

АЛГОРИТМ ПРОВЕРКИ ОГРАНИЧЕННОСТИ ЧИСЛА ТОЧЕК УПРАВЛЕНИЯ В ЭКЗЕМПЛЯРЕ БИЗНЕС-ПРОЦЕССА

А.М. Миронов, А.Г. Михеев, В.Е. Пятецкий

Рассмотрено поведение точек управления, перемещающихся по графу экземпляра бизнес-процесса, выполняющегося в компьютерной системе. Отмечено, что в современных системах управления бизнес-процессами в связи с ошибками проектирования бизнес-процессов могут возникать ситуации неограниченного возрастания числа точек управления, что приводит к неоправданно большой нагрузке на компьютерную систему. Во избежание таких ситуаций рассмотрена задача анализа схем бизнес-процессов и предложен алгоритм проверки ограниченности числа точек управления.

Ключевые слова: исполнимый бизнес-процесс, системы управления, точка управления, направленный граф.

ВВЕДЕНИЕ

Процессный подход [1–4] в организации управления предприятием в настоящее время один из наиболее перспективных. В соответствии с этим подходом предполагается, что деятельность предприятия представляется в виде множества бизнес-процессов. Он реализуется системами управления бизнес-процессами (СУБП), которые раздают задания исполнителям и контролируют их выполнение.

При автоматизации предприятий на основе процессного подхода предприятия получают серьезные дополнительные преимущества, однако появляются и проблемы, решения которых не дают традиционные теории. Примером такой проблемы служит ситуация неограниченного возрастания числа точек управления в экземпляре бизнес-процесса.

1. ПРОБЛЕМА НЕОГРАНИЧЕННОГО РОСТА ЧИСЛА ТОЧЕК УПРАВЛЕНИЯ В ЭКЗЕМПЛЯРЕ БИЗНЕС-ПРОЦЕССА

Возможные последовательности заданий бизнес-процесса определяются схемой в виде связного направленного графа. Рассматриваются графы, состоящие из узлов: «начало», «завершение пото-

ка», «действие», «исключающий шлюз», «параллельный шлюз».

Для бизнес-процесса можно создавать выполняющиеся экземпляры. Каждый выполняющийся экземпляр содержит граф бизнес-процесса, по которому перемещаются точки управления, представляющие собой указатели на активные узлы графа. Точки управления перемещаются только по ребрам графа и только в направлении ориентации ребра. Изначально, при создании экземпляра бизнес-процесса, активным узлом служит только узел «начало»: в него помещается единственная точка управления, которая тут же переходит по исходящему из этого узла ребру в следующий узел графа.

Узлы схемы можно разделить на два класса. К одному из них относятся узлы «действия», а к другому — все остальные узлы, которые называются маршрутными. Узлы «действия» содержат одно входящее и одно исходящее ребро. При исполнении экземпляра бизнес-процесса в компьютерной системе в момент прихода точки управления в узел «действие» определенному исполнителю направляется задание. После выполнения исполнителем задания точка управления перемещается по исходящему ребру в следующий узел графа. В маршрутных узлах происходит выбор ребра (ребер) дальнейшего движения точки (точек) управления.

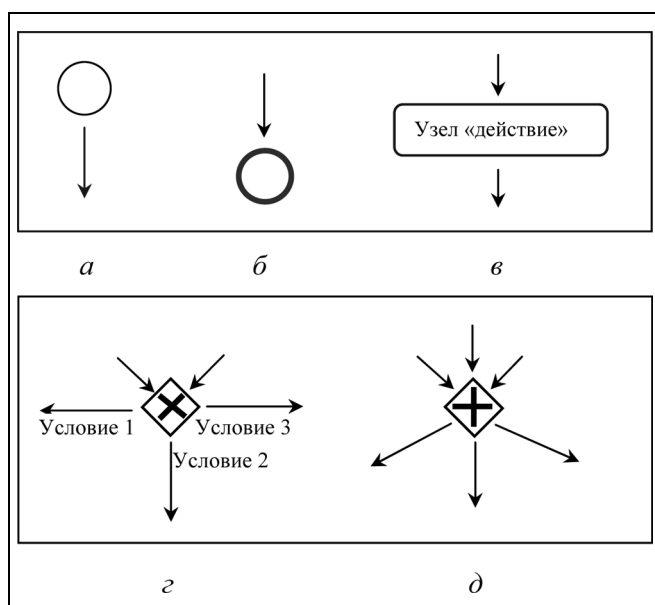


Рис. 1. Обозначения узлов: *a* — начало; *б* — завершение потока; *в* — действие; *г* — исключаяющий шлюз; *д* — параллельный шлюз

Маршрутный узел соответствует появлению, удалению, разветвлению/слиянию точек управления или выбору ребра (из нескольких присоединенных к узлу ребер), по которому точка управления переместится в следующий узел.

В выполняющемся экземпляре бизнес-процесса одновременно может быть несколько точек управления. Точка управления в маршрутном узле может разделиться на несколько точек управления, точки управления также могут ждать друг друга в другом маршрутном узле и далее слиться в одну точку управления.

Определим поведение рассматриваемых в настоящей статье типов узлов, а также приведем их графические изображения в соответствии с международным стандартом BPMN.

Узел «начало» соответствует точке начала исполнения бизнес-процесса. У него нет входящих ребер и есть только одно исходящее ребро. В момент запуска экземпляра бизнес-процесса в узел помещается точка управления, которая тут же выходит из него по исходящему ребру. В бизнес-процессе должен существовать единственный узел «начало». Обозначается «тонкой» окружностью (рис. 1, *a*).

Узел «завершение потока» должен иметь одно или более входящих ребер и ни одного исходящего. При попадании какой-либо точки управления в этот узел она удаляется. Экземпляр бизнес-процесса, в котором не осталось ни одной точки управления, считается завершившимся. Может су-

ществовать несколько узлов «завершение потока», но обязательно должен быть хотя бы один такой узел. Обозначается «жирной» окружностью (см. рис. 1, *б*).

Узел «действие» генерирует задание исполнителю, обозначается прямоугольником со скругленными углами, в центре которого пишется имя узла (рис. 1, *в*) и имеет одно входящее и одно исходящее ребро.

Узел «исключающий шлюз» может иметь несколько входящих и несколько исходящих ребер. Для каждой пришедшей в него точки управления выбирается, по какому из исходящих ребер она будет перемещена далее. Обозначается ромбом, в котором изображен «крестик» (рис. 1, *г*).

Узел «параллельный шлюз» обозначается ромбом, в котором изображен «плюс» (рис. 1, *д*). Может иметь несколько входящих и несколько исходящих ребер. Для каждого входящего ребра пришедшая по нему в параллельный шлюз точка управления ставится в очередь. Если для всех входящих ребер их очереди заполнены хотя бы одной точкой управления, то все точки управления, находящиеся на первой позиции очереди каждого входящего ребра, удаляются, а на каждом исходящем ребре генерируется точка управления.

При отсутствии ограничений на комбинации элементов на графе бизнес-процесса возможно появление экземпляров бизнес-процессов, в которых из-за ошибок проектирования число точек управления быстро возрастает с течением времени. Такие процессы могут создать запредельную нагрузку на систему, что приведет к прекращению ее нормальной работы.

На рис. 2 показан пример графа бизнес-процесса с быстро возрастающим числом точек управления. Во избежание такой ситуации на этапе проектирования для каждого определения бизнес-процесса устанавливается максимально возможное число точек управления в экземпляре бизнес-процесса. Если во время исполнения экземпляра оно будет превышено, то СУБП автоматически остановит выполнение данного экземпляра и даст сигнал администратору системы о возникнове-

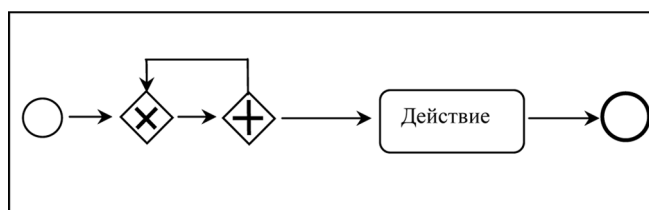


Рис. 2. Граф с быстро возрастающим числом точек управления

нии нештатной ситуации. Однако на этапе проектирования бизнес-процесса не всегда можно оценить максимальное число точек управления в любом его экземпляре, и экземпляр бизнес-процесса может быть «неправильно» остановлен системой. Далее, если система даже «правильно» остановила экземпляр бизнес-процесса, то ситуация на предприятии после остановки экземпляра бизнес-процесса может оказаться сложной, поскольку по заданиям этого экземпляра сотрудники совершили определенные действия. Возможно, эти действия требуют обязательного выполнения каких-то других действий в строго определенных интервалах времени, и их отсутствие может привести к убыткам и другим отрицательным последствиям.

Поэтому востребована задача разработки критерия, применяемого к бизнес-процессам на этапе их проектирования, который гарантирует, что для данного графа невозможна ситуация с бесконечно возрастающим числом точек управления.

2. АЛГОРИТМ ПОСТРОЕНИЯ КРИТЕРИЯ

1.1. Функционирование графа

Будем располагать точки управления на ребрах непосредственно перед узлами графа. Поставим в соответствие каждому узлу Q графа, не являющемуся узлом «начало», набор всех возможных операторов $op^{Q,m}(\cdot)$, которые изменяют число точек управления на входящих и выходящих из узла ребрах. Здесь $m = 1, \dots, L_Q$, где L_Q — число возможных операторов для узла Q . Если, например, Q — исключаяющий шлюз с одним входящим и двумя исходящими ребрами, то для него будет два оператора $op^{Q,m}(\cdot)$: первый из них будет удалять точку управления на входящем ребре и помещать ее на первое исходящее ребро, а второй — удалять ее на входящем ребре и помещать ее на второе исходящее ребро.

Рассмотрим множество операторов $op^{Q,m}(\cdot)$ для всех узлов графа. Оно соответствует всем возможным преобразованиям точек управления на входящих и исходящих ребрах всех узлов графа, поэтому перемещение точек управления по графу бизнес-процесса (функционирование графа) можно представить как последовательность выполненных операторов $op^{Q,m}(\cdot)$.

На каждом шаге i функционирования графа определим множество узлов, которые активны на этом шаге:

— если узел Q — параллельный шлюз, то он активен на шаге i , если для каждого ребра f , входя-

щего в узел Q , число точек управления на нем больше нуля;

— каждый из остальных узлов активен на шаге i , если существует ребро f , входящего в узел Q , для которого число точек управления на нем больше нуля.

Если узел Q на шаге i активен, то на этом шаге может быть выполнен оператор $op^{Q,m}(\cdot)$, в результате изменяется число точек управления на ребрах графа. Если узел Q на шаге i не активен, то ни один из операторов $op^{Q,m}(\cdot)$ для этого узла на шаге i выполнить нельзя, так как для его выполнения «не хватит» точек управления на входящих в него ребрах.

Поясним действие операторов $op^{Q,m}(\cdot)$ для различных типов узлов.

- Если узел Q является узлом-действием, то для него будет существовать единственный оператор $op^{Q,m}(\cdot)$, который удаляет точку управления на входящем ребре, и добавляет точку управления на исходящем ребре.
- Если узел Q — исключаяющий шлюз, то оператор $op^{Q,m}(\cdot)$ удаляет точку управления на одном из входящих ребер и добавляет ее на одно из исходящих ребер. Число операторов будет равно числу входящих ребер, умноженному на число исходящих ребер.
- Если узел Q — параллельный шлюз, то для него будет существовать единственный оператор $op^{Q,m}(\cdot)$, который удаляет точку управления на каждом входящем ребре и добавляет ее на каждое исходящее ребро.
- Если узел Q — завершение потока, то оператор $op^{Q,m}(\cdot)$ удаляет точку управления на одном из входящих ребер. Число операторов будет равно числу входящих ребер.

1.2. Алгоритм анализа множества точек управления

Пусть (f_1, \dots, f_n) — список всех ребер графа бизнес-процесса, первое в нем ребро, исходящее из начального узла.

На каждом шаге $i > 0$ функционирования графа каждому ребру f сопоставим число $CP_i(f)$, равное числу точек управления на ребре f . В начальный момент это число отлично от нуля только на ребре, выходящем из начального узла: для этого ребра $CP_0(f_1) = 1$.

Для каждого шага $i > 0$ обозначим вектор целых неотрицательных чисел:

$$CP_i = (CP_i(f_1), \dots, CP_i(f_n)). \quad (1)$$



Нетрудно видеть, что в силу определения поведения узлов графа, для каждого $i > 0$ векторы CP_i и CP_{i+1} связаны соотношениями вида

$$CP_{i+1} = CP_i + V. \quad (2)$$

Здесь знак «плюс» означает покомпонентное сложение, и $V = (v^1, \dots, v^n)$ целочисленный вектор, каждая компонента v^j которого определяется тем, как было изменено соответствующее множество $CP(f_j)$ на шаге i : для каждого $j = 1, \dots, n$

- $v^j = -1$, если значение $CP_i(f_j)$ было уменьшено на единицу (с ребра была удалена точка управления);
- $v^j = 1$, если значение $CP_i(f_j)$ было увеличено на единицу (на ребро была добавлена точка управления);
- $v^j = 0$, если на шаге i значение $CP_i(f_j)$ не изменилось.

Обозначим символом \mathbf{V} совокупность всех векторов V , которые могут быть вторыми слагаемыми в правых частях соотношений вида (2), т. е. \mathbf{V} представляет собой совокупность возможных изменений числа точек управления на ребрах графа, соответствующую применению всех операторов $op^{Q,m}(\cdot)$ для всех узлов графа.

Вследствие конечности числа узлов графа и конечности числа его ребер, число операторов $op^{Q,m}(\cdot)$ тоже конечно, следовательно, совокупность \mathbf{V} также будет состоять из конечного числа векторов.

Определим индуктивно совокупность \mathbf{CP} векторов целых неотрицательных чисел размерности n :

- $(1, 0, \dots, 0) \in \mathbf{CP}$;
- если $U \in \mathbf{CP}$, $V \in \mathbf{V}$ и все компоненты вектора $U + V$ неотрицательны, то $U + V \in \mathbf{CP}$.

Из данного определения следует, что множество \mathbf{CP} содержит все векторы вида (1).

Таким образом, если множество \mathbf{CP} конечно, то совокупность векторов вида (1) тоже конечна, т. е. число точек управления на ребрах графа ограничено.

Обозначим Z_∞^+ множество целых чисел, больших или равных нулю, к которому добавлен новый элемент ∞ . Мы будем рассматривать Z_∞^+ как линейно упорядоченное множество, в котором элемент ∞ является наибольшим и отношение порядка на остальных элементах совпадает с отношением порядка на целых числах.

Запись Z_∞^{+n} означает совокупность всех векторов длины n , компоненты которых являются эле-

ментами множества Z_∞^+ . Будем рассматривать Z_∞^+ как частично упорядоченное множество, порядок на котором определяется следующим образом:

$$(a^1, \dots, a^n) < (b^1, \dots, b^n) \Leftrightarrow a^1 \leq b^1, \dots, a^n \leq b^n, \\ \exists i, a^i < b^i,$$

где $(a^1, \dots, a^n), (b^1, \dots, b^n) \in Z_\infty^{+n}$, $1 \leq i \leq n$.

Будем считать, что элементы множества Z_∞^+ можно складывать с числами из $\{-1, 0, 1\}$: если $a \in Z_\infty^+$ и $b \in \{-1, 0, 1\}$, то запись $a + b$ означает:

- элемент ∞ , если $a = \infty$;
- обычную сумму a и b , если $a \neq \infty$.

Будем употреблять следующее обозначение: для каждого вектора $U \in Z_\infty^{+n}$ и каждого $i \in \{1, \dots, n\}$ запись U^i означает i -ю координату вектора U .

Для анализа ограниченности множества точек управления определим проверочный граф, который обозначим CP_∞ . Определим для графа метки узлов и ребер:

- для каждого узла X определим в качестве метки $|X|$ вектор из Z_∞^{+n} ;
- для каждого ребра E определим в качестве метки $|E|$ вектор из \mathbf{V} .

Если из узла X графа CP_∞ исходит ребро в узел Y , имеющее метку V , то будем обозначать этот факт записью $X \xrightarrow{V} Y$.

Граф CP_∞ определим индуктивно, т. е. множества его узлов и ребер будут задаваться путем описания процедуры их построения. В каждый момент построения этого графа каждый из его узлов будет считаться либо необработанным, либо обработанным. Необработанными узлами будем считать узлы, содержащиеся в специальном списке \mathbf{RN} .

Напомним, что узел Y какого-либо графа называется *достижимым* из узла X , если либо $X = Y$, либо существует путь из узла X в узел Y , т. е. последовательность (e_1, \dots, e_k) ребер этого графа такая, что из узла X выходит ребро e_1 , а в узел Y входит ребро e_k и если $k > 1$, то для каждого $i = 1, \dots, k - 1$ конец ребра e_i совпадает с началом ребра e_{i+1} . Если узел Y достижим из узла X , то этот факт мы будем обозначать записью $X \rightarrow Y$.

Граф CP_∞ строится следующим образом: Сначала множество узлов этого графа содержит лишь узел с меткой $(1, 0, \dots, 0)$, он называется *начальным узлом*, и в список необработанных узлов \mathbf{RN} входит лишь этот узел.

Затем итеративно выполняется последовательность действий, заключающаяся в том, что к уже

построенным узлам и ребрам добавляются новые узлы и ребра. Новая итерация данной последовательности происходит, только если список **RN** не пуст, в этом случае первый узел этого списка (обозначим его символом X) исключается из списка **RN** и выполняются следующие действия.

1. Если имеется не принадлежащий списку **RN** узел $Y \neq X$ такой, что $|X| = |Y|$, то все ребра, ведущие в узел X , перенаправляются в узел Y , и узел X удаляется.

Иначе для каждого $V \in \mathbf{V}$ такого, что $X + V \in Z_{\infty}^{+n}$ в проверочный граф добавляются новый узел Y с меткой $|X| + V$ и ребро из узла X в узел Y с меткой V и, кроме того, узел Y добавляется в конец списка необработанных узлов **RN**.

2. Если среди обработанных узлов существует пара Y_1, Y_2 такая, что $Y_1 \rightarrow Y_2$ и $|Y_1| < |Y_2|$, то у узла Y_2 изменяется метка. Новая метка $|Y_2|$ узла Y_2 определяется как

$$|Y_2|^i = \begin{cases} \infty, & \text{если } |Y_1|^i < |Y_2|^i \\ |Y_2|^i, & \text{если } |Y_1|^i = |Y_2|^i \end{cases}.$$

Далее соответствующие компоненты (на тех же позициях, на которых в векторе $|Y_2|$ находятся элементы ∞) изменяются на ∞ у меток всех узлов, достижимых из узла Y_2 .

Данное действие может выполняться несколько раз до тех пор, пока среди всех пар обработанных узлов проверочного графа будут существовать пары, для которых выполняется условие, сформулированное в п. 2.

Из описания алгоритма следует, что на каждом шаге его работы количество ребер, выходящих из каждого узла, не превосходит $|\mathbf{V}|$.

Лемма 1. *Если процесс построения графа CP_{∞} длится бесконечно долго, то граф CP_{∞} содержит бесконечный путь из начального узла такой, что все узлы, входящие в этот путь, различны.*

Доказательство. Из описания алгоритма построения графа CP_{∞} следует, что каждый его узел достижим из начального узла.

Если бы граф CP_{∞} был конечным, то алгоритм его построения завершал бы свою работу после конечного числа шагов, так как после последнего добавления обработанного узла к множеству узлов графа CP_{∞} список **RN** может только уменьшаться, и он уменьшается с каждой итерацией работы этого алгоритма.

Таким образом, граф CP_{∞} бесконечен, и каждый его узел достижим из начального узла. Обозначим этот начальный узел символом X_1 . Как было отмечено, из каж-

дого узла графа CP_{∞} (в частности, из узла X_1) выходит конечное число ребер.

Обозначим записью $\{Y_1, \dots, Y_k\}$ совокупность тех узлов графа CP_{∞} , которые являются концами ребер, выходящих из узла X_1 и не совпадают с ним.

Удалим из графа CP_{∞} все ребра, концами которых является X_1 . Получившийся граф обозначим той же записью CP_{∞} . Нетрудно видеть, что каждый узел графа CP_{∞} , отличный от узла X_1 , достижим из некоторого узла Y_i из упомянутой совокупности.

Для каждого $i = 1, \dots, k$ обозначим через $CP_{\infty}(Y_i)$ подграф графа CP_{∞} , состоящий из тех узлов, которые достижимы из узла Y_i и всех ребер, которые выходят из этих узлов.

Нетрудно видеть, что узел X_1 не входит ни в один из этих графов. Если бы все графы $CP_{\infty}(X_i), i = 1, \dots, k$, были конечны, то граф CP_{∞} тоже был бы конечен, так как каждый из его узлов либо начальный, либо принадлежит объединению множеств узлов графов $CP_{\infty}(X_i), i = 1, \dots, k$.

Поэтому существует узел (обозначим его X_2) графа CP_{∞} такой, что существует ребро из узла X_1 в узел X_2 , и граф $CP_{\infty}(X_2)$ бесконечен и не содержит узла X_1 .

Граф $CP_{\infty}(X_2)$ обладает теми же свойствами, что и исходный граф CP_{∞} : он бесконечен, и, кроме того, если считать узел X_2 начальным узлом графа $CP_{\infty}(X_2)$, то можно утверждать, что каждый узел графа $CP_{\infty}(X_2)$ достижим из начального узла этого графа, и из каждого узла графа $CP_{\infty}(X_2)$ выходит лишь конечное число ребер.

Поэтому аналогичными рассуждениями можно установить, что существует узел (обозначим его X_3), графа $CP_{\infty}(X_2)$, который не совпадает с узлом X_2 (а также с узлом X_1), такой, что существует ребро из его начального узла X_2 в узел X_3 , и граф $CP_{\infty}(X_3)$ (узлами которого являются узлы графа CP_{∞} , достижимые из узла X_3), бесконечен и из каждого его узла выходит лишь конечное число ребер.

Мы можем продолжать данные рассуждения неограниченно: можно построить бесконечную последовательность различных узлов X_1, X_2, X_3, \dots такую, что для каждого $k > 1$ существует ребро из узла X_{k-1} в узел X_k и граф $CP_{\infty}(X_k)$ (узлами которого являются узлы графа CP_{∞} , достижимые из узла X_k) бесконечен и из каждого его узла выходит лишь конечное число ребер.

Последовательность X_1, X_2, X_3, \dots является искомым бесконечным путем из начального узла графа CP_{∞} , причем этот путь состоит из различных узлов. ♦

Теорема 1. *Описанный алгоритм построения графа CP_{∞} всегда завершает свою работу после конечного числа шагов.*

Доказательство. Если данный алгоритм не завершает свою работу, то, согласно лемме 1, граф CP_{∞} содержит бесконечный путь из начального узла, причем



этот путь состоит из различных узлов. Обозначим последовательность узлов, из которых состоит этот путь,

$$X_1, X_2, X_3, \dots \quad (3)$$

Определим последовательность индексов i_1, i_2, i_3, \dots , обладающую свойством:

$$i_1 < i_2 < i_3 \dots \text{ и } |X_{i_1}|^1 \leq |X_{i_2}|^1 \leq |X_{i_3}|^1 \leq \dots \quad (4)$$

Среди элементов $\{|X_i|^1 \geq 1\}$ существует наименьший элемент, обозначим индекс этого элемента через i_1 . Далее, среди элементов $\{|X_i|^1 | i \geq i_1\}$ существует наименьший элемент, обозначим индекс этого элемента через i_2 . Согласно определению элементов $|X_{i_1}|^1$ и $|X_{i_2}|^1$, имеет место неравенство $|X_{i_1}|^1 \leq |X_{i_2}|^1$.

Продолжая этот процесс (т. е. определяя аналогичным образом элементы $|X_{i_3}|^1$, и т. д.), получим искомую последовательность индексов $i_1 < i_2 < i_3 \dots$, обладающую свойством (4).

Удалим из исходной последовательности (3) члены с индексами, не принадлежащими последовательности $i_1 < i_2 < i_3 \dots$, и обозначим получившуюся последовательность той же записью (3). Согласно построению, первые координаты элементов (3) образуют неубывающую последовательность.

Действуя аналогичным образом, строим подпоследовательность последовательности (3), в которой вторые координаты образуют неубывающую последовательность.

Обозначим получившуюся последовательность той же записью (3). Таким образом, в получившейся последовательности (3) уже и первые и вторые координаты образуют неубывающую последовательность.

Продолжая далее аналогичным образом, можно построить такую последовательность (3), в которой все n координат образуют неубывающую последовательность, т. е. верна цепочка неравенств

$$|X_1| \leq |X_2| \leq |X_3| \leq \dots \quad (5)$$

Поскольку по предположению все векторы, входящие в исходный бесконечный путь, различные, то, следовательно, все неравенства в цепочке (5), строгие, т. е.

$$|X_1| < |X_2| < |X_3| \dots \quad (6)$$

Кроме того, поскольку последовательность X_1, X_2, X_3, \dots является подпоследовательностью исходного бесконечного пути, то

$$X_1 \rightarrow X_2 \rightarrow X_3 \dots$$

Для каждого $i \geq 1$ существует такой момент построения графа CP_∞ , на котором узлы X_i и X_{i+1} станут обрабатываемыми, и метки этих узлов не будут изменяться в последующие моменты построения графа CP_∞ .

Пусть $i \geq 1$ и метка $|X_i|$ имеет вид $(|X_i|^1, \dots, |X_i|^n)$. Согласно правилам построения графа CP_∞ , метки $|X_i|$ и $|X_{i+1}|$ будут обладать свойством:

$$\forall k \in \{1, \dots, n\} |X_i|^k = |X_{i+1}|^k \text{ или } |X_{i+1}|^k = \infty.$$

Поэтому для каждого $k \in \{1, \dots, n\}$ последовательность $|X_1|^k, |X_2|^k, |X_3|^k \dots$ обладает свойством: либо все ее элементы равны друг другу, либо, начиная с некоторого номера, ее элементы равны ∞ .

Следовательно, начиная с некоторого номера все члены последовательности $|X_1|, |X_2|, |X_3|, \dots$ равны друг другу. Но это противоречит цепочке строгих неравенств (6).

Таким образом, наше исходное предположение о том, что алгоритм построения графа CP_∞ может не завершать свою работу, неверное. ♦

Лемма 2. Для каждого ребра $X \rightarrow Y$ графа CP_∞ и каждого $i \in \{1, \dots, n\}$ $|Y|^i = |X|^i + V^i$ или $|Y|^i = \infty$ и

$$|X|^i = \infty \Rightarrow |Y|^i = \infty. \quad (7)$$

Доказательство. Лемма доказывается индукцией по построению графа CP_∞ .

В начальный момент граф CP_∞ не имеет ребер, поэтому утверждение леммы для него справедливо.

Если ребро $X \xrightarrow{V} Y$ было добавлено к графу CP_∞ в текущий момент на основании п. 1 в описании алгоритма построения графа CP_∞ , то свойство (7) будет верно по определению метки $|Y|$. Если в текущий момент изменяются метки начала или конца $X \rightarrow Y$ в соответствии с п. 2 в описании алгоритма построения графа CP_∞ , то:

— если при этом изменяется метка $|X|$, то, поскольку узел Y достижим из узла X , то, согласно п. 2, $|Y|$ изменится в тех же компонентах (они заменяются на ∞), следовательно, свойство (7) будет верно;

— если же при этом изменяется лишь метка $|Y|$ (которая может изменяться лишь путем замены некоторых ее компонентов на ∞), то свойство (7) будет верно по очевидным причинам. ♦

Пусть X — произвольный узел графа. Обозначим: $U(X)$ — множество, состоящее из всех векторов $U \in \mathbf{CP}$, обладающих свойством $\forall i \in \{1, \dots, n\} |X|^i \neq \infty \Rightarrow U^i = |X|^i$; для каждого целого числа $k \geq 1$ $U(X, k)$ — множество, состоящее из всех векторов $U \in U(X)$, обладающих свойством:

$\forall i \in \{1, \dots, n\} |X|^i = \infty \Rightarrow U^i > k$; для каждой пары U, U' векторов из множества \mathbf{CP} запись $U \rightarrow U'$ означает, что либо $U = U'$, либо существует последовательность V_1, \dots, V_m векторов из \mathbf{V} такая, что

$$\begin{aligned} U_1 + V_1 &\in \mathbf{CP} \\ (U_1 + V_1) + V_2 &\in \mathbf{CP} \\ \dots \\ (((U_1 + V_1) + V_2) + \dots + V_{m-1}) &\in \mathbf{CP} \\ (((U_1 + V_1) + V_2) + \dots + V_m) &= U'. \end{aligned}$$

Лемма 3. Для каждого узла X графа CP_∞ множество $U(X)$ непусто, и для каждого $U \in U(X)$ и каждого $k \geq 1$ существует вектор $U' \in U(X, k)$ такой, что $U \rightarrow U'$.

Доказательство. Докажем лемму индукцией по построению графа CP_∞ . В начальный момент граф CP_∞ содержит единственный узел X с меткой $(1, 0, \dots, 0)$. В данном случае $U(X) = \{X\}$.

Пусть в некоторый момент построения графа CP_∞ утверждение леммы было верно для каждого узла X этого графа, который был добавлен до этого момента.

Докажем, что в этом случае утверждение леммы также будет верно для каждого узла этого графа после выполнения в текущий момент действий, указанных в п. 1 или 2 в описании алгоритма построения графа CP_∞ .

1. Если в текущий момент к графу CP_∞ был добавлен узел Y в соответствии с п. 1 в описании алгоритма построения этого графа, т. е. $|Y| = |X| + V$, где X обладает свойством, изложенным в формулировке леммы, и $V \in \mathbf{V}$, то нетрудно видеть, что

$$\{U + V | U \in U(X)\} = U(Y),$$

$$\forall k \geq 1 \{U + V | U \in U(X, k + 1)\} \subseteq U(X, k),$$

откуда следует, что свойство в формулировке леммы 3 будет верно также и для узла Y .

2. Пусть в текущий момент:

— среди обработанных узлов существует пара Y_1, Y_2 удовлетворяющая условию из п. 2 в описании алгоритма построения графа CP_∞ , т. е. узел Y_2 достижим из узла Y_1 и $|Y_1| < |Y_2|$;

— для каждого узла Y , достижимого из узла Y_2 , его метка заменяется на метку $|Y|$, где $\forall i \in \{1, \dots, n\}$

$$|Y|^i = \begin{cases} \infty, & \text{если } |Y_1|^i < |Y_2|^i, \\ |Y_1|^i, & \text{если } |Y_1|^i = |Y_2|^i. \end{cases} \quad (8)$$

Докажем, что тогда утверждение леммы будет верно также и для новой метки $|Y|$ узла Y .

Пусть $Y_1 = X_0 \xrightarrow{V_1} X_1 \xrightarrow{V_2} \dots \xrightarrow{V_p} X_p = Y_2$ — путь из узла Y_1 в узел Y_2 .

Обозначим $V = V_1 + \dots + V_p$. Из леммы 2 следует, что $\forall i \in \{1, \dots, n\}$

$$|Y_2|^i = |Y_1|^i + V^i \text{ или } |Y_2|^i = \infty, \\ |Y_1|^i = \infty \Rightarrow |Y_2|^i = \infty. \quad (9)$$

Из неравенства $|Y_1| < |Y_2|$ и соотношения (9) следует, что для каждого $i \in \{1, \dots, n\}$:

— если $|Y_1|^i < |Y_2|^i < \infty$, то $V_i = 0$,

— если $|Y_1|^i < |Y_2|^i < \infty$, то $V_i > 0$.

По индуктивному предположению, для узла X_0 верно утверждение леммы 3. В частности, существуют вектор $U_0 \in U(X_0)$ и вектор $U'_0 \in U(X_0, 1)$ такой, что $U_0 \rightarrow U'_0$.

Поскольку отрицательные компоненты вектора V_1 равны -1 , то из $U'_0 \in U(X_0, 1)$ следует, что $U_1 = U'_0 + V_1 \in \mathbf{CP}$.

Поскольку $\forall i \in \{1, \dots, n\} |X|^i \neq \infty$ следует, что $|X_0|^i \neq \infty$ и $|X_1|^i = |X_0|^i + |V_1|^i = U'_0{}^i + V_1^i = (U'_0)^i + V_1^i = U_1^i$, то, следовательно, $U_1 \in U(X_1)$.

Аналогичным образом устанавливается существование векторов U_2, \dots, U_p свойствами: $\forall j \in \{2, \dots, p\} U_j \in U(X_j)$; $\forall i \in \{1, \dots, n\}$ из $|X_j|^i \neq \infty$ следует, что $|X_{j-1}|^i \neq \infty$ и $|X_j|^i = |X_{j-1}|^i + V_j^i = U_{j-1}^i + V_j^i = U_j^i$.

Из приведенных соотношений следует, что введенные векторы U_0 и U_p обладают свойствами (напомним, что $X_0 = Y_1$ и $X_p = Y_2$):

$$U_0 \in U(Y_1), \quad U_p \in U(Y_2); \quad U_0 \rightarrow U_p.$$

Обозначим символом m наибольшую из компонент вектора U_0 . По предположению, для узла Y_2 справедливо утверждение леммы 3, в частности, существует вектор $U' \in U(Y_2, m)$ такой, что $U_p \rightarrow U'$. Из этого соотношения и из того, что $U_0 \rightarrow U_p$ следует соотношение $U_0 \rightarrow U'$.

Заметим, что $U_0 < U'$. Действительно, для каждого $i \in \{1, \dots, n\}$:

— если $|Y_2|^i = \infty$ то из $U' \in U(Y_2, m)$ следует, что $(U')^i > m$, однако $U_0^i \leq m$;

— если $|Y_2|^i \neq \infty$, то $|Y_1|^i \neq \infty$, и так как $|Y_1| < |Y_2|$, то $U_0^i = |Y_1|^i \leq |Y_2|^i = (U')^i$.

Из соотношений $U_0 \rightarrow U'$ и $U_0 < U'$ следует, что существует вектор $V \in Z^{+n}$ такой, что $U' = U_0 + V$. Отсюда несложно вывести, что для каждого вектора $Z \in \mathbf{CP}$ такого, что $U_0 \leq Z$, верно соотношение $Z \rightarrow Z + V$. Следовательно, для каждого $k \geq 1$ вектор $U_0 + kV$ принадлежит множеству \mathbf{CP} , и $U_0 \rightarrow U_0 + kV$.

При достаточно больших значениях k :

— компоненты вектора $U_0 + kV$, соответствующие таким индексам i , для которых $V^i > 0$, могут быть сделаны сколь угодно большими;

— компоненты вектора $U_0 + kV$, соответствующие таким индексам i , для которых $V^i = 0$, при этом останутся такими же как у вектора U_0 .

Согласно определению новой метки $|Y_2|'$ узла Y_2 (см. соотношение (8)), отсюда следует, что после замены метки узла Y_2 с $|Y_2|$ на $|Y_2|'$ граф с новой меткой узла Y_2 будет обладать свойством, изложенным в формулировке леммы 3.

Аналогичным образом устанавливается, что после замены меток согласно п. 2 у всех узлов, достижимых из узла Y_2 , граф с новыми метками этих узлов будет обладать свойством, изложенным в формулировке леммы 3. ♦



Теорема 2. Для каждого $i \in \{1, \dots, n\}$ множество CP^i , состоящее из i -х координат векторов из множества CP , является неограниченным тогда и только тогда, когда существует узел $X \in CP_\infty$ такой, что его метка $|X|^i = \infty$.

Доказательство. Пусть узел X таков, что для некоторого индекса $i \in \{1, \dots, n\}$ верно соотношение $|X|^i = \infty$. Согласно лемме 3, множество $U(X)$ непусто. Выберем произвольный вектор $U_0 \in U(X)$. По лемме 3, существует вектор $U_1 \in U(X, U_0^i)$. По определению множеств вида $U(X, k)$, имеет место неравенство $U_1^i > U_0^i$. Далее, по лемме 3, существует вектор $U_2 \in U(X, U_1^i)$. По определению множеств вида $U(X, k)$, имеет место неравенство $U_2^i > U_1^i$. Продолжая этот процесс неограниченно, мы получим последовательность векторов U_0, U_1, U_2, \dots такую, что все элементы последовательности $|U_0|^i, |U_1|^i, |U_2|^i, \dots$ различны, т. е. мы нашли бесконечное подмножество в множестве CP^i . Таким образом, множество CP^i бесконечно.

Если же индекс $i \in \{1, \dots, n\}$ таков, что для каждого узла X графа CP_∞ верно неравенство $|X|^i \neq \infty$, то из алгоритма построения графа CP_∞ непосредственно вытекает, что имеет место равенство множеств

$$\{U^i | U \in CP\} = \{X^i | X \in CP_\infty\}.$$

Поскольку граф CP_∞ конечен, то множество $\{X^i | X \in CP_\infty\}$ конечно, и, следовательно, множество $\{U^i | U \in CP\}$ тоже конечно, что и требовалось доказать. ♦

Следовательно, критерий можно сформулировать таким образом: если ни один вектор из множества $\{X | X \in CP_\infty\}$ не содержит символа ∞ , то число точек управления при любом варианте функционирования исходного графа будет ограничено, а если для некоторого индекса $i \in \{1, \dots, n\}$ в графе CP_∞ имеется узел X , такой, что $|X|^i = \infty$, то не исключен вариант функционирования исходного графа, когда число точек управления на ребре, соответствующем индексу i , будет неограниченно возрастать.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей статье приведен пример решения проблемы неограниченного возрастания числа точек управления в экземпляре бизнес-процесса. Однако при автоматизации предприятий на основе процессного подхода возникают и другие проблемы, например, связанные с бесконечными циклами на графе бизнес-процесса или рекурсивными вызовами подпроцессов. Авторы планируют исследовать эти проблемы в последующих работах.

Изложенный в настоящей статье алгоритм был применен на практике в программном обеспечении с открытым кодом [5], которое доступно на международном портале разработчиков свободного программного обеспечения по адресу <http://sourceforge.net/projects/runawfe>.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Калянов Г.Н.* Моделирование, анализ, реорганизация и автоматизация бизнес-процессов. — М.: Финансы и статистика, 2006. — 240 с.
2. *Елиферов В.Г., Репин В.В.* Бизнес-процессы: Регламентация и управление. — М.: Инфра-М, 2005. — 319 с.
3. *Kouloropoulos T.* The Workflow Imperative. — N.-Y.: John Wiley & Sons, Inc., 1995.
4. *Михеев А.Г., Орлов М.В., Пятецкий В.Е.* Комплексный подход к процессному управлению предприятием // Автоматизация в промышленности. — 2013. — № 1. — С. 65–68.
5. *Михеев А.Г., Орлов М.В.* Система управления бизнес-процессами и административными регламентами // Программные продукты и системы. — 2011. — № 3. — С. 126–130.

Статья представлена к публикации членом редколлегии *Ф.Т. Алескеровым*.

Миронов Андрей Михайлович — канд. физ.-мат. наук, ст. науч. сотрудник, Институт проблем информатики РАН, г. Москва, ☎ (495) 841-87-11, ✉ amironov66@gmail.com,

Михеев Андрей Геннадьевич — канд. физ.-мат. наук, доцент, Национальный технологический университет МИСиС, г. Москва, ✉ andrmikheev@gmail.com,

Пятецкий Валерий Ефимович — д-р техн. наук, зав. кафедрой, Национальный технологический университет МИСиС, г. Москва.

Содержание сборника «Управление большими системами», 2014, вып. 53

- ✓ **Беляева А.В.** Учет пространственных факторов в массовой оценке объектов недвижимости: сравнение эффективности различных методов. — С. 6.
- ✓ **Иванов Н.Н.** Аналитико-имитационное моделирование обобщенных стохастических сетевых графиков. — С. 27.
- ✓ **Соловьев А.И.** Декомпозиция задачи оптимального потребления на дискретном рынке. — С. 45.
- ✓ **Мишуров П.Н.** Повышение точности динамической оптимизации вагонопотоков на основе использования расчетных периодов переменной длительности. — С. 58.
- ✓ **Белов Р.В., Казанин Д.К., Огородников К.О.** Методы коррекции инерциальных оценок координат при управлении группой подвижных объектов. — С. 76.

Тексты статей доступны на сайте <http://ubs.mtas.ru/>

