УДК 517.977.56

НЕОБХОДИМЫЕ УСЛОВИЯ ОПТИМАЛЬНОСТИ ОСОБЫХ УПРАВЛЕНИЙ В ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ДИСКРЕТНО-НЕПРЕРЫВНОЙ СИСТЕМОЙ[1]

Р.О. Масталиев

Для задач, описываемых системой разностных и интегро-дифференциальных уравнений типа Вольтерра, получено необходимое условие оптимальности в форме принципа максимума Понтрягина. Исследован особый в смысле принципа максимума Понтрягина случай, для которого выведено общее необходимое условие оптимальности управлений.

Ключевые слова: разностные и интегро-дифференциальные уравнения типа Вольтерра, ступенчатая задача, необходимое условие, оптимальность, принцип максимума, особое управление.

ВВЕДЕНИЕ

Многие встречающиеся на практике процессы носят ступенчатый характер и встречаются в задачах управления химико-технологическими процессами [1, 2], автоматизированными производственными системами конвейерного типа [3, *с. 28—37*], в задачах оценки качества состояния воды в бассейне реки в зависимости от выбросов промышленными предприятиями загрязняющих веществ [4], примерами могут служить процессы роста растений [5, *с. 88—96*], динамика шагающего аппарата [6—8] и др.

Для моделирования систем, в которых протекают ступенчатые процессы, часто применяются интегральные уравнения или же их разностные аналоги (см., например, работы [6—12] и др.). В работах [13—18] изучены задачи оптимального управления, описываемые интегральными и разностными уравнениями типа Вольтерра, доказаны необходимые условия оптимальности, найдены условия управляемости и др.

Настоящая работа посвящена исследованию особых в смысле принципа максимума Понтрягина управлений задач оптимального управления, описываемых разностными и интегро-дифференциальными уравнениями типа Вольтерра.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим задачу о минимуме функционала

$$S(u, v) = \varphi(x(t_1)) + \phi(y(t_2)) \tag{1.1}$$

при ограничениях

$$x(t+1) = \sum_{\tau = t_0}^{t} f(t, \tau, x(\tau), u(\tau)),$$

$$t \in T_1 = \{t_0, t_0 + 1, t_0 + 2, ..., t_1 - 1\},$$

$$x(t_0) = x_0, \tag{1.2}$$

$$\dot{y}(t) = \int_{t_1}^{t} g(t, \tau, y(\tau), v(\tau))d\tau, \quad t \in T_2 = [t_1, t_2],$$

$$y(t_1) = G(x(t_1)).$$

Здесь t_0, t_1, t_2, x_0 — заданы, причем разность $t_1 - t_0$ — натуральное число; $\varphi(x)$ и $\phi(x)$ — заданные, дважды непрерывно дифференцируемые скалярные функции; $f(t, \tau, x, u)$, $(g(t, \tau, y, v))$ — заданная n (m)-мерная вектор-функция, непрерывная по совокупности переменных вместе с частными производными по $x(y)$ до второго порядка включительно; $G(x)$ — заданная, дважды непрерывно дифференцируемая m-мерная вектор-функция; $u(t)$ — r-мерный вектор управляющих воздействий со значениями из

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Фонда развития науки при Президенте Азербайджанской Республики (грант № EIF/GAM-2-2013-2(8)-25/06/1).

заданного непустого и ограниченного множества U; $v(t)$ — r-мерный кусочно-непрерывный на отрезке T_2 вектор управляющих воздействий со значениями из заданного непустого и ограниченного множества V, т. е.

$$u(t) \in U \subset R^r, \quad t \in T_1,$$

$$v(t) \in V \subset R^q, \quad t \in T_2. \qquad (1.3)$$

Пару $(u(t), v(t))$ с вышеприведенными свойствами назовем допустимым управлением, а соответствующий процесс $(u(t), v(t), x(t), y(t))$ — допустимым процессом.

Наша цель состоит в исследовании случая вырождения принципа максимума Понтрягина (особого случая [19]) в рассматриваемой задаче.

2. ФОРМУЛА ПРИРАЩЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА КРИТЕРИЯ КАЧЕСТВА

Считая $(u^o(t), v^o(t), x^o(t), y^o(t))$ оптимальным процессом, обозначим через $(\bar u(t) = u^o(t) + \Delta u(t) \in U$, $\bar v(t) = v^o(t) + \Delta v(t) \in V$, $\bar x(t) = x^o(t) + \Delta x(t)$, $\bar y(t) = y^o(t) + \Delta y(t))$ произвольный допустимый процесс и запишем формулу для приращения функционала:

$$\Delta S(u^o, v^o) = S(\bar u, \bar v) - S(u^o, v^o) =$$
$$= \varphi(\bar x(t_1)) - \varphi(x^o(t_1)) + \phi(\bar y(t_2)) - \phi(y^o(t_2)). \qquad (2.1)$$

Ясно, что приращение $(\Delta x(t), \Delta y(t))$ траектории $(x^o(t), y^o(t))$ удовлетворяет системе отношений

$$\Delta x(t+1) = \sum_{\tau = t_0}^{t} [f(t, \tau, \bar x(\tau), \bar u(\tau)) -$$
$$- f(t, \tau, x^o(\tau), u^o(\tau))], \quad t \in T_1, \qquad (2.2)$$

$$\Delta x(t_0) = 0, \qquad (2.3)$$

$$\Delta \dot y(t) = \int_{t_1}^{t} [g(t, \tau, \bar y(\tau), \bar v(\tau)) - g(t, \tau, y^o(\tau), v^o(\tau))] d\tau,$$
$$t \in T_2, \qquad (2.4)$$

$$\Delta y(t_1) = G(\bar x(t_1)) - G(x^o(t_1)). \qquad (2.5)$$

Обозначим через $(\psi(t), p(t))$ пока неизвестную $(n + m)$-мерную вектор-функцию.

Умножая обе части соотношений (2.2) и (2.4) соответственно на $\psi(t)$ и $p(t)$ скалярно, затем соответственно суммируя и интегрируя полученные тождества по множествам T_1 и T_2, получаем:

$$\sum_{t = t_0}^{t_1 - 1} \psi(t) \Delta x(t+1) = \sum_{t = t_0}^{t_1 - 1} \sum_{\tau = t}^{t_1 - 1} \psi(\tau)[f(\tau, t, \bar x(t), \bar u(t)) -$$
$$- f(\tau, t, x^o(t), u^o(t))], \qquad (2.6)$$

$$\int_{t_1}^{t_2} p(t) \Delta \dot y(t) dt = \int_{t_1}^{t_2} \int_{t}^{t_2} p(\tau)[g(\tau, t, \bar y(t), \bar v(t)) -$$
$$- g(\tau, t, y^o(t), v^o(t))] d\tau dt. \qquad (2.7)$$

Ясно что,

$$\sum_{t = t_0}^{t_1 - 1} \psi(t) \Delta x(t+1) =$$
$$= \psi(t_1 - 1) \Delta x(t_1) + \sum_{t = t_0}^{t_1 - 1} \psi(t-1) \Delta x(t),$$

$$\int_{t_1}^{t_2} p(t) \Delta \dot y(t) dt =$$
$$= p(t_2) \Delta y(t_2) - p(t_1) \Delta y(t_1) - \int_{t_1}^{t_2} \dot p(t) \Delta y(t) dt.$$

Отсюда с учетом выражения (2.5)

$$\int_{t_1}^{t_2} p(t) \Delta \dot y(t) dt = p(t_2) \Delta y(t_2) - p(t_1)(G(\bar x(t_1)) -$$
$$- G(x^o(t_1))) - \int_{t_1}^{t_2} \dot p(t) \Delta y(t) dt.$$

Принимая во внимания эти тождества, формула приращения (2.1) записывается в виде

$$\Delta S(u^o, v^o) = \varphi(\bar x(t_1)) - \varphi(x^o(t_1)) + \phi(\bar y(t_2)) -$$
$$- \phi(y^o(t_2)) + \psi(t_1 - 1) \Delta x(t_1) + \sum_{t = t_0}^{t_1 - 1} \psi(t-1) \Delta x(t) -$$
$$- \sum_{t = t_0}^{t_1 - 1} \sum_{\tau = t}^{t_1 - 1} \psi(\tau)[f(\tau, t, \bar x(t), \bar u(t)) - f(\tau, t, x^o(t), u^o(t))] +$$
$$+ p(t_2) \Delta y(t_2) - p(t_1)(G(\bar x(t_1)) - G(x^o(t_1))) -$$
$$- \int_{t_1}^{t_2} \dot p(t) \Delta y(t) dt - \int_{t_1}^{t_2} \int_{t}^{t_2} p(\tau)[g(\tau, t, \bar y(t), \bar v(t)) -$$
$$- g(\tau, t, y^o(t), v^o(t))] d\tau dt. \qquad (2.8)$$

Введем обозначения

$$H(t, x(t), u(t), \psi(t)) = \sum_{\tau = t}^{t_1 - 1} \psi'(\tau) f(\tau, t, x, u),$$

$$M(t, y(t), v(t), p(t)) = \int_{t}^{t_2} p'(\tau) g(\tau, t, y, v) d\tau,$$

$$N(x) = p'(t_1 - 1) G(x),$$

где «штрих» — знак транспонирования.

Тогда формула приращения (2.8) представляется в виде

$$\Delta S(u^o, v^o) = \varphi(\bar{x}(t_1)) - \varphi(x^o(t_1)) + \phi(\bar{y}(t_2)) -$$
$$- \phi(y^o(t_2)) + \psi(t_1 - 1)\Delta x(t_1) + \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \psi(t-1)\Delta x(t) -$$
$$- \sum_{t=t_0}^{t_1-1} [H(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t), \psi(t)) - H(t, x^o(t), u^o(t), \psi(t))] +$$
$$+ p(t_2)\Delta y(t_2) - (N(\bar{x}(t_1)) - N(x^o(t_1))) -$$
$$- \int_{t_1}^{t_2} \dot{p}(t)\Delta y(t)dt - \int_{t_1}^{t_2} [M(t, \bar{y}(t), \bar{v}(t), p(t)) -$$
$$- M(t, y^o(t), v^o(t), p(t))]dt.$$

Для простоты дальнейшего изложения введем обозначения:

$$\Delta_{u(\tau)} f(t, \tau, x^o(\tau), u^o(\tau)) = f(t, \tau, x^o(\tau), u(\tau)) -$$
$$- f(t, \tau, x^o(\tau), u^o(\tau)),$$

$$\Delta_{u(t)} H(t, x^o(t), u^o(t), \psi(t)) = H(t, x^o(t), u(t), \psi(t)) -$$
$$- H(t, x^o(t), u^o(t), \psi(t)),$$

$$\Delta_{u(t)} H_x(t, x^o(t), u^o(t), \psi(t)) = H_x(t, x^o(t), u(t), \psi(t)) -$$
$$- H_x(t, x^o(t), u^o(t), \psi(t)),$$

$$\Delta_{v(t)} M(t, y^o(t), v^o(t), p(t)) = M(t, y^o(t), v(t), p(t)) -$$
$$- M(t, y^o(t), v^o(t), p(t)),$$

$$\Delta_{v(t)} M_y(t, y^o(t), v^o(t), p(t)) = M_y(t, y^o(t), v(t), p(t)) -$$
$$- M_y(t, y^o(t), v^o(t), p(t)).$$

Применяя формулу Тейлора, для приращения (2.8) после некоторых преобразований получим

$$\Delta S(u^o, v^o) = \varphi_x(x^o(t_1))\Delta x(t_1) + \frac{1}{2}\Delta x'(t_1)\varphi_{xx}(x^o(t_1))\Delta x(t_1) +$$
$$+ \phi_y(y^o(t_2))\Delta y(t_2) + \frac{1}{2}\Delta y'(t_2)\phi_{yy}(y^o(t_2))\Delta y(t_2) +$$
$$+ \psi(t_1 - 1)\Delta x(t_1) + \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \psi(t-1)\Delta x(t) -$$
$$- \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \Delta_{\bar{u}} H(t, x^o(t), u^o(t), \psi(t) -$$
$$- \sum_{t=t_0}^{t_1-1} H_x(t, x^o(t), u^o(t), \psi(t))\Delta x(t) -$$
$$- \frac{1}{2}\sum_{t=t_0}^{t_1-1} \Delta x'(t) H_{xx}(t, x^o(t), u^o(t), \psi(t))\Delta x(t) -$$
$$- \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \Delta_{\bar{u}} H_x(t, x^o(t), u^o(t), \psi(t))\Delta x(t) + p(t_2)\Delta y(t_2) -$$
$$- N_x(x^o(t_1))\Delta x(t_1) - \frac{1}{2}\Delta x'(t_1) N_{xx}(x^o(t_1))\Delta x(t_1) -$$
$$- \int_{t_1}^{t_2} \dot{p}(t)\Delta y(t)dt - \int_{t_1}^{t_2} \Delta_{\bar{v}} M(t, y^o(t), v^o(t), p(t))dt -$$
$$- \int_{t_1}^{t_2} M_y(t, y^o(t), v^o(t), p(t))\Delta y(t)dt -$$
$$- \int_{t_1}^{t_2} \Delta_{\bar{v}} M_y(t, y^o(t), v^o(t), p(t))\Delta y(t)dt -$$
$$- \frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2} \Delta y(t) M_{yy}(t, y^o(t), v^o(t), p(t))\Delta y(t)dt +$$
$$+ \eta(\Delta u, \Delta v). \qquad (2.9)$$

Здесь по определению

$$\eta(\Delta u, \Delta v) = o_1(\|\Delta x(t_1)\|^2) + o_2(\|\Delta y(t_2)\|^2) - o_3(\|\Delta x(t_1)\|^2) -$$
$$- \sum_{t=t_0}^{t_1-1} o_4(\|\Delta x(t)\|^2) - \int_{t_1}^{t_2} o_5(\|\Delta y(t)\|^2)dt -$$
$$- \frac{1}{2}\sum_{t=t_0}^{t_1-1} \Delta x'(t)\Delta_{\bar{u}} H_{xx}(t, x^o(t), u^o(t), \psi(t))\Delta x(t) -$$
$$- \frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2} \Delta y'(t)\Delta_{\bar{v}} M_{yy}(t, y^o(t), v^o(t), p(t))\Delta y(t)dt, \quad (2.10)$$

где величины $o_i(\cdot)$, $i = \overline{1, 5}$, определяются соответственно из разложений:

$$\varphi(\bar{x}(t_1)) - \varphi(x^o(t_1)) = \varphi_x(x^o(t_1))\Delta x(t_1) +$$
$$+ \frac{1}{2}\Delta x'(t_1)\varphi_{xx}(x(t_1))\Delta x(t_1) + o_1(\|\Delta x(t_1)\|^2),$$

$$\phi(\bar{y}(t_2)) - \phi(y^o(t_2)) = \phi_y(y^o(t_2))\Delta y(t_2) +$$
$$+ \frac{1}{2}\Delta y'(t_2)\phi_{yy}(y^o(t_2))\Delta y(t_2) + o_2(\|\Delta y(t)\|^2),$$

$$N(\bar{x}(t_1)) - N(x^o(t_1)) = N_x(x^o(t_1))\Delta x(t_1) +$$
$$+ \frac{1}{2}\Delta x'(t_1) N_{xx}(x(t_1))\Delta x(t_1) + o_3(\|\Delta x(t_1)\|^2),$$

$$H(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t), \psi(t)) - H(t, x^o(t), \bar{u}(t), \psi(t)) =$$
$$= H_x(t, x^o(t), \bar{u}(t), \psi(t))\Delta x(t) +$$
$$+ \frac{1}{2}\Delta x'(t) H_{xx}(t, x^o(t), \bar{u}(t), \psi(t))\Delta x(t) + o_4(\|\Delta x(t_1)\|^2),$$

$$M(t, \bar{y}(t), \bar{v}(t), p(t)) - M(t, y^o(t), v^o(t), p(t)) =$$
$$= M_y(t, y^o(t), \bar{v}(t), p(t))\Delta y(t) +$$
$$+ \frac{1}{2}\Delta y'(t) M_{yy}(t, y^o(t), \bar{v}(t), p(t))\Delta y(t) + o_5(\|\Delta y(t)\|^2).$$

Если предположить, что вектор-функция $(\psi(t), p(t))$ — решение задачи

$$\psi(t-1) = H_x(t, x^o(t), u^o(t), \psi(t)),$$

$$\psi(t_1 - 1) = -\varphi_x(x^o(t_1) + N_x(x^o(t_1)),$$

$$\dot{p}(t) = M_y(t, y^o(t), v^o(t), p(t)),$$

$$p(t_2) = -\phi_y(y^o(t_2)),$$

то формула приращения (2.9) примет вид:

$$\begin{aligned}\Delta S(u^o, v^o) = &-\sum_{t=t_0}^{t_1-1} \Delta_{\bar{u}} H(t, x^o(t), u^o(t), \psi(t)) + \\ &+ \frac{1}{2}\Delta x(t_1)[\varphi_{xx}(x^o(t_1)) - N_{xx}(x^o(t_1))]\Delta x(t_1) - \\ &- \frac{1}{2}\sum_{t=t_0}^{t_1-1} \Delta x(t) H_{xx}(t, x^o(t), u^o(t), \psi(t))\Delta x(t) - \\ &- \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \Delta_{\bar{u}(t)} H_{xx}(t, x^o(t), u^o(t), \psi(t))\Delta x(t) - \\ &- \int_{t_1}^{t_2} \Delta_{\bar{v}} M(t, y^o(t), v^o(t), p(t))dt + \\ &+ \frac{1}{2}\Delta y(t_2)\phi_{yy}(y^o(t_2))\Delta y(t_2) - \\ &- \frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2} \Delta y(t) M_{yy}(t, y^o(t), v^o(t), p(t))\Delta y(t)dt - \\ &- \int_{t_1}^{t_2} \Delta_{\bar{v}} M_y(t, y^o(t), v^o(t), p(t))\Delta y(t)dt + \\ &+ \eta(\Delta u, \Delta v). \qquad (2.11)\end{aligned}$$

3. СПЕЦИАЛЬНОЕ ПРИРАЩЕНИЕ КРИТЕРИЯ КАЧЕСТВА И НЕОБХОДИМОЕ УСЛОВИЕ ОПТИМАЛЬНОСТИ

Если предположить, что множество

$$\begin{aligned} &f(t, \tau, x^o(\tau), U) = \\ &= \{\alpha: \alpha = f(t, \tau, x^o(\tau), u),\ u \in U\} \qquad (3.1)\end{aligned}$$

выпукло, то специальное приращение допустимого управления $u^o(t)$ можно определить по формуле $\Delta u_\varepsilon(t) = u(t; \varepsilon) - u^o(t)$, $t \in T_1$, где $\varepsilon \in [0, 1]$ произвольное число, а $u(t; \varepsilon) \in U$, $t \in T_1$, такие допустимые управляющие функции, что

$$\begin{aligned} &\Delta u_{(\tau;\, \varepsilon)} f(t, \tau, x^o(\tau), u^o(\tau)) = \\ &= \varepsilon\Delta_{u(\tau)} f(t, \tau, x^o(\tau), u^o(\tau)). \qquad (3.2)\end{aligned}$$

Здесь $u(\tau) \in U$, $\tau \in T_1$, — произвольное допустимое управление, соответствующее допустимому управлению $u(t; \varepsilon)$.

Пусть $\Delta v(t) = 0$. Обозначим через $(\Delta x_\varepsilon(t), \Delta y_\varepsilon(t))$ специальное приращение оптимальной траектории $(x^o(t), y^o(t))$, соответствующее специальному приращению управления $(u^o(t), v^o(t))$.

Из оценок, установленных в работах [15, *с. 155—156*; 20, *с. 259—263*; 21, *с. 37—38*] и других следует

$$\begin{aligned}&\|\Delta x_\varepsilon(t)\| \le L_1\varepsilon,\ t \in T_1 \cup t_1, \\ &\|\Delta y_\varepsilon(t)\| \le L_2\varepsilon,\ t \in T_2 \cup t_2, \qquad (3.3)\end{aligned}$$

где L_1 и L_2 — положительные постоянные.

Поэтому из формулы (2.10) следует, что

$$\eta(\Delta u, 0) = o(\varepsilon^2). \qquad (3.4)$$

Из разложения соотношений (2.2)—(2.5) по формуле Тейлора следует

Лемма. *Для специального приращения* $(\Delta x_\varepsilon(t), \Delta y_\varepsilon(t))$ *траектории* $(x^o(t), y^o(t))$ *справедливы оценки*:

$$\begin{aligned}&\Delta x_\varepsilon(t) = \varepsilon a(t) + o(\varepsilon; t), \\ &\Delta y_\varepsilon(t) = \varepsilon b(t) + o(\varepsilon; t). \ \blacklozenge \qquad (3.5)\end{aligned}$$

Здесь $a(t)$ и $b(t)$ — соответственно решения уравнений:

$$\begin{aligned} a(t+1) = &\sum_{\tau=t_0}^{t} [f_x(t, \tau, x^o(\tau), u^o(\tau))a(\tau) + \\ &+ \Delta_{\bar{u}(\tau)} f(t, \tau, x^o(\tau), u^o(\tau))], \qquad (3.6)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{b}(t) = &\int_{t_1}^{t} [g_y(t, \tau, y^o(\tau), v^o(\tau))b(\tau) + \\ &+ \Delta_{\bar{v}(\tau)} g(t, \tau, y^o(\tau), v^o(\tau))]d\tau, \\ &b(t_1) = G_x(x^o(t_1))a(t_1)). \qquad (3.7)\end{aligned}$$

Принимая во внимание выражения (3.2)—(3.5) в формуле (2.11), приходим к разложению

$$\begin{aligned}\Delta S(u^o, v^o) = &-\varepsilon \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \Delta_{u(t)} H(t, x^o(t), u^o(t), \psi(t)) + \\ &+ \frac{\varepsilon^2}{2}\Bigg[a(t_1)[\varphi_{xx}(x^o(t_1)) - N_{xx}(x^o(t_1))]a(t_1) - \\ &- \sum_{t=t_0}^{t_1-1} a(t) H_{xx}(t, x^o(t), u^o(t), \psi(t))a(t) - \\ &- 2\sum_{t=t_0}^{t_1-1} \Delta_{u(t)} H_x(t, x^o(t), y^o(t), \psi(t))a(t) + \end{aligned}$$

$$+ b(t_2)\phi_{yy}(y^o(t_2))b(t_2) -$$
$$\left. - \int_{t_1}^{t_2} b(t)M_{yy}(t, y^o(t), v^o(t), p(t))b(t)dt \right] + o(\varepsilon^2). \quad (3.8)$$

Если же специальное приращение оптимального управления $(u^o(t), v^o(t))$ определить по формулам

$$\Delta u(t) = 0,\ t \in T_1,$$

$$\Delta v_\delta(t) = \begin{cases} v - v^o(t), & t \in [\theta, \theta + \delta), \\ 0, & t \in T_2/[\theta, \theta + \delta), \end{cases} \quad (3.9)$$

где $\theta \in [t_1, t_2)$ — произвольная точка непрерывности управляющей функции $v^o(t)$, $\delta > 0$ — достаточно малое произвольное число такое, что $\theta + \delta < t_2$, $v \in V$ — произвольной вектор, то из указанных выше оценок следует что,

$$\Delta x(t) = 0,$$
$$\|\Delta y_\varepsilon(t)\| \le L_3\delta, \quad (3.10)$$

где $L_3 = \text{const} > 0$.

Поэтому из формулы (2.10) следует, что

$$\eta(0, \Delta v) = o(\delta^2). \quad (3.11)$$

В этом случае на основании леммы

$$\Delta_\delta x(t) = 0,$$
$$\Delta_\delta y(t) = \delta b(t) + o(\delta; t). \quad (3.12)$$

В дальнейшем нам понадобится утверждение [20, *с. 26*]:

$$\int_\theta^{\theta+\delta} \Delta_v M(t, y^o(t), v^o(t), p(t))dt =$$
$$= \delta\Delta_v M(\theta, y^o(\theta), v^o(\theta), p(\theta)) + o(\delta). \quad (3.13)$$

Принимая во внимания соотношения (3.9)—(3.13), в формуле (2.11) приходим к разложению

$$\Delta S(0, \Delta v) = -\delta\Delta_v M(\theta, y^o(\theta), v^o(\theta), p(\theta)) +$$
$$+ \frac{\delta^2}{2}\left[b(t_2)\phi_{yy}(y^o(t_2))b(t_2) - \right.$$
$$- \int_{t_1}^{t_2} b(t)M_{yy}(t, y^o(t), v^o(t), p(t))b(t)dt -$$
$$\left. - 2\Delta_v M_y(\theta, y^o(\theta), v^o(\theta), p(\theta))b(\theta) \right] + o(\delta^2). \quad (3.14)$$

Из разложений (3.8) и (3.14) в силу произвольности $\varepsilon \in [0; 1]$ и δ следует принцип максимума Понтрягина [22]: вдоль оптимального процесса $(u^o(t), v^o(t), x^o(t), y^o(t))$ неравенства

$$\sum_{t = t_0}^{t_1 - 1} \Delta_{u(t)} H(t, x^o(t), u^o(t), \psi^o(t)) \le 0,$$
$$\Delta_v M(\theta, y^o(\theta), v^o(\theta), p^o(\theta)) \le 0 \quad (3.15)$$

выполняются для всех $u(t) \in U$, $t \in T_1$, $v \in V$, $\theta \in T_2$.

Этот результат, как было отмечено в работе [22], представляет собой необходимое условие оптимальности первого порядка. Изучим случай вырождения этого условия.

Определение. Если соотношения

$$\sum_{t = t_0}^{t_1 - 1} \Delta_{u(t)} H(t, x^o(t), u^o(t), \psi(t)) = 0,$$
$$\Delta_v M(\theta, y^o(\theta), v^o(\theta), p(\theta)) = 0 \quad (3.16)$$

выполняются для всех $u(t) \in U$, $t \in T_1$, $v \in V$, $\theta \in T_2$, то допустимое управление $(u^o(t), v^o(t))$ назовем особым в смысле принципа максимума Понтрягина управлением. ♦

Из определения ясно, что для особых управлений условие максимума Понтрягина (3.15) вырождаясь, теряет свое содержательное значение.

Таким образом, возникает необходимость в дальнейшем исследовании особых в смысле принципа максимума Понтрягина управлений.

С учетом условия (3.16) из разложения (3.8) следует неравенство

$$a(t_1)[\varphi_{xx}(x^o(t_1)) - N_{xx}(x^o(t))]a(t_1) -$$
$$- \sum_{t = t_0}^{t_1 - 1} a(t)H_{xx}(t, x^o(t), u^o(t), \psi(t))a(t) -$$
$$- 2\sum_{t = t_0}^{t_1 - 1} \Delta_u H(t, x^o(t), u^o(t), p(t))a(t) +$$
$$+ b(t_2)\phi_{yy}(y^o(t_2))b(t_2) -$$
$$- \int_{t_1}^{t_2} b(t)M_{yy}(t, y^o(t), v^o(t), p(t))b(t)dt \ge 0, \quad (3.17)$$

а из разложения (3.14) — неравенство

$$b(t_2)\phi_{yy}(y^o(t_2))b(t_2) - \int_{t_1}^{t_2} b(t)M_{yy}(t, y^o(t), v^o(t), p(t))b(t)dt -$$
$$- 2\Delta_v M_y(\theta, y^o(\theta), v^o(\theta), p(\theta))b(\theta) \ge 0. \quad (3.18)$$

Сформулируем полученный результат.

Теорема 1. *Если множество* (3.1) *выпукло, то для оптимальности особого в смысле принципа максимума Понтрягина управления* $(u^o(t), v^o(t))$ *в зада-*

че (1.1)—(1.3) *необходимо, чтобы неравенства* (3.17) *и* (3.18) *выполнялись для всех* $u(t) \in U$, $t \in T_1$ *и* $v \in V$, $\theta \in T_2$. ♦

Неравенства (3.17) и (3.18) являются общим, но трудно проверяемым необходимым условием оптимальности особых управлений. С его помощью удается получить различные необходимые условия оптимальности особых управлений, непосредственно выраженные через параметры задачи (1.1)—(1.3).

Поскольку уравнения (3.6) и (3.7) — соответственно линейное неоднородное разностное и интегральное уравнения типа Вольтерра относительно $a(t)$ и $b(t)$, то их решения можно представить (см. например, работы [23—26]) в виде

$$a(t) = \sum_{s=t_0}^{t-1}\left[\sum_{\tau=s}^{t-1} R(t, \tau+1) \times \times \Delta_{u(s)} f(\tau, s, x^o(s), u^o(s))\right], \quad (3.19)$$

$$b(t) = \int_{t_1}^{t}\int_{s}^{t} Q(t, \tau)\Delta_{v(s)} g(\tau, s, y^o(s), v^o(s))dsd\tau + + Q(t, t_1)G_x(x^o(t_1))a(t_1). \quad (3.20)$$

Здесь $R(t, \tau)$ и $Q(t, \tau)$ — матричные функции соответствующих размерностей, являющиеся решениями задач

$$\begin{cases} R(t+1, s) = \sum_{\tau=s}^{t} R(t+1, \tau+1)f_x(\tau, s, x^o(s), u^o(s)), \\ s \le t, \\ R(t+1, t+1) = E_1, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{Q}_s(t, s) = \int_{s}^{t} Q(t, \tau)g_y(\tau, s, x^o(s), v^o(s))d\tau, \\ Q(t, t) = E_2 \end{cases}$$

где E_1 и E_2 — единичные матрицы соответствующих размерностей.

Далее, представление (3.20), с учетом представления (3.19) записывается в виде

$$b(t) = \int_{t_1}^{t}\int_{s}^{t} Q(t, \tau)\Delta_{v(s)} g(\tau, s, y^o(s), v^o(s))dsd\tau + + Q(t, t_1)G_x(x^o(t_1))\sum_{s=t_0}^{t_1-1}\sum_{\tau=s}^{t_1-1} R(t_1, \tau+1) \times \times \Delta_{u(s)} f(\tau, s, x^o(s), u^o(s)). \quad (3.21)$$

Учитывая независимость допустимых управляющих функций $u(t)$ и $v(t)$, положим $v(t) \equiv v^o(t)$, $t \in T_2$. Тогда представления (3.19) и (3.21) примут соответственно вид:

$$a(t) = \sum_{s=t_0}^{t-1}\left[\sum_{\tau=s}^{t-1} R(t, \tau+1) \times \times \Delta_{u(s)} f(\tau, s, x^o(s), u^o(s))\right], \quad (3.22)$$

$$b(t) = \sum_{s=t_0}^{t_1-1}\sum_{\tau=s}^{t_1-1} Q(t, t_1)G_x(x^o(t_1))R(t_1, \tau+1) \times \times \Delta_{u(s)} f(\tau, s, x^o(s), u^o(s)). \quad (3.23)$$

Если же положить $u(t) \equiv u^o(t)$, $t \in T_1$, то из представлений (3.19) и (3.21)

$$a(t) = 0, \ t \in T_1,$$

$$b(t) = \int_{t_1}^{t}\int_{s}^{t} Q(t, \tau)\Delta_{v(s)} g(\tau, s, y^o(s), v^o(s))dsd\tau. \quad (3.24)$$

Представления (3.22) и (3.23) позволяют убедиться в справедливости тождеств:

$$a(t_1)[\varphi_{xx}(x^o(t_1)) - N_{xx}(x^o(t_1))]a(t_1) = = \left(\sum_{\alpha=t_0}^{t_1-1}\left[\sum_{\tau=\alpha}^{t_1-1} R(t, \tau+1)\Delta_{u(\alpha)} f(\tau, \alpha, x^o(\alpha), u^o(\alpha))\right]\right) \times \times [\varphi_{xx}(x^o(t_1)) - N_{xx}(x^o(t_1))] \times \times \left(\sum_{\beta=t_0}^{t_1-1}\sum_{\tau=\beta}^{t_1-1} R(t, \tau+1)\Delta_{v(\beta)} f(\tau, \beta, x^o(\beta), u^o(\beta))\right), \quad (3.25)$$

$$\sum_{t=t_0}^{t_1-1} a(t)H_{xx}(t, x^o(t), u^o(t), \psi(t))a(t) = = \sum_{t=t_0}^{t_1-1}\left(\sum_{\alpha=t_0}^{t-1}\sum_{\tau=\alpha}^{t-1} R(t, \tau+1)\Delta_{u(\alpha)} f(\tau, \alpha, x^o(\alpha), u^o(\alpha))\right) \times \times H_{xx}(t, x^o(t), u^o(t), \psi(t)) \times \times \left(\sum_{\beta=t_0}^{t-1}\sum_{\tau=\beta}^{t-1} R(t, \tau+1)\Delta_{u(\beta)} f(\tau, \beta, x^o(\beta), u^o(\beta))\right), \quad (3.26)$$

$$\sum_{t=t_0}^{t_1-1} \Delta_{u(t)} H_x(t, x(t), u(t), \psi(t))a(t) = = \sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{s=t_0}^{t-1}\sum_{\tau=s}^{t_1-1} \Delta_{u(t)} H_x(t, x^o(t), u^o(t), \psi(t)) \times \times R(t, \tau+1)\Delta_{u(s)} f(\tau, s, x^o(s), u^o(s)), \quad (3.27)$$

$$\int_{t_1}^{t_2} b(t) M_{yy}(t, y^o(t), v^o(t), p(t)) b(t) dt =$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \Bigg[\Bigg(\sum_{\alpha = t_0}^{t_1 - 1} \sum_{\tau = \alpha}^{t_1 - 1} \Delta_{u(\alpha)} f(\tau, \alpha, x^o(\alpha), u^o(\alpha)) \times$$

$$\times R(t_1, \tau + 1) G_x(x^o(t_1)) Q(t, t_1) \Bigg) M_{yy}(t, y^o(t), v^o(t), p(t)) \times$$

$$\times \Bigg(\sum_{\beta = t_0}^{t_1 - 1} \sum_{\tau = \beta}^{t_1 - 1} \Delta_{u(\beta)} f(\tau, \beta, x^o(\beta), u^o(\beta)) \times$$

$$\times R(t, \tau + 1) G(x^o(t_1)) Q(t, t_1) \Bigg) \Bigg] dt, \qquad (3.28)$$

$$b(t_2) \phi_{yy}(y^o(t_2) b(t_2) = \sum_{\alpha = t_0}^{t_1 - 1} \sum_{\tau = \alpha}^{t_1 - 1} Q(t_2, t) G(x^o(t_1)) \times$$

$$\times \Delta_{u(\alpha)} f(\tau, \alpha, x^o(\alpha), v^o(\alpha)) \phi_{yy}(y^o(t_2)) \times$$

$$\times \sum_{\beta = t_0}^{t_1 - 1} \sum_{\tau = \beta}^{t_1 - 1} Q(t_2, t) G_x(x^o(t_1)) \times$$

$$\times \Delta_{u(\beta)} f(\tau, \beta, x^o(\beta), v^o(\beta)). \qquad (3.29)$$

Учитывая тождества (3.25)—(3.29), из выражения (3.17) получим неравенство

$$\Bigg(\sum_{\alpha = t_0}^{t_1 - 1} \Bigg[\sum_{\tau = \alpha}^{t_1 - 1} R(t, \tau + 1) \Delta_{u(\alpha)} f(\tau, \alpha, x^o(\alpha), u^o(\alpha)) \Bigg] \Bigg) \times$$

$$\times [\varphi_{xx}(x^o(t_1)) - N_{xx}(x^o(t_1))] \times$$

$$\times \Bigg(\sum_{\beta = t_0}^{t_1 - 1} \sum_{\tau = \beta}^{t_1 - 1} R(t, \tau + 1) \Delta_{v(\beta)} f(\tau, \beta, x^o(\beta), u^o(\beta)) \Bigg) -$$

$$- \sum_{t = t_0}^{t_1 - 1} \Bigg(\sum_{\alpha = t_0}^{t - 1} \sum_{\tau = \alpha}^{t - 1} R(t, \tau + 1) \Delta_{u(\alpha)} f(\tau, \alpha, x^o(\alpha), u^o(\alpha)) \Bigg) \times$$

$$\times H_{xx}(t, x^o(t), u^o(t), \psi(t)) \times$$

$$\times \Bigg(\sum_{\beta = t_0}^{t - 1} \sum_{\tau = \beta}^{t - 1} R(t, \tau + 1) \Delta_{u(\beta)} f(\tau, \beta, x^o(\beta), u^o(\beta)) \Bigg) -$$

$$- 2 \sum_{t = t_0}^{t_1 - 1} \sum_{s = t_0}^{t - 1} \sum_{\tau = s}^{t_1 - 1} \Delta_{u(t)} H_x(t, x^o(t), u^o(t), \psi(t)) \times$$

$$\times R(t, \tau + 1) \Delta_{u(s)} f(\tau, s, x^o(s), u^o(s)) -$$

$$- \int_{t_1}^{t_2} \Bigg[\Bigg(\sum_{\alpha = t_0}^{t_1 - 1} \sum_{\tau = \alpha}^{t_1 - 1} \Delta_{u(\alpha)} f(\tau, \alpha, x^o(\alpha), u^o(\alpha)) \times$$

$$\times R(t_1, \tau + 1) G_x(x^o(t_1)) Q(t, t_1) \Bigg) M_{yy}(t, y^o(t), v^o(t), p(t)) \times$$

$$\times \Bigg(\sum_{\beta = t_0}^{t_1 - 1} \sum_{\tau = \beta}^{t_1 - 1} \Delta_{u(\beta)} f(\tau, \beta, x^o(\beta), u^o(\beta)) \times$$

$$\times R(t, \tau + 1) G(x^o(t_1)) Q(t, t_1) \Bigg) \Bigg] dt +$$

$$+ \sum_{\alpha = t_0}^{t_1 - 1} \sum_{\tau = \alpha}^{t_1 - 1} Q(t_2, t_1) G(x(t)) \Delta_{u(\alpha)} f(\tau, \alpha, x^o(\alpha), v^o(\alpha)) \times$$

$$\times \phi(y^o(t)) \sum_{\beta = t_0}^{t_1 - 1} \sum_{\tau = \beta}^{t_1 - 1} Q(t_2, t_1) G(x^o(t_1)) \times$$

$$\times \Delta_{u(\beta)} f(\tau, \beta, x^o(\beta), v^o(\beta)) \geq 0. \qquad (3.30)$$

Далее, используя представление (3.24), получаем справедливость тождеств:

$$b(t_2) \phi_{yy}(y^o(t_2) b(t_2) =$$

$$= \int_{t}^{t_2} \int_{\alpha}^{t_2} \Delta_{v(\alpha)} g(\tau, \alpha, y^o(\alpha), v^o(\alpha)) Q(t_2, \tau) d\alpha d\tau \phi_{yy}(y^o(t)) \times$$

$$\times \int_{t_1}^{t_2} \int_{\beta}^{t_2} \Delta_{v(\beta)} g(\tau, \beta, y^o(\beta), v^o(\beta)) Q(t_2, \tau) d\beta d\tau, \quad (3.31)$$

$$\int_{t_1}^{t_2} b(t) M(t, y^o(t), v^o(t), p(t)) b(t) dt =$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \Bigg[\int_{t_1}^{t} \int_{\alpha}^{t} \Delta_{v(\alpha)} g(\tau, \alpha, y^o(\alpha), v^o(\alpha)) d\alpha d\beta M(t, y(t), v(t), p(t)) \times$$

$$\times \int_{t_1}^{t} \int_{\beta}^{t} \Delta_{v(\beta)} g(\tau, \beta, y^o(\beta), v^o(\beta)) Q(t, \tau) d\beta d\tau \Bigg] dt, \quad (3.32)$$

$$\Delta_v M(\theta, y^o(\theta), v^o(\theta), p(\theta)) b(\theta) =$$

$$= \int_{t_1}^{\theta} \int_{\alpha}^{\theta} \Delta_v M_y(\theta, y^o(\theta), v^o(\theta), p(\theta)) Q(\theta, \tau) \times$$

$$\times \Delta_{v(\alpha)} g(\tau, \alpha, y^o(\alpha), v^o(\alpha)) d\alpha d\tau. \qquad (3.33)$$

Принимая во внимание тождества (3.31)—(3.33), из неравенства (3.18) получаем, что вдоль оптимального особого в смысле принципа максимума Понтрягина управления $(u^o(t), v^o(t))$

$$\int_{t}^{t_2} \int_{\alpha}^{t_2} \Delta_{v(\alpha)} g(\tau, \alpha, y^o(\alpha), v^o(\alpha)) Q(t_2, \tau) d\alpha d\tau \phi_{yy}(y^o(t)) \times$$

$$\times \int_{t_1}^{t_2} \int_{\beta}^{t_2} \Delta_{v(\beta)} g(\tau, \beta, y^o(\beta), v^o(\beta)) Q(t, \tau) d\beta d\tau -$$

$$- \int_{t_1}^{t_2} \int_{t_1}^{t} \int_{\alpha}^{t} \Delta_{v(\alpha)} g(\tau, \alpha, y^o(\alpha), v^o(\alpha)) d\alpha d\beta M(t, y(t), v(t), p(t)) \times$$

$$\times \int_{t_1}^{t} \int_{\beta}^{t} \Delta_{v(\beta)} g(\tau, \beta, y^o(\beta), v^o(\beta)) Q(t, \tau) d\beta d\tau dt -$$

$$- 2\int_{t_1}^{\theta}\int_{\alpha}^{\theta}\Delta_v M_y(\theta,\ y^o(\theta),\ v^o(\theta),\ p(\theta))Q(\theta,\ \tau)\ \times$$
$$\times\ \Delta_{v(\alpha)}g(\tau,\ \alpha,\ y^o(\alpha),\ v^o(\alpha))d\alpha d\tau \geq 0. \qquad (3.34)$$

Таким образом, доказана

Теорема 2. *Если множество* (3.1) *выпукло, то для оптимальности особого в смысле принципа максимума Понтрягина управления* ($u^o(t)$, $v^o(t)$) *в задаче* (1.1)—(1.3) *необходимо, чтобы неравенства* (3.30) *и* (3.34) *выполнялись для всех* $u(t) \in U$, $t \in T_1$ *и* $v \in V$, $\theta \in T_2$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Посредством модификации метода приращений для задач оптимального управления, описываемых разностными и интегро-дифференциальными уравнениями типа Вольтерра, получено необходимые условие оптимальности первого порядка в форме принципа максимума Понтрягина. Исследован случай вырождения необходимого условия оптимальности первого порядка и получены необходимые условия оптимальности второго порядка.

Полученные условия оптимальности носят оригинальный характер и являются аналогами результатов, полученных для задач управления, описываемых дифференциальными и разностными уравнениями. Они могут найти приложения в различных областях современной теории оптимального управления.

Результаты работы могут быть полезны при дальнейшей разработке теории необходимых условий оптимальности для задач управления, описываемых уравнениями Вольтерра.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Островский Г.М., Волин Ю.М.* Моделирование сложных химико-технологических схем. — М.: Химия, 1975. — 311 с.
2. *Агафонова И.А., Гулин Л.Л., Расина И.В.* Математическое моделирование и оптимизация процесса метилирования динатриевой соли сульфаминоантиприна / Деп. в ВИНИТИ, 10.11.1978, № 3457. — 19 с.
3. *Кулебякин А.А.* Управление системами и процессами в машиностроении: уч. пособие. — Ярославль: Изд-во ЯГТУ, 2008. — 129 с.
4. *Лемперт А.А., Урбанович Д.Е.* Оптимизация сбросов загрязняющих веществ в бассейне реки при экологических ограничениях // География и природные ресурсы. Спец. выпуск. — 2004. — С. 212—215.
5. *Нахушев А.М.* Уравнения математической биологии. — М.: Высшая школа, 1995. — 301 с.
6. *Белецкий В.В.* Динамика двуногой ходьбы // Известия АН СССР. Механика твердого тела. — 1975. — № 3. — С. 3—14.
7. *Гурман В.И., Орлов А.Г.* Достаточные условия оптимальности сложных процессов // Автоматика и телемеханика. — 1978. — № 4.
8. *Гурман В.И., Орлов А.Г.* Сложные процессы двуногой ходьбы / Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша. — 1979. — № 95.
9. *Арсенашвили А.И., Тадумадзе Т.А.* Необходимые условия оптимальности для управляемых систем с переменной структурой и непрерывными условиями преемственности // Тр. ИПМ им. И.Н. Векуа Тбилисского гос. ун-та. — 1998. — Т. 27. — С. 35—48.
10. *Исмайлов Р.Р., Мансимов К.Б.* Об условиях оптимальности в одной ступенчатой задаче управления // Журнал выч. мат. и мат. физики. — 2006. — № 10. — С. 1758—1770.
11. *Батурин В.А., Лемперт А.А.* Многоэтапные процессы и методы улучшения в задачах оптимального управления // Вычислительные технологии. — 2003. — Т. 8. — С. 103—108.
12. *Гурман В.И.* К теории оптимальных дискретных процессов // Автоматика и телемеханика. — 1973. — № 6.
13. *Монастырский М.А.* Оптимальное управление системами, описываемыми интегральными уравнениями Вольтерра // Автоматика и телемеханика. — 1975. — № 1. — С. 29—36.
14. *Мансимов К.Б., Абдуллаев А.А.* Исследование особых управлений в одной задаче управления двумерными интегральными уравнениями типа Вольтерра // Автоматика и вычислительная техника. — 2006. — № 4. — С. 72—81.
15. *Абдуллаев А.А., Мансимов К.Б.* Необходимые условия оптимальности в процессах, описываемых системой интегральных уравнений типа Вольтерра. — Баку: Элм, 2013. — 224 с.
16. *Абдуллаев А.А.* Об одной задаче управления, описываемой системой интегральных уравнений типа Вольтерра // Известия АН Азербайджана. Сер. физ.-техн. и мат наук. — 1995. — № 5—6. — С. 46—49.
17. *Mansimov K.B., Mastaliyev R.O.* Necessary first and second order optimality conditions in problems of control described by a system of Volterra difference equations // Journal Automatic Control and Computer Sciences. — 2008. — Vol. 42, N 2. — P. 71—76.
18. *Масталиев Р.О.* Об одной ступенчатой задаче оптимального управления дискретными системами // Вестник Бакинского ун-та. Сер. физ.-мат. наук. — 2010. — № 1. — С. 33—39.
19. *Габасов Р., Кириллова Ф.М.* Особые оптимальные управления. — М.: Наука, 1973. — 256 с.
20. *Габасов Р., Кириллова Ф.М.* Принцип максимума в теории оптимального управления. — Минск: Наука и техника, 1974. — 274 с.
21. *Мансимов К.Б.* Дискретные системы. — Баку: Изд-во БГУ, 2002. — 114 с.
22. *Масталиев Р.О.* Об одной ступенчатой задаче оптимального управления с дискретно-непрерывной системой // Известия АН Азербайджана. Сер. физ.-техн. и мат. наук. — 2014. — № 1. — С. 64—69.
23. *Колмановский В.Б.* Об асимптотических свойствах решений некоторых нелинейных систем Вольтерра // Автоматика и телемеханика. — 2000. — № 4. — С. 42—51.
24. *Колмановский В.Б.* Об асимптотической эквивалентности решений некоторых разностных уравнений // Автоматика и телемеханика. — 2001. — № 4. — С. 47—55.
25. *Васильева А.Б., Тихонов А.Н.* Интегральные уравнения. — М.: Изд-во МГУ, 1989. — 550 с.
26. *Цалюк З.Б.* Интегральные уравнения Вольтерра // Итоги науки и техники. Сер. Математический анализ. — 1977. — Т. 15. — С. 131—198.

Статья представлена к публикации членом редколлегии В.Н. Афанасьевым.

Масталиев Рашад Огтай оглы — д-р философии по математике, ст. науч. сотрудник, Институт систем управления им. акад. А. Гусейнова НАН Азербайджана, г. Баку,
☎ (994) 012-510-93-72, ✉ mastaliyevrashad@gmail.com.