УДК 519.83

ОБ ОДНОМ КОНТРПРИМЕРЕ ДЛЯ МЕТОДА АНАЛИЗА ИЕРАРХИЙ

В.Г. Митихин

Рассмотрена ранее опубликованная в журнале статья, содержащая контрпример для метода анализа иерархий — МАИ (Analytic Hierarchy Process — AHP). Авторы контрпримера ставили цель — продемонстрировать с его помощью несостоятельность теоретической базы МАИ. Анализ этого примера, выполненный в настоящей работе, выявил ошибку авторов статьи при использовании средств МАИ, в силу чего утверждение о несостоятельности МАИ, основанное на рассматриваемой задаче, неправомерно.

Ключевые слова: многокритериальный анализ, метод анализа иерархий, шкала отношений, фундаментальная шкала, нормативный подход, шкала интенсивностей, предпочтения, теория важности критериев.

ВВЕДЕНИЕ

В статье [1] рассматривался пример, с помощью которого авторы этой работы хотели показать, что МАИ и его обобщение — метод аналитических сетей (МАС) [2—4] некорректны, так как техника оценивания и последующих вычислений приоритетов альтернатив в рамках МАИ, по мнению авторов работы [1], может приводить к явно ошибочным результатам.

Поставленная в работе [1] задача сформулирована для четырех альтернатив с двумя равно важными критериями с общей, вербальной, трех уровневой шкалой оценок. Решение этой задачи, полученное на основе МАИ, сравнивалось с решением, найденным на основе теории важности критериев (ТВК) [5]. Сравнение полученных решений в работе [1] дало основание ее авторам для вывода о явно неверном решении, полученном с помощью МАИ и, как следствие этого — вывод о несостоятельности теоретической базы МАИ. Цель настоящей работы — на основе анализа решений задачи показать, что вывод, сделанный в работе [1], явился следствием некорректного применения аппарата МАИ.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И АНАЛИЗ ЕЕ РЕШЕНИЯ

Сохраняя обозначения работы [1], напомним постановку задачи. Имеются четыре варианта (альтернативы): x^1, x^2, x^3 и x^4 с векторными оценками $f(x) = (f_1(x), f_2(x))$ по двум одинаковой важности критериям f_1 и f_2 с общей шкалой оценок: e — отлично (*excellent*), g — хорошо (*good*), m — посредственно (*mediocre*). Рассматриваются следующие векторные оценки вариантов:

$$f(x^1) = (e, g);\quad f(x^2) = (m, e);\quad f(x^3) = (g, g);\quad f(x^4) = (e, m).$$

Требуется ранжировать эти варианты по предпочтительности.

Сначала в работе [1] было найдено решение на основе МАИ. Точнее, применялся дескриптивный подход, основанный на проведении парных сравнений представленных четырех вариантов x^1, x^2, x^3 и x^4 относительно критериев f_1 и f_2. Полученное решение сразу выявило интуитивно ясные противоречия (и здесь можно согласиться с авторами работы [1]): 1) вариант x^2 всегда предпочтительнее варианта x^4, при абсолютной симметрии этих вариантов в рассматриваемой задаче; 2) существуют условия, при которых вариант x^2 является *наилучшим*, хотя те же интуитивные соображения подсказывают, что *наилучшим вариантом* следует считать x^1.

Для того чтобы вскрыть истинную природу указанных противоречий при решении данной задачи проанализируем один опорный момент решения задачи, построенного в работе [1] на базе ТВК. В процессе решения задачи на основе ТВК авторы прибегают к сравнению варианта x^1, имеющего векторную оценку (e, g) с *гипотетическим*, *безразличным* вариантом x^5, имеющим векторную оценку (g, e). И здесь мы отметим следующее обстоятельство: использование *гипотетических* вариантов — «безопасный» прием с позиций ТВК, *не является* «безопасным» в рамках дескриптивного подхода МАИ. Иными словами, использование *гипотетических* вариантов, т. е. *дополнительных* вариантов при неизменной структуре множества критериев, приводит к изменению порядка ранжированных вариантов, если эта ранжировка выполнялась на основе парных сравнений. Этот факт известен как *нарушение принципа инвариантности* при использовании *дескриптивного* подхода в МАИ [4]. Отметим, что этот факт известен и авторам работы [1] (см. статью [6]). Формально в силу этого обстоятельства «дескриптивный подход» некорректно применять для решения рассматриваемой задачи, если сравнивать результаты на его основе с решением на основе ТВК.

Один из способов *сохранения принципа инвариантности* заключается в *нормативном* подходе МАИ (детальное обсуждение см., например, в работах [2—4, 7—9]), созданном для решения задач, аналогичных поставленной. Нормативный подход (часто употребляют название — *сравнение вариантов относительно стандартов или идеальной альтернативы*) основан на использовании парных сравнений для формирования *шкалы интенсивностей* по каждому критерию, с помощью которой затем выполняется раздельная оценка каждого из предложенных вариантов с учетом весомости критериев. В нашем случае *нормативный подход* в решении рассматриваемого «контрпримера» *необходим* в силу постановки задачи, так как оценки по критериям f_1 и f_2 (e — отлично, g — хорошо, m — посредственно) с очевидностью предполагают сравнение рассматриваемых вариантов с некоторым *стандартом* по этим критериям. Именно для таких постановок и разработан «нормативный» подход в МАИ.

Покажем теперь, что применение *нормативного* подхода МАИ позволяет устранить все противоречия, отмеченные в работе [1], возникавшие при сравнении решений на основе ТВК и МАИ.

2. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ НА ОСНОВЕ НОРМАТИВНОГО ПОДХОДА МАИ

Так как критерии f_1 и f_2 имеют общую шкалу оценок: e, g, m, то сначала сформируем матрицу парных сравнений указанных оценок с использованием обозначений работы [1]: a — степень превосходства в предпочтительности оценки e над оценкой g; b — степень превосходства оценки g над оценкой m. При этом $a > 1$ и $b > 1$.

Согласованная матрица парных сравнений оценок исходной шкалы относительно критериев f_1 и f_2 приведена в таблице.

Для этой матрицы получаем нормированный правый вектор приоритетов (весов) оценок:

$$(p(e),\ p(g),\ p(m)) = (ab(1 + a + ab)/C;$$
$$b(1 + a + ab)/C;\ (1 + a + ab)/C),$$

где $C = ab(3 + a + b + ab) + a + b + 1$.

Полученные приоритеты делим на максимальное значение из них: $p(e)$ — т. е. соотносим их с приоритетом отличной оценки. В результате получаем следующий вектор интенсивностей исходных оценок:

$$(i(e),\ i(g),\ i(m)) = (1;\ 1/a;\ 1/ab).$$

Для вычисления интегральных оценок вариантов используем полученную шкалу интенсивностей с учетом равной весомости критериев f_1 и f_2:

$$h(x^1) = 0{,}5i(e) + 0{,}5i(g) = 0{,}5(a + 1)/a;$$

$$h(x^2) = 0{,}5i(m) + 0{,}5i(e) = 0{,}5(ab + 1)/(ab);$$

$$h(x^3) = 0{,}5i(g) + 0{,}5i(g) = 1/a;$$

$$h(x^4) = 0{,}5i(e) + 0{,}5i(m) = 0{,}5(ab + 1)/(ab).$$

Очевидно, что *гипотетический* вариант x^5 имеет такую же интегральную оценку как и вариант x^1,

Матрица парных сравнений оценок шкалы по критериям f_1 и f_2

$f_1,\ f_2$	e	g	m
e	1	a	ab
g	$1/a$	1	b
m	$1/ab$	$1/b$	1

отметим также, что вариант x^0 с векторной оценкой (e, e) следует считать *идеальным* (стандартом), который имеет интегральную оценку, равную 1.

Из полученных выражений для интегральных оценок вариантов x^1, x^2, x^3 и x^4 сразу следует, что при любых значениях a, $b > 1$, принадлежащих фундаментальной шкале МАИ, вариант x^1 является наилучшим, а варианты x^2 и x^4 одинаковы по предпочтительности. Результат сравнения варианта x^2 (как и x^4) с вариантом x^3:

1) при $b = 0{,}5(ab + 1)$, что эквивалентно условию: $a = 2 - 1/b$, варианты одинаковы по предпочтительности;

2) при выполнении условия $a > 2 - 1/b$ — вариант x^2 предпочтительнее варианта x^3;

3) при $1 < a < 2 - 1/b$ вариант x^3 предпочтительнее варианта x^2.

Здесь можно ограничиться классическим случаем, как и в работе [1] для рассматриваемой задачи: $1 < ab \leqslant 9$. Дополнительно отметим, что в МАИ имеются приемы [4], позволяющие, с одной стороны, осмысленно расширить границы фундаментальной шкалы и перейти от классического случая к интервалу ($1 < ab < \infty$), а с другой, повысить точность измерения значений a, b.

В итоге для значений a, b на основе классической фундаментальной шкалы (a = 2, 3, 4 с соответствующими условию $ab \leqslant 9$ значениями b) имеет место ситуация: вариант x^2 (как и x^4) предпочтительнее варианта x^3.

Полученное решение покрывает решение, найденное на основе ТВК в работе [1], при этом оно позволяет полностью упорядочить варианты x^1, x^2, x^3 и x^4 (отметим, что в работе [1] достигнута лишь частичная упорядоченность вариантов).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Приведенные в настоящей работе результаты, позволяют сделать вывод о некорректности контрпримера, представленного в статье [1], и, соответственно, вывод о несостоятельности метода анализа иерархий, основанный на этом примере, неправомерен.

В конце работы [1] авторы делают заявление о необходимости разработки корректных и эффективных методов анализа многокритериальных задач с иерархической структурой, и с этим можно согласиться. Добавим, что в свете классических результатов, полученных К. Эрроу, к *ординальным* методам следует относиться достаточно осторожно, а *кардинальные* представления, аналогичные фундаментальной шкале МАИ и относительности измерений, позволяют надеяться на успешное развитие эффективных в *прикладном* плане методов анализа многокритериальных задач с иерархической и сетевой структурой.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Подиновский В.В., Подиновская О.В.* О некорректности метода анализа иерархий // Проблемы управления. — 2011. — № 1. — С. 8—13.
2. *Saaty T.L.* The analytic hierarchy process. — N.-Y.: McGraw Hill, 1980. — 288 p.
3. *Саати Т.* Принятие решений. Метод анализа иерархий / Пер. с англ. — М.: Радио и связь, 1993. — 320 с.
4. *Саати Т. Л.* Принятие решений при зависимостях и обратных связях: Аналитические сети / Пер. с англ. — М.: Изд. ЛКИ, 2008. — 360 с.
5. *Подиновский В.В.* Введение в теорию важности критериев в многокритериальных задачах принятия решений. — М.: Физматлит, 2007. — 64 с.
6. *Подиновская О.В.* Метод анализа иерархий как метод поддержки принятия многокритериальных решений // Информационные технологии моделирования и управления. — 2010. — № 1 (60). — С. 71—80.
7. *Макеев С.П., Шахнов И.Ф.* Упорядочение объектов в иерархических системах // Изв. АН СССР. Техническая кибернетика. — 1991. — № 3. — С. 29—46.
8. *Андрейчиков А.В., Андрейчикова О.Н.* Анализ, синтез, планирование решений в экономике. — М.: Финансы и статистика, 2004. — 464 с.
9. *Tversky A., Slovic P., Kahneman D.* The Causes of Preference Reversal // The American Economic Review. — 1990. — Vol. 80, N 1. — P. 204—217.

Статья представлена к публикации членом редколлегии Ф.Т. Алескеровым.

Митихин Вячеслав Георгиевич — канд. физ.-мат. наук, доцент, Московский государственный текстильный университет им. А.Н. Косыгина, ✉ mvgmia@mail.ru.