

О СВОЙСТВАХ РЕГУЛЯРНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ¹

Л.А. Мироновский, Т.Н. Соловьева

Введено понятие регулярных динамических систем, определены необходимые и достаточные условия регулярности. Рассмотрено применение плоскости Вышнеградского для анализа свойств регулярных систем третьего порядка: на этой плоскости выделяются области, соответствующие различным сочетаниям знаков собственных чисел кросс-грамиана системы, и строятся кривые равной обусловленности системной матрицы в сбалансированном представлении.

Ключевые слова: регулярные системы, сбалансированное представление, ганкелевы сингулярные числа, обусловленность, диаграмма Вышнеградского.

ВВЕДЕНИЕ

В теории управления известны различные типы линейных динамических систем, отличающиеся расположением нулей и полюсов, видом частотных характеристик и другими свойствами [1–5]. В настоящей статье вводится в рассмотрение еще один тип систем — так называемые регулярные системы. Они характеризуются специальным видом матриц сбалансированного представления и регулярной структурной реализацией. Коэффициенты передаточной функции (ПФ) регулярной системы полностью определяются значениями ее ганкелевых сингулярных чисел (ГСЧ).

Цель статьи заключается в изучении свойств таких систем и отыскании необходимых и достаточных условий регулярности. Показывается, что удобным инструментом для решения этих задач в случае систем третьего порядка служит плоскость И.А. Вышнеградского, на которой регулярным системам отвечает вполне определенная область. Аналитическое описание границы этой области также составляет одну из целей статьи.

1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ РЕГУЛЯРНЫХ СИСТЕМ И УСЛОВИЯ РЕГУЛЯРНОСТИ

В теории управления рассматриваются различные классы линейных систем, например, устойчивые, минимально-фазовые, фазовращательные и др. В настоящей статье исследуется разновидность линейных систем, названная регулярными системами. Регулярные системы обладают рядом специфических свойств, которые целесообразно учитывать при синтезе и анализе. В частности, для каждой из таких систем существует структурная реализация на одинаковых апериодических звеньях. Пример такой реализации для системы третьего порядка приводится далее.

Определение регулярных систем удобно дать, воспользовавшись понятием сбалансированного представления. Напомним, что реализация устойчивой системы, заданной описанием в пространстве состояний

$$\dot{X} = AX + bu, \quad y = cX, \quad (1)$$

где $X \in R^n$ — вектор переменных состояния; $u, y \in R^1$ — входной и выходной сигналы; A, b и c — постоянные матрицы соответствующих размеров; называется сбалансированной, если ее грамианы

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 11-08-00240).



управляемости и наблюдаемости диагональны и равны между собой [1–3]: $W_c = W_o = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$.

Такие реализации существуют для каждой устойчивой линейной системы. Числа $\sigma_i \geq 0$ называются ганкелевыми сингулярными числами системы (сингулярными числами ее ганкелева оператора). Для систем с одним входом и одним выходом они совпадают с собственными числами v_i кросс-грамиана W_{co} системы (т. е. собственными числами ее ганкелева оператора), взятыми по абсолютной величине: $W_{co} = \int_0^\infty e^{At} b c e^{At} dt$.

Сбалансированную реализацию можно задать набором ганкелевых сингулярных чисел и компонент b_i вектора b описания (1). Если все ГСЧ различны, то элементы матриц A и c определяются формулами:

$$a_{ij} = -\frac{b_i b_j}{s_i s_j \sigma_i + \sigma_j}, \quad c_i = s_i b_i, \quad (2)$$

где $s_i = \pm 1$; $i = \overline{1, n}$ — знаки собственных чисел кросс-грамиана ($v_i = s_i \sigma_i$).

В частности, для диагональных элементов матрицы A имеем

$$a_{ii} = -\frac{b_i^2}{2\sigma_i}. \quad (3)$$

Определение. Система (1) с попарно различными ГСЧ называется регулярной, если все диагональные элементы матрицы A ее сбалансированного представления одинаковы. ♦

Такой специальный вид системной матрицы обуславливает простоту структурной реализации

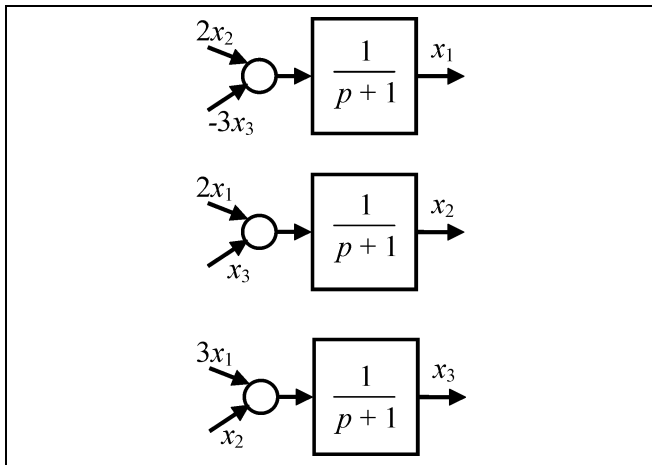


Рис. 1. Пример реализации регулярной системы

регулярных систем с помощью набора одинаковых апериодических звеньев. В качестве примера на рис. 1 приведена структурная схема регулярной системы третьего порядка с матрицей

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix} \text{ сбалансированного представления.}$$

Характеристическое уравнение этой матрицы имеет вид $p^3 + 3p^2 + 7p + 5 = 0$.

Заметим, что масштабированием времени диагональные элементы матрицы A всегда можно сделать единичными: $a_{ii} = -1$. В этом случае из равенства (3) следует, что элементы вектора b регулярной системы определяются формулами $b_i = \sqrt{2\sigma_i}$, $i = \overline{1, n}$.

Таким образом, регулярная система n -го порядка полностью задается набором сингулярных чисел $\sigma_1, \dots, \sigma_n$, а также сигнатурным вектором $S = [s_1, s_2, \dots, s_n]$.

Перейдем к рассмотрению регулярных систем третьего порядка. Будем считать, что ГСЧ системы упорядочены по убыванию: $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3 > 0$.

Передаточная функция регулярной системы третьего порядка имеет вид [1]:

$$W(p) = \frac{p^2 + \frac{2}{k} \left(\frac{v_1(v_1 - v_2)}{v_1 + v_2} + \frac{v_2(v_2 - v_3)}{v_2 + v_3} - \frac{v_3(v_1 - v_3)}{v_1 + v_3} \right) p + a_0}{p^3 + 3p^2 + a_1 p + a_0}, \quad (4)$$

$$\text{где } a_1 = \left(\frac{v_1 - v_2}{v_1 + v_2} \right)^2 + \left(\frac{v_1 - v_3}{v_1 + v_3} \right)^2 + \left(\frac{v_2 - v_3}{v_2 + v_3} \right)^2,$$

$$a_0 = \left(\frac{(v_1 - v_2)(v_1 - v_3)(v_2 - v_3)}{(v_1 + v_2)(v_1 + v_3)(v_2 + v_3)} \right)^2, \quad k = v_1 + v_2 + v_3.$$

В соответствии с формулой (4) одним из условий того, что произвольная ПФ третьего порядка

$$W(p) = \frac{\beta_2 p^2 + \beta_1 p + \beta_0}{p^3 + \alpha_2 p^2 + \alpha_1 p + \alpha_0} \quad (5)$$

принадлежит к классу регулярных, является равенство нулю определителя, образованного из коэффициентов числителя и знаменателя данной передаточной функции при p^2 и p^0 :

$$D_1 = \begin{vmatrix} 3\beta_2 & \beta_0 \\ \alpha_2 & \alpha_0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 3\alpha_0 \beta_2 = \alpha_2 \beta_0. \quad (6)$$

Это равенство представляет собой первое необходимое условие регулярности системы третьего порядка.

Условие (6) учитывает только соотношение коэффициентов α_0 , α_2 , β_0 и β_2 . При более подробном рассмотрении связей между коэффициентами формулы (4) получаем второе условие регулярности:

$$D_2 = 8\alpha_2^2\beta_1\beta_2(\alpha_0 - \alpha_1\alpha_2) + \\ + \alpha_2\beta_1^2(3\alpha_0 - \alpha_1\alpha_2 + 2\alpha_2^3) + \\ + 4\beta_2^2(9\alpha_0^2 - 9\alpha_0\alpha_1\alpha_2 + 2\alpha_0\alpha_2^3 + 2\alpha_1^2\alpha_2^2) = 0. \quad (7)$$

Одновременное выполнение равенств (6) и (7) является необходимым и достаточным условием регулярности системы.

Для получения графического условия регулярности систем третьего порядка удобно использовать их представление на плоскости Вышнеградского.

2. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ СИСТЕМ НА ПЛОСКОСТИ ВЫШНЕГРАДСКОГО

Плоскость Вышнеградского представляет собой классический инструмент для анализа устойчивости линейных систем третьего порядка. В настоящее время критерий устойчивости Вышнеградского имеет скорее учебно-методическое значение. Однако идея разделения плоскости параметров на области, соответствующие системам с разными свойствами, остается вполне продуктивной и вос-

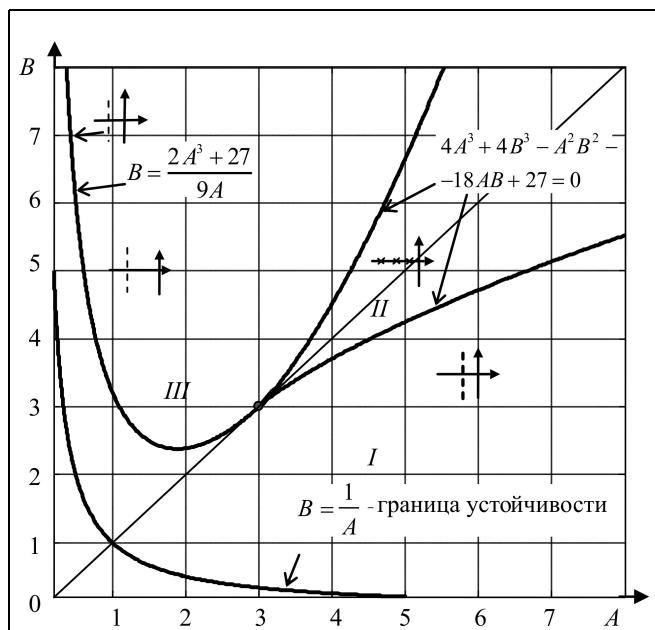


Рис. 2. Классическая диаграмма Вышнеградского

требованной. Наиболее характерным примером служит известный метод D -разбиения [4].

В работе [5] плоскость Вышнеградского применялась для определения свойств частотных характеристик звеньев третьего порядка. При этом область устойчивости разбивалась на четыре части, соответствующие разным видам амплитудно-частотных характеристик. Построения также проводились и в плоскости параметров, полученных путем разложения характеристического полинома на два вещественных сомножителя. Показано, что в последнем случае уравнения кривых, разделяющих области, заметно упрощаются.

Пусть система третьего порядка задана передаточной функцией (5).

Делая замену переменной $p = \sqrt[3]{\alpha_0} q$, получаем нормированное характеристическое уравнение

$$q^3 + Aq^2 + Bq + 1 = 0, \\ A = \frac{\alpha_2}{\alpha_0} (\sqrt[3]{\alpha_0})^2, \quad B = \frac{\alpha_1}{\alpha_0} \sqrt[3]{\alpha_0}, \quad (8)$$

где коэффициенты A и B называются параметрами Вышнеградского.

В плоскости этих параметров строят кривые, разделяющие области с различным взаимным расположением полюсов системы. Полученный график называется диаграммой Вышнеградского.

На классической диаграмме Вышнеградского [4] выделены области с разными типами корней характеристического полинома (рис. 2). Границей области устойчивости на диаграмме служит гипербола $B = 1/A$. Область, лежащая выше этой кривой, разбивается на три части I, II и III, соответствующие разным вариантам расположения корней характеристического уравнения. Например, часть II, имеющая вид остроконечного клюва, отвечает случаю вещественных корней.

В принципе, плоскость параметров Вышнеградского может быть применена для анализа любых свойств системы третьего порядка, зависящих от расположения корней характеристического полинома. В случае регулярных систем ее применение особенно удобно, так как регулярные системы полностью задаются набором ГСЧ или любым другим набором из n независимых параметров системы. В частности, ими могут быть и коэффициенты характеристического полинома системы.

3. ГРАНИЦА РЕГУЛЯРНЫХ СИСТЕМ НА ПЛОСКОСТИ ВЫШНЕГРАДСКОГО

Для определения области, соответствующей регулярным системам на плоскости Вышнеградского, была проведена серия компьютерных экспери-

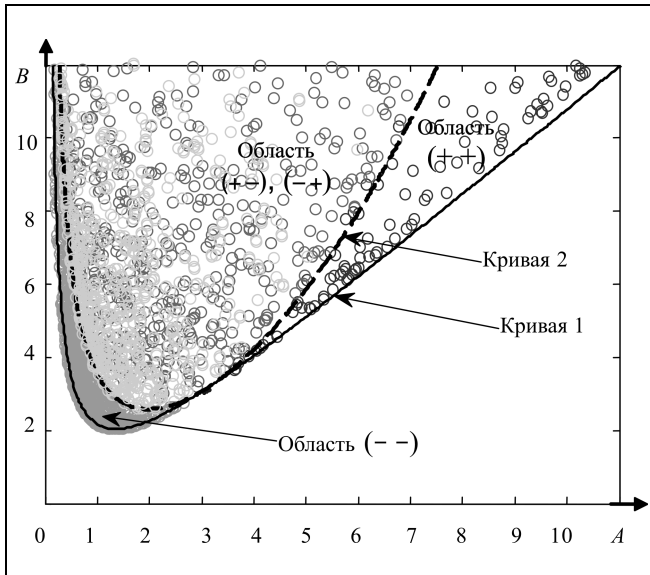


Рис. 3. Расположение регулярных систем на плоскости Вышнеградского

ментов. Для каждого из 1000 случайных наборов ГСЧ, взятых из интервала от 1 до 10, и каждого из четырех вариантов сигнатурных векторов $\mathbf{S}$, строилась матрица $\mathbf{A}$ сбалансированного представления регулярной системы. Элементы матрицы определялись по формуле (2). Ее характеристический полином приводился к форме Вышнеградского (8) и соответствующая точка наносилась на плоскость. Компьютерные эксперименты показали, что точки, соответствующие регулярным системам, лежат в пределах строго определенной области на плоскости Вышнеградского (рис. 3).

В связи с этим возникает задача аналитического отыскания границы указанной области. Далее приводится ее решение.

Преобразуем знаменатель ПФ (4) к форме Вышнеградского (8). Тогда получим следующие значения параметров A и B :

$$A = \frac{3}{\left(\frac{v_1 - v_2}{v_1 + v_2}\right)^{2/3} \left(\frac{v_1 - v_3}{v_1 + v_3}\right)^{2/3} \left(\frac{v_2 - v_3}{v_2 + v_3}\right)^{2/3}},$$

$$B = \frac{\frac{(v_1 - v_2)^2}{(v_1 + v_2)^2} + \frac{(v_1 - v_3)^2}{(v_1 + v_3)^2} + \frac{(v_2 - v_3)^2}{(v_2 + v_3)^2}}{\left(\frac{v_1 - v_2}{v_1 + v_2}\right)^{4/3} \left(\frac{v_1 - v_3}{v_1 + v_3}\right)^{4/3} \left(\frac{v_2 - v_3}{v_2 + v_3}\right)^{4/3}}. \quad (9)$$

Для сокращения числа переменных перейдем от собственных чисел кросс-грамиана к их отно-

шениям $q_1 = v_1/v_2$, $q_2 = v_2/v_3$ и получим систему из двух уравнений вида:

$$A = f_1(q_1, q_2), \quad B = f_2(q_1, q_2).$$

В каждое из уравнений переменные q_1 и q_2 входят симметрично. Исключая из этой системы переменную q_2 , получаем следующее уравнение шестого порядка для q_1 :

$$q_1^6 - 6\frac{k_1}{d}q_1^5 + 3\frac{k_2}{d^2}q_1^4 - 4\frac{k_3}{d^2}q_1^3 + 3\frac{k_2}{d^2}q_1^2 - 6\frac{k_1}{d}q_1 + 1 = 0,$$

где $k_1 = 2A^3 + 3AB - 9$, $k_2 = 20A^6 + 12A^4B - 27A^2B^2 - 612A^3 + 162AB - 234$, $k_3 = 20A^6 + 36A^4B + 3^4A^2B^2 + 756A^3 - 486AB + 3^6$, $d = 2A^3 - 9AB + 27$.

Это уравнение является возвратным, поэтому заменой переменных $x = q_1 + 1/q_1$ его порядок понижается вдвое, в результате чего получаем кубическое уравнение:

$$x^3 - 6\frac{k_1}{d}x^2 + 12\frac{k_4}{d^2}x - 8\frac{k_5}{d^2} = 0, \quad (10)$$

где $k_4 = 4A^6 + 12A^4B - 27A^2B^2 - 180A^3 + 162AB - 234$, $k_5 = 4A^6 + 36A^4B + 81A^2B^2 + 324A^3 - 486AB + 729$.

Выполняя обратную замену переменных, получаем, что каждому решению уравнения (10) соответствует пара взаимно обратных корней уравнения $q_1^2 - q_1x + 1 = 0$. Выбирая один из них (большой по модулю, так как ГСЧ упорядочены по убыванию), получаем три решения для отношений собственных чисел кросс-грамиана q_1 , q_2 и $q_3 = v_3/v_1 = 1/(q_1q_2)$.

Нас интересуют только вещественные q_1 и q_2 , а, следовательно, и вещественные корни уравнения (10). Очевидно, что критическим случаем их существования будет равенство нулю дискриминанта [6] этого уравнения:

$$D_3 = 4A^6 - 12A^4B - 2A^3B^3 + 20A^3 + 15A^2B^2 - 36AB + 27 = 0. \quad (11)$$

Уравнение (11) описывает границу области существования регулярных систем на плоскости Вышнеградского (кривая 1 на рис. 3). Из него вытекает третье необходимое условие регулярности,

согласно которому дискриминант D_3 должен быть отрицательным.

Если при подстановке параметров Вышнеградского A и B для данной системы в формулу (11) получено положительное число $D_3 > 0$, система не является регулярной. Этим условием удобно пользоваться графически, как и показано далее в § 6, поэтому в дальнейшем будем называть его графическим условием регулярности.

Случаю $D_3 = 0$ соответствует наличие у уравнения (10) пары кратных корней, т. е. равенство отношений $q_1 = q_2 = h$. Это означает, что точкам кривой I (см. рис. 3) отвечают регулярные системы, у которых ганкелевы сингулярные числа расположены в геометрической прогрессии: $\sigma_2 = h\sigma_1$, $\sigma_3 = h^2\sigma_1$.

Таким образом, мы не только нашли аналитическое уравнение кривой, ограничивающей расположение регулярных систем на плоскости Вышнеградского, но и определили тип систем, лежащих на границе этой области.

Передаточная функция таких систем получается из формулы (4) при $q_1 = q_2 = h$ и имеет вид:

$$W(p) = 2v_1 \frac{(h^2 + h + 1)}{(h^2 + 1)p + (h - 1)^2} \times \\ \times \frac{(h + 1)^2 p^2 + 2(h^2 + 1)(h^2 - 1)^2 p + (h - 1)^6}{(h^2 + 1)(h + 1)^2 p^2 + 2(h^2 + h + 1)(h + 1)^2 p + (h - 1)^4}.$$

Приводя знаменатель к форме Вышнеградского и исключая переменную h из выражений для его коэффициентов A и B , снова получаем уравнение (11).

Каждой точке в области регулярных систем на плоскости Вышнеградского соответствует в общем случае пара регулярных систем (с точностью до умножения их ПФ на число). Две указанные системы отличаются друг от друга перестановкой q_1 и q_2 . На границе области $q_1 = q_2$, и системы становятся равными, т. е. каждой граничной точке отвечает только одна регулярная система, и ее ГСЧ образуют геометрическую прогрессию.

4. УЧЕТ ЗНАКОВ ГАНКЕЛЕВЫХ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ

Системе третьего порядка с одним и тем же набором ГСЧ может соответствовать $2^3 = 8$ различных сигнатурных векторов S (сочетаний знаков). Легко показать, что при умножении ПФ на -1

собственные числа кросс-грамиана меняют свои знаки на противоположные. При этом характеристический полином системы не изменится. Это позволяет сократить число рассматриваемых сочетаний знаков до четырех, а именно $(+++)$, $(-++)$, $(+-+)$, $(++-)$. Компьютерные эксперименты показали, что каждому из таких сочетаний будут отвечать свои области на плоскости Вышнеградского (см. рис. 3).

На рис. 3 выделены три внутренние области регулярных систем: $(++)$ — системы с одинаковыми знаками v_i ; $(--)$ — системы, в которых v_2 отличается по знаку от v_1 и v_3 ; $(+-)$, $(-+)$ — остальные системы. Эти обозначения соответствуют знакам отношений $q_1 = v_1/v_2$, $q_2 = v_2/v_3$.

Найдем уравнение штриховой кривой, разделяющей три указанные области.

Очевидно, что пограничным случаем описанного расположения корней характеристического полинома кросс-грамиана является равенство одного из них нулю. При этом порядок ПФ понижается. Например, при $v_1 = 0$ передаточная функция (4) принимает вид:

$$W(p) = \\ = 2(v_2 + v_3) \frac{(v_2 + v_3)^2 p + (v_2 - v_3)^2}{(v_2 + v_3)^2 p^2 + 2(v_2 + v_3)^2 p + (v_2 - v_3)^2}.$$

При этом в дроби (4) числитель и знаменатель сокращаются на $v_2^2 v_3^2 (p + 1)$, формулы (9) упрощаются и уравнение (11) принимает вид:

$$2A^3 - 9AB + 27 = 0. \quad (12)$$

Ему отвечает кривая 2 на рис. 3. Она касается кривой I в точке с координатами $(3; 3)$ и делит область существования регулярных систем на 3 части. В первой части $(++)$, справа от кривой, лежат точки регулярных систем, у которых q_1 и q_2 положительны (т. е. все три v_i имеют одинаковый знак). Во второй части $(--)$, слева от кривой 2, находятся точки систем с отрицательными q_1 и q_2 . Это системы, в которых v_2 отличается по знаку от v_1 и v_3 . Третья часть $(+-)$, $(-+)$ расположена над кривой, ей соответствует точки всех остальных регулярных систем. Точка $(3; 3)$ является особой, в ней все три части соприкасаются.

Отметим, что кривая (12) уже имеется на классической плоскости Вышнеградского. Она составляет левую границу области III (см. рис. 2) и соответствует расположению корней характеристического полинома в арифметической прогрессии. Однако ранее смысл этой границы влево от точ-



ки (3; 3) оставался неясным, и обычно эта часть кривой просто не изображалась.

В случае кратных ганкелевых сингулярных чисел ($v_1 = v_2$) точки систем асимптотически приближаются к кривой 2, и система так же, как и в предыдущем случае, оказывается неминимальной, т. е. в числителе и знаменателе ПФ системы появляются одинаковые корни, и после их сокращения порядок системы понижается. Коэффициенты A и B для таких систем становятся бесконечно большими. Это означает, что ни одна из точек на кривой 2 не отвечает регулярной системе. В подтверждение этого факта заметим, что левая часть выражения (12) стоит в знаменателях членов уравнения (10). Следовательно, не существует решений q_1 и q_2 , для которых выполнялось бы условие (12).

5. ОБУСЛОВЛЕННОСТЬ РЕГУЛЯРНЫХ СИСТЕМ

При анализе вычислительных погрешностей широко используется понятие обусловленности. Для матрицы A число обусловленности μ чаще всего определяют формулой:

$$\mu^2 = \frac{\max(\lambda_i)}{\min(\lambda_i)}, \quad i = \overline{1, n},$$

где λ_i — собственные числа матрицы AA^T .

Чем больше число μ , тем хуже обусловлена матрица, и тем больше уровень вычислительных погрешностей. Значение $\mu = 1$ соответствует идеальной обусловленности, которая достигается в случае ортогональных матриц.

Покажем, что анализ обусловленности матрицы A сбалансированного представления (1) регулярных систем третьего порядка удобно выполнять на плоскости Вышнеградского. С этой целью путем компьютерного моделирования в пакете Matlab были построены кривые равной обусловленности.

При построении кривых из множества случайно формируемых регулярных систем отбирались системы с заданной обусловленностью матрицы A сбалансированного представления, соответствующие точки наносились на плоскость Вышнеградского и соединялись между собой (рис. 4).

Точки, лежащие на одной кривой, отвечают регулярным системам с одинаковым числом обусловленности матрицы A . Чем ниже расположена кривая на плоскости, тем меньше число обусловленности. Докажем, что регулярных систем с $\mu = 1$ не существует. Действительно, для выполнения условия $\mu = 1$ требуется, чтобы матрица A была ортогональной. Решая матричное уравнение $AA^T = E$,

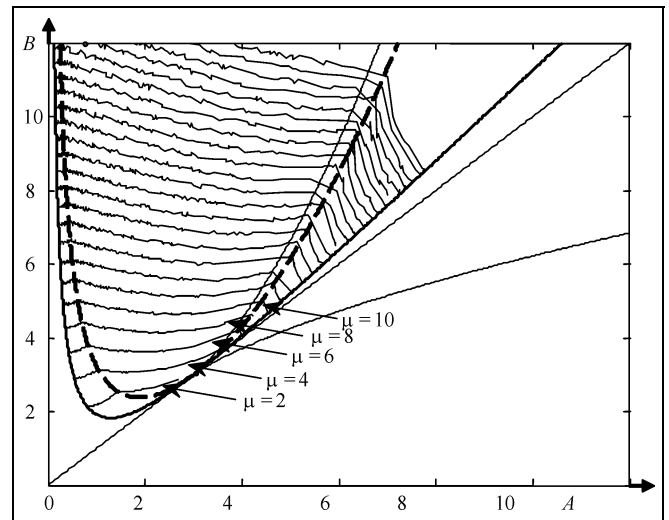


Рис. 4. Кривые равной обусловленности

где E — единичная матрица, для матрицы A сбалансированного представления регулярных систем, получаем, что в системе должна быть пара кратных ГСЧ ($\sigma_1 = \sigma_2$), что противоречит определению регулярных систем.

Заметим, что на внутренней границе распределения регулярных систем (кривая 2 на рис. 3) наблюдаются явные изломы кривых равной обусловленности.

Таким образом, положение точки с координатами $(A; B)$ регулярной системы на плоскости Вышнеградского позволяет оценить обусловленность матрицы A сбалансированного представления и определить соотношения знаков собственных чисел кросс-грамиана.

6. ПРИМЕРЫ РЕГУЛЯРНЫХ СИСТЕМ

Пример 1. Пассивная электрическая схема. Рассмотрим электрическую RC -цепь лестничного типа, схема которой приведена на рис. 5.

Входным сигналом цепи является ток i , выходным — напряжение u на конденсаторе C_1 . Известны значения пяти параметров цепи: $C_1 = 0,141$ Ф, $C_2 = 0,634$ Ф, $C_3 = 18,043$ Ф, $R_1 = 7,723$ Ом, $R_2 = 4,699$ Ом. Требуется

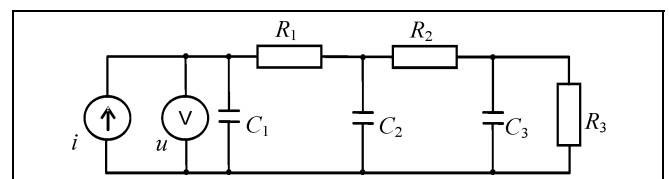


Рис. 5. Схема лестничной RC -цепи

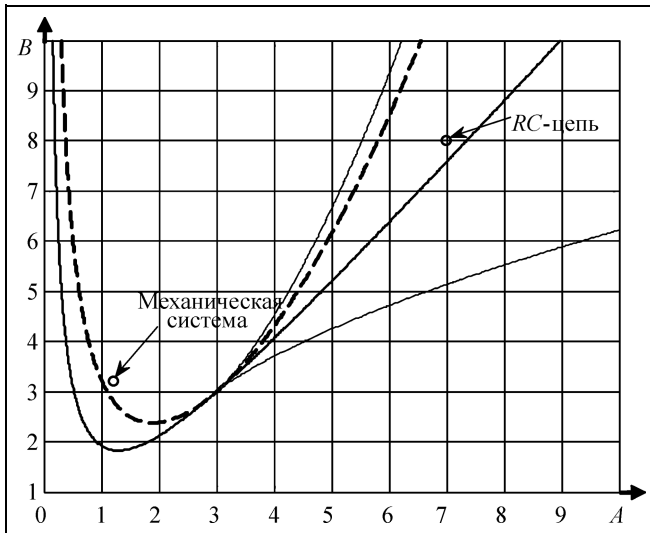


Рис. 6. Оценка параметров систем на плоскости Вышнеградского

определить, можно ли подбором значения сопротивления R_3 сделать эту систему регулярной.

Данная схема описывается следующей передаточной функцией:

$$W(p) = \frac{C_2 C_3 R_1 R_2 R_3 p^2 + (C_2 R_1 (R_2 + R_3) + C_3 R_3 (R_1 + R_2))p + R_1 + R_2 + R_3}{C_1 C_2 C_3 R_1 R_2 R_3 p^3 + k_6 p^2 + k_7 p + 1},$$

где $k_6 = C_1 C_2 R_1 (R_2 + R_3) + C_3 R_3 (C_1 (R_1 + R_2) + C_2 R_2)$, $k_7 = C_1 (R_1 + R_2 + R_3) + C_2 (R_2 + R_3) + C_3 R_2$.

Подстановка заданных значений параметров дает:

$$W(p) = \frac{415,13 R_3 p^2 + (229 R_3 + 23)p + 12,42 + R_3}{58,53 R_3 p^3 + (86 R_3 + 3,24)p^2 + (18,82 R_3 + 4,73)p + 1}.$$

Выписывая первое необходимое условие регулярности (6), получим уравнение для R_3 :

$$86 R_3^2 - 173,29 R_3 + 40,29 = 0.$$

Оно имеет два решения: $R_3 = 1,732$ и $R_3 = 0,286$.

Для первого из них ПФ принимает вид:

$$W(p) = \frac{7,078 p^2 + 4,131 p + 0,1393}{p^3 + 1,5 p^2 + 0,3673 p + 0,0098}.$$

При подстановке полученных коэффициентов ПФ в условие (7) получаем, что второе необходимое условие регулярности $D_2 = 0$ выполняется. Следовательно, система является регулярной, так как параметры системы удовлетворяют условиям (6) и (7) одновременно.

Приводя характеристический полином к форме Вышнеградского (8), находим значения коэффициентов A

и B : $A = 7$, $B = 8$. Положение соответствующей точки на плоскости Вышнеградского показано на рис. 6. Из графика видно, что точка, соответствующая исследуемой электрической цепи, лежит в области регулярных систем. Это означает, что для системы выполняется графическое необходимое условие регулярности.

Для окончательной проверки построим матрицу A сбалансированного представления системы:

$$A = \begin{bmatrix} -0,5 & 0,36 & -0,24 \\ 0,36 & -0,5 & 0,45 \\ -0,24 & 0,45 & -0,5 \end{bmatrix}.$$

Диагональные элементы матрицы A одинаковы, следовательно, система является регулярной. Проверка второго значения R_3 дала отрицательный результат.

Оценим знаки собственных чисел кросс-грамиана системы. Точка с координатами $(A; B)$ попала в область систем с одинаковыми знаками v_i . Действительно, прямые вычисления показывают, что значения v_i для данной цепи положительны: $v_1 = 5,704$, $v_2 = 1$, $v_3 = 0,3737$. Такое сочетание знаков означает, что ПФ системы можно представить в виде:

$$W(p) = \frac{r_1}{p - p_1} + \frac{r_2}{p - p_2} + \frac{r_3}{p - p_3},$$

где r_i — некоторые положительные числа. Следовательно, весовая функция будет иметь вид суммы трех затухающих экспонент с положительными коэффициентами перед ними, и переходные процессы в системе будут иметь монотонный характер. Этот вывод справедлив для любой регулярной пассивной RC - или RL -цепи.

Число обусловленности μ матрицы A в соответствии с построенными ранее кривыми равной обусловленности (см. рис. 4) составляет приблизительно 39. Это означает, что матрица сбалансированного представления системы достаточно хорошо обусловлена. Точное значение $\mu = 39,363$, рассчитанное в пакете Matlab, отличается примерно на 1 %.

Пример 2. Двухмассовая механическая система. Рассмотрим механическую систему, содержащую два тела с массами m_1 и m_2 , соединенных пружиной жесткости ξ . Это может быть упрощенная модель грузовика с прицепом (рис. 7).

Обозначим силу, прикладываемую к первому телу, F , отклонения масс m_1 и m_2 от начального положения x_1 и x_2 , а их скорости v_1 и v_2 соответственно. Тогда система

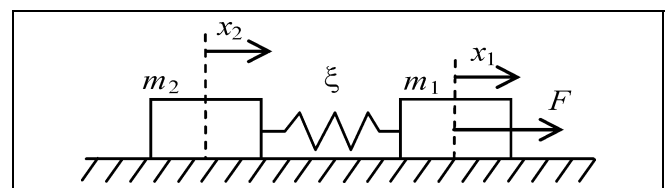


Рис. 7. Модель двухмассовой системы



может быть описана следующими дифференциальными уравнениями:

$$m_1 \ddot{x}_1 + \xi(x_1 - x_2) + d\dot{x}_1 = F,$$

$$m_2 \ddot{x}_2 - \xi(x_1 - x_2) + d\dot{x}_2 = 0,$$

где d — коэффициент демпфирования.

В качестве выходного сигнала выберем скорость v_1 первого тела. В этом случае порядок системы понижается до трех, и ПФ имеет вид:

$$W(p) = \frac{p^2 + \frac{d}{m_2}p + \frac{\xi}{m_2}}{p^3 + \frac{d(m_2 + m_1)}{m_1 m_2}p^2 + \frac{(d^2 + m_1 \xi + km_2)}{m_1 m_2}p + \frac{2d\xi}{m_1 m_2}}. \quad (13)$$

Выясним, при каких сочетаниях параметров ПФ (13) система будет регулярной. Для этого обратимся к первому необходимому условию регулярности. Выписывая условие (6) для ПФ (13), получаем:

$$3\alpha_0\beta_2 - \alpha_2\beta_0 = \frac{d\xi}{m_1 m_2} (5m_2 - m_1) = 0.$$

Отсюда следует, что массы должны отличаться в пять раз: $m_1 = 5m_2$. Пусть $m_1 = 0,03$ кг, тогда $m_2 = 0,006$ кг. При анализе второго условия (7) было установлено, что система будет регулярной при значениях параметров $\xi = 0,1$ Н/м, $d = 0,015$.

Подставив эти численные значения в ПФ (13), получим:

$$W(p) = \frac{p^2 + 2,498p + 15,63}{p^3 + 3p^2 + 20,01p + 15,63}.$$

Для проверки графического условия приведем характеристический полином к форме Вышнеградского (8) и вычислим значения коэффициентов A и B : $A = 1,2$, $B = 3,2$. Нанесем полученную точку на плоскость Вышнеградского (см. рис. 6). По расположению точки можно сказать, что для системы выполняется графическое необходимое условие регулярности. Построим матрицу A сбалансированного представления объекта:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0,56 & 0,51 \\ 0,56 & -1 & -4,14 \\ -0,51 & 4,14 & -1 \end{bmatrix}.$$

Диагональные элементы матрицы A одинаковы, следовательно, данная система является регулярной.

Оценим знаки собственных чисел кросс-грамиана системы. Точка с координатами (A ; B) на рис. 6 попала в область систем, у которых большее или меньшее собственное число кросс-грамиана отличается по знаку от двух остальных. Действительно, находя собственные значения кросс-грамиана, получаем: $v_1 = 0,483$, $v_2 = 0,045$, $v_3 = -0,028$.

Число обусловленности матрицы A в соответствии с построенными кривыми равной обусловленности (см. рис. 4) составило примерно пять. Точное значение числа обусловленности, рассчитанное в Matlab, несколько выше: $\mu = 5,315$. Это означает, что матрица сбалансированного представления хорошо обусловлена.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Исследован специальный тип линейных динамических систем — регулярные системы. Они характеризуются вдвое меньшим числом параметров по сравнению с линейными системами общего вида и допускают более простую структурную реализацию.

Установлены необходимые и достаточные условия регулярности систем третьего порядка в виде алгебраических соотношений между коэффициентами передаточной функции. Для получения графического условия регулярности применена плоскость Вышнеградского, на которой выделены области существования трех разновидностей регулярных систем, отвечающих различным сочетаниям знаков сингулярных чисел ганкелева оператора системы.

Показано, что границы этих областей представляют собой алгебраические кривые, и найдены аналитические уравнения этих кривых.

Исследована обусловленность системной матрицы сбалансированного представления регулярных объектов третьего порядка и построены линии равной обусловленности на плоскости Вышнеградского.

Полученные результаты могут быть полезны при анализе и синтезе механических, электрических и других динамических систем.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мироновский Л.А., Курмаев И.Р. Синтез трисингулярных динамических систем // Информационно-управляющие системы. — 2010. — № 6. — С. 77—85.
2. Ober R.J. Balanced parameterization of classes of linear systems // SIAM J. Control and Optimization. — 1991. — Vol. 29, N 6. — P. 1251—1287.
3. Мироновский Л.А. Линейные системы с кратными сингулярными числами // Автоматика и телемеханика. — 2009. — № 1. — С. 51—73.
4. Бесекерский В.А., Попов Е.П. Теория систем автоматического управления. — СПб.: Профессия, 2003. — 752 с.
5. Шенетов А.Г. Об оптимальных формах переходного процесса и амплитудно-частотной характеристики линейной динамической системы // Проблемы управления. — 2008. — № 3. — С. 30—36.
6. Фаддеев Д.К. Лекции по алгебре. — М.: Физматлит, 1984. — 416 с.

Статья представлена к публикации членом редколлегии В.Ю. Рутковским.

Мироновский Леонид Алексеевич — д-р техн. наук, профессор,
✉ miron@aanet.ru,

Соловьева Татьяна Николаевна — аспирант,
✉ famsol@yandex.ru,

Санкт-Петербургский государственный университет
аэрокосмического приборостроения, ☎ (812) 494-70-44.