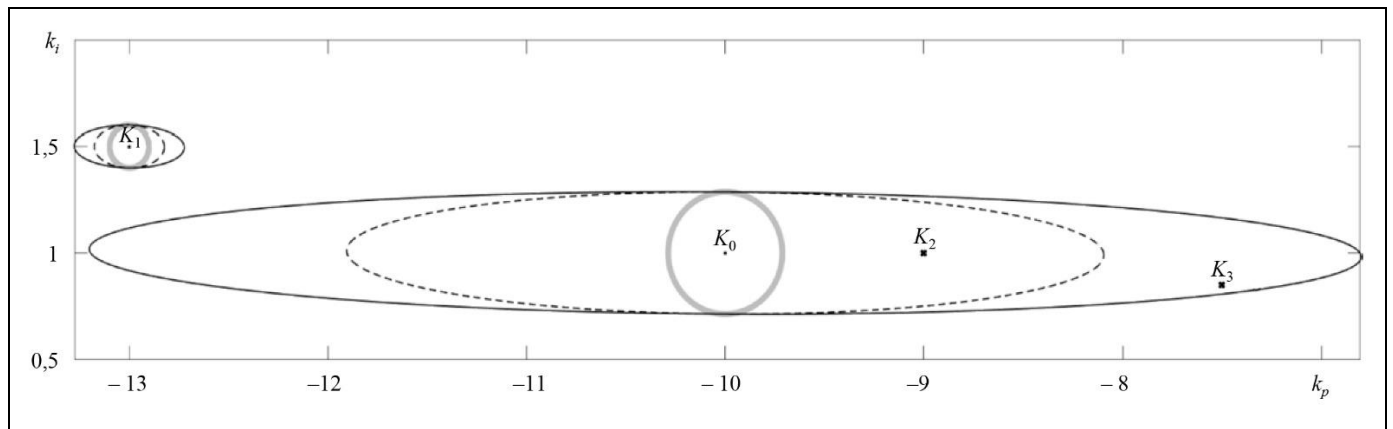


Рис. 6. Области стабилизирующих ПИ-регуляторов в примере 3

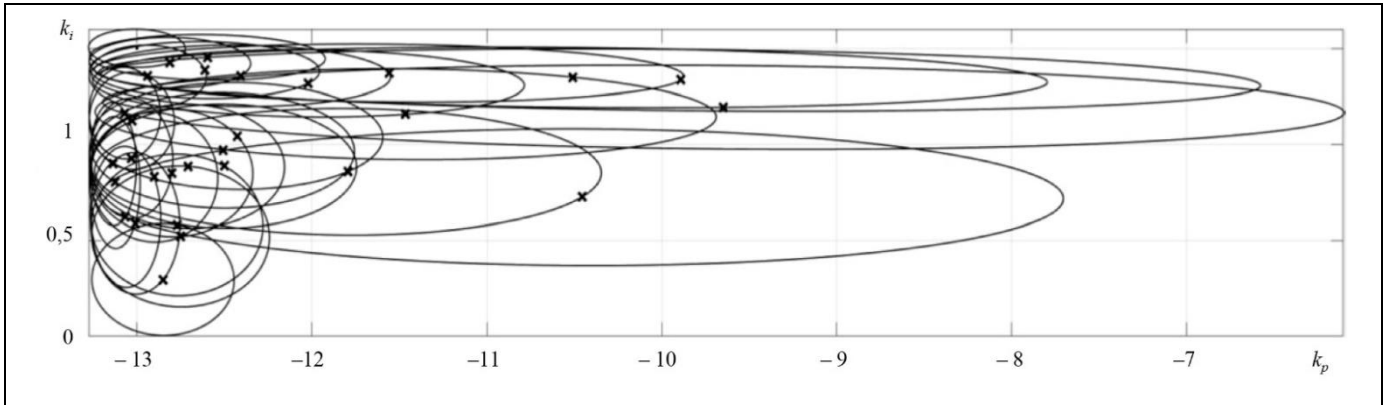


Рис. 7. Внутренняя аппроксимация множества стабилизирующих регуляторов в примере 3

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе на ряде примеров проиллюстрирован ЛМН-подход к оценке хрупкости предзаданного стабилизирующего ПИ-регулятора, который предполагает построение гарантирующих оценок для допустимых возмущений коэффициентов регулятора. Результаты численных экспериментов и их несложная визуализация демонстрируют работоспособность и эффективность развиваемого подхода.

В качестве дальнейших направлений исследований усматривается обобщение полученных результатов на случай ПИД-регуляторов, что потребует решения соответствующих задач в пространстве размерности 3. И конечно же, перспективным направлением является переход от анализа к синтезу нехрупких ПИ/ПИД-регуляторов, в рамках которого методы визуализации могут стать эффективным инструментом для выбора оптимальных настроек.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Keel, L.H., Bhattacharyya, S.P. Robust, Fragile, or Optimal? // IEEE Trans. Autom. Control. – 1997. – Vol. 42, no. 8. – P. 1098–1105.
2. Divya, H., Sakthivel, R., Karthick, S.A., Aouiti, C. Non-fragile Control Design for Stochastic Markov Jump System with Multiple Delays and Cyber Attacks // Mathematics and Computers in Simulation. – 2022. – Vol. 192. – P. 291–302.
3. Baneshi, F., Ghaffari, V., Soler, M. Non-fragile Robust Model Predictive Controller Design for Uncertain Time-Delay Systems with Input Constraints // International Journal of Systems Science. – 2023. – Vol. 54, iss. 6. – P. 1259–1274.
4. Yang, Z., Liu, C., Yue, X., Guo, M. Non-fragile Negative Imaginary Output Feedback Control for Attitude Stabilization of Flexible Spacecraft // Acta Astronautica. – 2023. – Vol. 208. – P. 296–310.
5. Bonela, A.K., Sarkar, M.K., Kumar, K. Robust Non-fragile Control of DC–DC Buck Converter // Electrical Engineering. – 2024. – Vol. 106. – P. 983–991.
6. Arivumani, S., Vadivel, P., Rajchakit, G., Saravanakumar, T. Non-fragile Tracking Controller Design for Fractional Order Systems against Active Disturbance Rejection // The European Physical Journal Special Topics. – 2025. – Vol. 234. – P. 1481–1497.
7. Javanfar, E., Rahmani, M., Wafi, M.K. Robust Estimation-Based Non-fragile Control for Discrete-Time Non-linear Systems // International Journal of Robust and Nonlinear Control. – 2025. – Vol. 35, iss. 6. – P. 2462–2471.
8. Андронов А.А., Понтрягин Л.С. Грубые системы // Доклады Академии наук СССР. – 1937. – Т. 14, № 5. – С. 247–250. [Andronov, A.A., Pontryagin, L.S. Rough Systems // Doklady Akad. Nauk SSSR. – 1937. – Vol. 14, no. 5. – P. 247–250. (In Russian)]
9. Грязина Е.Н., Поляк Б.Т., Тремба А.А. Современное состояние метода D-разбиения // Автоматика и телемеханика. – 2008. – № 12. – С. 3–40. [Gryazina, E.N., Polyak, B.T., Tremba, A.A. D-Decomposition Technique State-of-the-Art // Automation and Remote Control. – 2008. – Vol. 69, no. 12. – P. 1991–2026.]
10. Boyd, S., El Ghaoui, L., Feron, E., Balakrishnan, V. Linear Matrix Inequalities in Systems and Control Theory. – Philadelphia: SIAM, 1994. – 212 p.
11. Поляк Б.Т., Хлебников М.В., Щербakov П.С. Управление линейными системами при внешних возмущениях: Техника линейных матричных неравенств. – М.: ЛЕНАНД, 2014. – 560 с. [Polyak, B.T., Khlebnikov, M.V., Shcherbakov, P.S. Control of Linear Systems Subjected to Exogenous Disturbances: An LMI Approach. – Moscow: LENAND, 2014. – 260 s. (In Russian)]
12. Поляк Б.Т., Хлебников М.В. Новые критерии настройки ПИД-регуляторов // Автоматика и телемеханика. – 2022. – № 11. – С. 62–82. [Polyak, B.T., Khlebnikov, M.V. New Criteria for Tuning PID Controllers // Automation and Remote Control. – 2022. – Vol. 83, no. 11. – P. 1724–1741.]
13. Хлебников М.В. Синтез ПИ-регулятора для подавления внешних возмущений // Автоматика и телемеханика. – 2023. – № 8. – С. 3–23. [Khlebnikov, M.V. PI Controller Design for Suppressing Exogenous Disturbances // Automation and Remote Control. – 2023. – Vol. 84, no. 8. – P. 799–813.]



14. *Shatov, D.V.* PI and PID Controllers Design for Tracking Systems via LQ Criterion // Proc. 2023 5th International Conference on Control Systems, Mathematical Modeling, Automation and Energy Efficiency (SUMMA). – Lipetsk, 2023. – P. 551–556.
15. *Мохначева А.А., Хлебников М.В.* Некоторые эксперименты по оценке хрупкости ПИ-регуляторов // Управление большими системами: Материалы XXI Всеросс. шк.-конф. молодых ученых. – Тамбов, 2025. – Т. 1. – С. 50–56. [*Mokhnacheva, A.A., Khlebnikov, M.V.* Nekotoryye eksperimenty po otsenke khрупkosti PI-regulyatorov // Large-Scale Systems Control. Materialy XXI Vseross. shk.-konf. molodykh uchenykh. – Tambov, 2025. – Vol. 1. – P. 50–56. (In Russian)]
16. *Хлебников М.В., Шатов Д.В.* Настройка нехрупких ПИ-регуляторов: анализ // Автоматика и телемеханика. – 2026. – № 2. – С. 61–82. [*Khlebnikov, M.V., Shatov, D.V.* Tuning Non-fragile PI Controllers: Analysis // Automation and Remote Control. – 2026. – Vol. 87, no. 2. – P. 141–158)]
17. *Grant, M., Boyd, S.* CVX: Matlab Software for Disciplined Convex Programming, version 2.1. – URL <http://cvxr.com/cvx> (дата обращения 27.02.2026).

Статья представлена к публикации членом редколлегии С. А. Красновой.

Поступила в редакцию 30.10.2025,  
после доработки 19.01.2026.  
Принята к публикации 28.01.2026.

**Мохначева Арина Александровна** – математик,  
✉ [arinamokh14@gmail.com](mailto:arinamokh14@gmail.com),  
ORCID ID: <https://orcid.org/0009-0008-2003-2743>

**Хлебников Михаил Владимирович** – д-р физ.-мат. наук,  
проф. РАН, ✉ [khlebnik@ipu.ru](mailto:khlebnik@ipu.ru),  
ORCID ID: <https://orcid.org/0000-0001-9086-1426>

Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН,  
г. Москва.

© 2026 г. Мохначева А. А., Хлебников М. В.



Эта статья доступна по лицензии Creative Commons «Attribution» («Атрибуция») 4.0 Всемирная.

## ESTIMATING THE FRAGILITY OF PI CONTROLLERS USING THE TECHNIQUE OF LINEAR MATRIX INEQUALITIES AND VISUALIZATION TOOLS

A. A. Mokhnacheva\* and M. V. Khlebnikov\*\*

\*\*\*Trapeznikov Institute of Control Sciences, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

\*✉ [arinamokh14@gmail.com](mailto:arinamokh14@gmail.com), \*\*✉ [khlebnik@ipu.ru](mailto:khlebnik@ipu.ru)

**Abstract.** This paper considers the problem of estimating the fragility of a PI controller for a linear control system: it is required to construct admissible variation regions for the controller gains in which the closed-loop system remains stable. The method proposed below is based on the technique of linear matrix inequalities (LMIs); it reduces the original estimation problem to non-complex convex optimization problems. The non-fragility radius of a PI controller and a non-fragile bounding ellipsoid for rejecting nonrandom bounded exogenous disturbances are introduced. A simple method is described to estimate the stabilizability region as a whole. According to the numerical simulation results provided, the approach is effective. Note that this approach can be easily extended to more general problems, in particular, to the fragility analysis of PID controllers and PID controllers with an aperiodic filter.

**Keywords:** linear control system, PI controller, stability, fragility, non-fragility, linear matrix inequality (LMI), bounding ellipse, ellipse of admissible perturbations.

**Acknowledgments.** The research presented in Section 3 was supported by the Russian Science Foundation, project no. 25-29-20062, <https://rscf.ru/en/project/25-29-20062/>.