

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДОВ ТЕОРИИ ГРАФОВ К ИССЛЕДОВАНИЮ Т-СИНХРОНИЗАЦИИ ХАОТИЧЕСКИХ СИСТЕМ

А.В. Макаренко

Развит подход к анализу Т-синхронизации хаотических систем, основанный на ранее предложенном автором оригинальном способе символического анализа дискретных отображений и последовательностей на основе конечного алфавита, символы которого кодируются по трем последовательным отсчетам в пространстве состояний. В качестве дальнейшего развития подхода введен в рассмотрение граф временной структуры синхронизации хаотических систем и изучены его основные свойства. Базовые возможности подхода продемонстрированы на примере связанных идентичных логистических отображений. Обнаружена чувствительность структурных характеристик упомянутого графа к перестроению аттракторов в системе при установлении различных режимов синхронизации хаотических колебаний.

Ключевые слова: синхронизация, символический анализ, перемежаемость, граф временной структуры синхронизации, многомерный временной ряд, логистическое отображение.

ВВЕДЕНИЕ

Синхронизация принадлежит к числу фундаментальных понятий теории нелинейной динамики и теории хаоса. Этот феномен широко распространен в природе, науке, технике и обществе [1]. Одно из важных его проявлений — синхронизация хаотических колебаний, которая экспериментально наблюдалась в различных приложениях (см. работы [1, 2] и приведенные в них ссылки).

Синхронизация хаотических колебаний объединяет несколько ее различных видов [2]: обобщенная [3], полная [4], противофазная [5], с запаздыванием [6], частотная [7], фазовая [8], синхронизация временных масштабов [9] и так называемая Т-синхронизация [10]. Под каждый из них разработан соответствующий аналитический аппарат и методы диагностики. Тем не менее, продолжают активные исследования, направленные, с одной стороны — на рассмотрение разных видов синхронизации с единых позиций, а с другой — на поиск новых видов синхронного поведения, не укладывающихся в означенные.

Несмотря на продолжительную историю изучения синхронизации хаотических колебаний, множество важных вопросов в данной области остаются нерешенными. В их числе и количественное исследование временной структуры синхронизации динамических систем. Под этой структурой будем понимать всплески синхронного поведения фазовых переменных систем, в промежутках между которыми уровень синхронности характеризуется малой величиной, т. е. перемежаемое поведение [11, 12].

Понятие перемежаемости весьма важно в физике (и не только в физике) для исследования структурных свойств процессов, и оно не ограничивается только синхронизмом хаотических систем. С физической точки зрения перемежаемость вообще означает появление неких структур различного масштаба в среде (например, вихрей, локализованных деформаций, температурных неоднородностей), которая исходно могла быть совершенно бесструктурной на этих масштабах. С математической точки зрения такое поведение характеризуется наличием редких, но сильных пи-

ков в поведении индикатора структуры — некой случайной величины [11].

В свою очередь, исследование структуры синхронизма [10] имеет как теоретическую значимость для самой нелинейной динамики [13], так и прикладное значение, например, в вопросах биологии и медицины [14, 15], стохастической финансовой математики [16–18] и др. Тем не менее, при всей актуальности проблематики исследования временной структуры синхронизации нелинейных систем, продвижение в этом вопросе весьма слабое. Основные причины сложившейся ситуации достаточно подробно рассмотрены в работе [10].

В целях решения проблем, связанных с диагностикой и количественным измерением характеристик временной структуры синхронизации хаотических колебаний, автором был предложен оригинальный метод исследования синхронизма на основе символического СТQ-анализа (аббревиатура СТQ обозначает три алфавита, которыми оперирует метод: С, Т и Q) [19, 20]. Отметим, что символическая динамика, при всей своей кажущейся внешней простоте, представляет собой весьма строго обоснованный инструмент анализа нелинейных динамических систем [21, 22]. Она позволяет исследовать такие сложные явления в системах как-то: хаос, странные аттракторы, гиперболичность, структурная устойчивость, управляемость и др. (см., например, работы [21–24] и приведенные в них ссылки).

В рамках предложенного символического анализа синхронизация хаотических колебаний исследуется через так называемую Т-синхронизацию [10, 25], увязанную на инвариантные характеристики формы траекторий динамических систем в расширенном пространстве состояний. Разработанные меры позволяют диагностировать и количественно измерять характеристики режимов перемежаемости при синхронизации хаотических систем, т. е. изучать временную структуру синхронизации нелинейных систем [10, 26]. Конструк-

тивность подхода на основе анализа Т-синхронизации хаотических колебаний была продемонстрирована автором на ряде модельных и реальных систем [10, 17, 25–27].

В статье [10] был поставлен вопрос о применимости теории графов при исследовании временной структуры синхронизации в терминах символического СТQ-анализа. В настоящей работе этот вопрос раскрывается. В § 1 приведено краткое описание основных положений Т-синхронизации, в § 2 содержатся базовые аналитические характеристики, а в § 3 дан пример применения разработанного инструментария. В Заключение приведены выводы по работе в целом.

1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ Т-СИНХРОНИЗАЦИИ ХАОТИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Введем в рассмотрение траекторию динамической системы, заданную в виде дискретной последовательности (временного ряда): $\{s_k\}_{k=1}^K$, где фазовая переменная s системы имеет размерность N , а траектория состоит из K временных отсчетов. Таким образом, $s \in S \subset \mathbb{R}^N$, а $k \in K = \overline{1, K}$. При этом каждому k -му отсчету может быть сопоставлен момент времени t_k , причем $t_k < t_{k+1}$.

Определим исходное отображение [19, 20], кодирующее, в терминах конечного Т-алфавита, форму траектории по k -му отсчету n -й компоненты последовательности $\{s_k\}_{k=1}^K$:

$$T_k^{\alpha\varphi}|_n = f(\{s_{k-1}^{(n)}, s_k^{(n)}, s_{k+1}^{(n)}\}),$$

$$T_k^{\alpha\varphi} = [T_k^{\alpha\varphi}|_1, \dots, T_k^{\alpha\varphi}|_n, \dots, T_k^{\alpha\varphi}|_N]. \quad (1.1)$$

Графические диаграммы, иллюстрирующие геометрию символов Т-алфавита для k -го отсчета и n -й фазовой переменной, приведены на рис. 1.

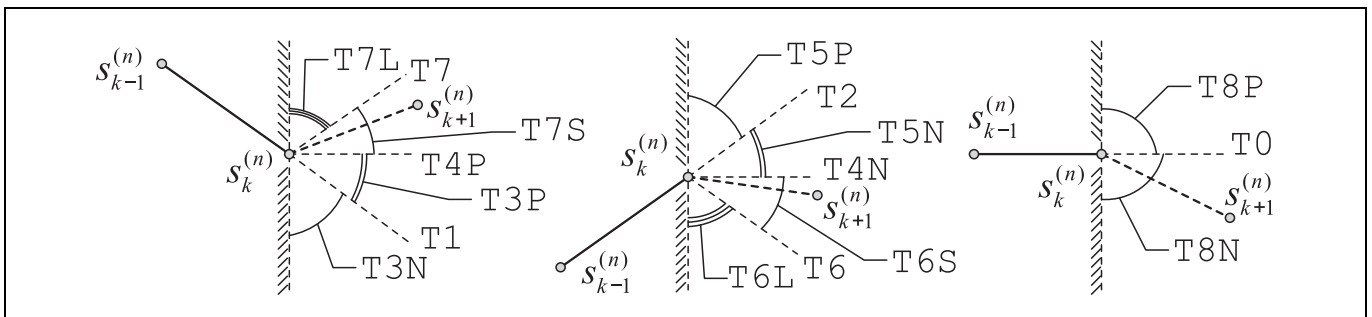


Рис. 1. Графические диаграммы, иллюстрирующие геометрию символов $T^{\alpha\varphi}|_n$ для k -го отсчета и n -й фазовой переменной

Строго, отображение (1.1) задается через соотношения:

$$\begin{aligned}
 T0: \quad & \Delta s_- = \Delta s_+ = 0; \\
 T1: \quad & \Delta s_- = \Delta s_+ < 0; \\
 T2: \quad & \Delta s_- = \Delta s_+ > 0; \\
 T3N: \quad & \Delta s_- < 0, \Delta s_+ < \Delta s_-; \\
 T3P: \quad & \Delta s_- < 0, \Delta s_+ < 0, \Delta s_+ > \Delta s_-; \\
 T4N: \quad & \Delta s_- > 0, \Delta s_+ = 0; \\
 T4P: \quad & \Delta s_- < 0, \Delta s_+ = 0; \\
 T5N: \quad & \Delta s_- > 0, \Delta s_+ > 0, \Delta s_+ < \Delta s_-; \\
 T5P: \quad & \Delta s_- > 0, \Delta s_+ > \Delta s_-; \\
 T6S: \quad & \Delta s_- > 0, \Delta s_+ < 0, \Delta s_+ > -\Delta s_-; \\
 T6: \quad & \Delta s_- = -\Delta s_+ > 0; \\
 T6L: \quad & \Delta s_- = 0, \Delta s_+ < 0, \Delta s_+ < -\Delta s_-; \\
 T7S: \quad & \Delta s_- < 0, \Delta s_+ > 0, \Delta s_+ < -\Delta s_-; \\
 T7: \quad & \Delta s_- = -\Delta s_+ < 0; \\
 T7L: \quad & \Delta s_- < 0, \Delta s_+ > 0, \Delta s_+ > -\Delta s_-; \\
 T8N: \quad & \Delta s_- = 0, \Delta s_+ < 0; \\
 T8P: \quad & \Delta s_- = 0, \Delta s_+ > 0.
 \end{aligned} \tag{1.2}$$

Здесь $\Delta s_- = \mathbf{s}_k^{(n)} - \mathbf{s}_{k-1}^{(n)}$ и $\Delta s_+ = \mathbf{s}_{k+1}^{(n)} - \mathbf{s}_k^{(n)}$.

Таким образом, отображение (1.1) в форме (1.2) является сюръекцией $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{N}_{17}$, а Т-алфавит включает в себя следующее множество символов:

$$\begin{aligned}
 T_o^{\alpha\varphi} = \{ & T0, T1, T2, T3N, T3P, T4N, T4P, \\
 & T5N, T5P, T6S, T6, T6L, T7S, T7, T7L, \\
 & T8N, T8P \}.
 \end{aligned} \tag{1.3}$$

Как видно из выражения (1.3), каждый символ из отсчета $T_k^{\alpha\varphi}|_n$ кодируется в виде Ti , где i — правая часть кодов символов алфавита $T_o^{\alpha\varphi}$. Мощност множества $|T_o^{\alpha\varphi}| = 17$. В свою очередь, символ $T_k^{\alpha\varphi}$ кодируется через $Ti_1 \dots i_n \dots i_N$, см. соотношения (1.1). Полный алфавит $T_o^{\alpha\varphi}|N$, кодирующий форму траектории многомерной последовательности $\{\mathbf{s}_k\}_{k=1}^K$ в целом, состоит из 17^N символов.

Предположим теперь, для простоты, но без потери общности, что временная последовательность $\{\mathbf{s}_k\}_{k=1}^K$ размерностью N формируется путем объединения фазовых переменных N одномерных динамических систем, т. е. $\mathbf{s}_k^{(n)}$ — это значение фазовой переменной n -й системы в k -й момент времени.

Введем определение символьной синхронности компонент последовательности.

Определение 1. k -й отсчет последовательности $\{\mathbf{s}_k\}_{k=1}^K$ является полностью Т-синхронным, если выполняется условие

$$J_k^s \equiv 1,$$

$$\text{где } J_k^s = \begin{cases} 1 & T_k^{\alpha\varphi}|_1 = \dots T_k^{\alpha\varphi}|_n = \dots = T_k^{\alpha\varphi}|_N, \\ 0 & \text{иначе,} \end{cases} \tag{1.4}$$

Таким образом, последовательность $\{J_k^s\}_{k=1}^K$ представляет собой индикаторную последовательность режима Т-синхронизации.

Индикаторная последовательность служит для диагностирования временной структуры синхронизации систем. Напомним, что под этой структурой понимаются всплески синхронного поведения фазовых переменных систем, в промежутках между которыми уровень синхронности характеризуется малой величиной, т. е. перемежаемое поведение [11, 12].

Определение 1 без труда расширяется на различные многомерные варианты синхронизирующихся систем и вариантов их наблюдения (анализа).

Случай двух многомерных систем (рис. 2, а):

$$J_k^s[T_k^{\alpha\varphi}] = \prod_{(i', i'') \in I_2^1} \begin{cases} 1 & T_k^{\alpha\varphi}|_{1i'} = T_k^{\alpha\varphi}|_{2i''}, \\ 0 & \text{иначе,} \end{cases}$$

где I_2^1 — подмножество связей между системами $j=1$ и $j=2$, по которым изучается их синхронность. Как видно из структуры индекса (i', i'') , при построении индикаторной последовательности $\{J_k^s\}_{k=1}^K$ возможно формирование произвольных «связей» между различными фазовыми переменными систем.

Случай четырех многомерных систем, организованных в кольцо, но синхронизация изучается между тремя из них (рис. 2, б):

$$\begin{aligned}
 J_k^s[T_k^{\alpha\varphi}] = & \prod_{(i', i'') \in I_2^1} \begin{cases} 1 & T_k^{\alpha\varphi}|_{1i'} = T_k^{\alpha\varphi}|_{2i''}, \\ 0 & \text{иначе,} \end{cases} \times \\
 & \times \prod_{(i', i'') \in I_3^1} \begin{cases} 1 & T_k^{\alpha\varphi}|_{1i'} = T_k^{\alpha\varphi}|_{3i''}, \\ 0 & \text{иначе,} \end{cases}
 \end{aligned}$$

причем по различным наборам «физических» связей I_2^1 и I_3^1 .

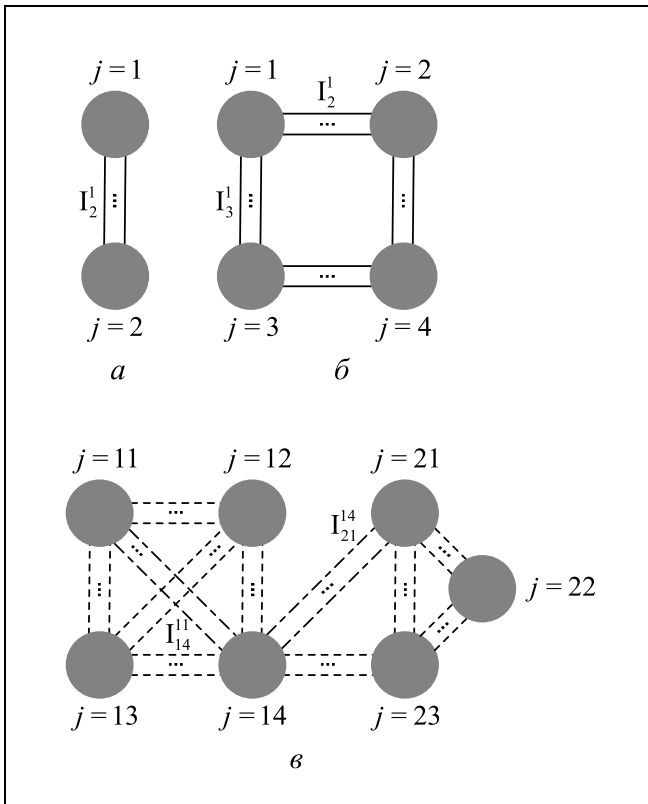


Рис. 2. Различные варианты синхронизирующихся многомерных систем. Стили связей между системами: пунктир — множество «физических» связей; сплошная линия — множество «физических» связей, по подмножеству которых оценивается синхронность систем; штрихпунктир — множество «виртуальных» связей по которым оценивается синхронность систем

Случай семи многомерных систем (рис. 2, в) организованных в две взаимодействующие группы, когда синхронизация изучается между тремя системами, входящими в различные группы и не имеющими прямых «физических» связей:

$$J_k^s [T_k^{\alpha\phi}] = \prod_{(i', i'') \in I_{14}^{11}} \begin{cases} 1 & T_k^{\alpha\phi}|_{11i'} = T_k^{\alpha\phi}|_{14i''} \\ 0 & \text{иначе,} \end{cases} \times \\ \times \prod_{(i', i'') \in I_{21}^{14}} \begin{cases} 1 & T_k^{\alpha\phi}|_{14i'} = T_k^{\alpha\phi}|_{21i''} \\ 0 & \text{иначе,} \end{cases}$$

причем по различным наборам «виртуальных» связей I_{14}^{11} и I_{21}^{14} .

Таким образом, как следует из представленных примеров, конструируя соответствующие функции на основе условия (1.4) можно исследовать Т-синхронизацию в произвольных системах с неидентичными осцилляторами произвольной размерности и с произвольной топологией связей

между ними. При этом построение индикаторной последовательности $\{J_k^s\}_{k=1}^K$ однозначно и диктуется только задачами исследований и структурой анализируемой системы.

В свою очередь, подавляющему большинству существующих методов [2—9] свойственно принципиальное ограничение — их базовые меры могут оценивать уровень синхронности только между парой скалярных величин. В случае исследования многомерных систем оценка уровня синхронности является векторной, что порождает принципиальный вопрос — правомочности применения той или иной нормы для свертки векторной оценки в скалярную. Следовательно, возникает произвол выбора, усугубляющийся в случае анализа систем неидентичных осцилляторов произвольной размерности и с произвольной топологией связей между ними. Предлагаемый метод от данного недостатка свободен, но при этом, как продемонстрировано, например, в работах [10, 26], его эффективность зачастую выше, чем у типовых анализаторов.

В работе [25] введено понятие синхронного домена SD.

Определение 2. Синхронный домен SD — совокупность отсчетов временного ряда, для которых справедливо условие

$$SD_r: \{J_{k'}^s = 1, J_{k''}^s = 0 \vee k'' = 0,$$

$$J_{k'''}^s = 0 \vee k''' = K + 1\},$$

$$k' \in \overline{b_r^{SD}, b_r^{SD} + L_r^{SD} - 1}, \quad k'' = b_r^{SD} - 1, \\ k''' = b_r^{SD} + L_r^{SD}, \quad (1.5)$$

где b_r^{SD} — момент появления, L_r^{SD} и r — длина и порядковый номер синхронного домена, $\vee$ — символ логического ИЛИ. ♦

Причем справедливо условие $L_r^{SD} \leq K$, и число синхронных доменов в индикаторной последовательности $\{J_k^s\}_{k=1}^K: R^{SD} \leq (K + 1)\text{div}2$.

Тем не менее, изучение только синхронных доменов SD — явно недостаточно для полного описания перемежаемого поведения хаотических систем при синхронизации. Чтобы представление о временной структуре синхронизма динамических систем было полным и замкнутым (полное и замкнутое представление о структуре перемежаемости), в работе [10] было дополнительно определено понятие десинхронного домена $\bar{SD}$.

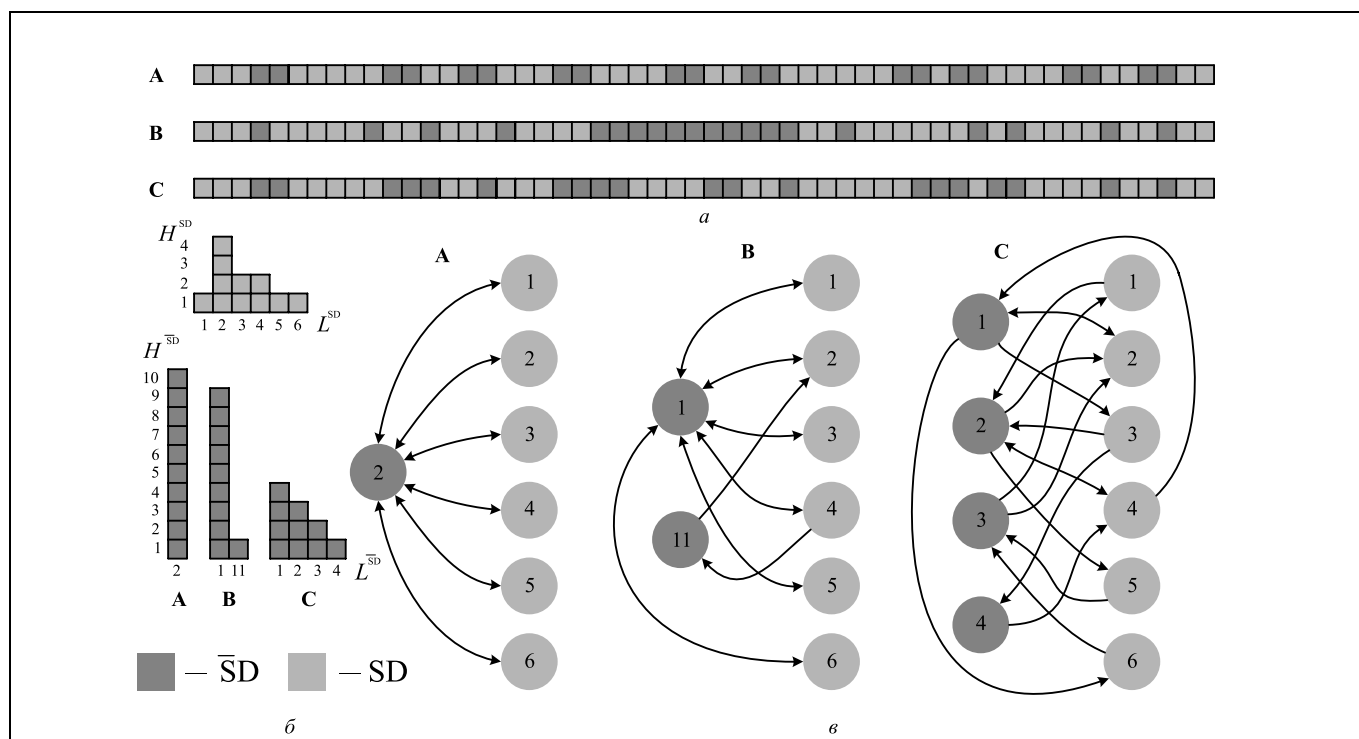


Рис. 3. Модельный пример: a — порядок следования доменов: $\bar{S}D$ — десинхронных и SD — синхронных; b — спектральные плотности десинхронных и синхронных доменов; c — граф переходов $\bar{S}D \rightarrow SD$ и $SD \rightarrow \bar{S}D$ между доменами определенной длины; буквами А, В и С обозначены три случая различных структур десинхронного поведения

Определение 3. Десинхронный домен $\bar{S}D$ — совокупность отсчетов временного ряда, для которых справедливо условие

$$\begin{aligned} \bar{S}D_r: \{J_{k'}^s = 0, J_{k''}^s = 1 \vee k'' = 0, \\ J_{k'''}^s = 1 \vee k''' = K + 1\}, \\ k' = \overline{b_r^{\bar{S}D}, b_r^{\bar{S}D} + L_r^{\bar{S}D} - 1}, \quad k'' = b_r^{\bar{S}D} - 1, \\ k''' = b_r^{\bar{S}D} + L_r^{\bar{S}D}, \end{aligned} \quad (1.6)$$

где $b_r^{\bar{S}D}$ — момент появления, $L_r^{\bar{S}D}$ и r — длина и порядковый номер десинхронного домена.

Для возможности количественного описания временной структуры синхронизации систем был введен ряд характеристик [10, 25]. Основная из них — функция спектральной плотности синхронных доменов SD

$$H^{SD}[L] = \sum_{r=1}^{R^{SD}} \delta[L_r^{SD}, L], \quad L \in \overline{1, K}, \quad (1.7)$$

где $\delta[\cdot, \cdot]$ — символ Кронекера. Отметим, что величина (1.7) естественным образом переопределяется и для доменов $\bar{S}D$.

Из вида функции (1.7) следует определение интегрального коэффициента синхронности систем:

$$\delta^s = \frac{1}{K} \sum_{i=1}^K i H^{SD}[i]. \quad (1.8)$$

Причем $\delta^s \equiv 0$ и $\delta^s \equiv 1$ — предельные случаи абсолютно десинхронных и полностью синхронных систем соответственно.

Необходимость согласованного рассмотрения десинхронных и синхронных доменов схематично проиллюстрируем модельным примером (рис. 3, a). Определим три варианта (А, В и С), имеющие одинаковый интегральный коэффициент синхронности, одинаковый набор и последовательность синхронных доменов SD , но существенно различающиеся набором и последовательностью десинхронных доменов $\bar{S}D$.

Если указанные модельные варианты сравнивать только по параметрам доменов SD , то формулируется неверный вывод об идентичности процессов синхронизации в этих случаях. Но рис. 3, a указывает на обратное. Поэтому дополнительно к доменам SD требуется рассмотрение и доменов $\bar{S}D$. Из рис. 3, b и c видно, что в случае А — все



десинхронные домены имеют длину 2 отсчета, в случае В — десинхронные домены имеют длину 2 и 11 отсчетов, причем десинхронный домен длиной 11 отсчетов единственный. Случай С — наиболее сложно устроен, помимо того, что десинхронные домены имеют четыре различные длины: 1, 2, 3 и 4 отсчета, так еще и структура переходов $\bar{S}D \leftrightarrow SD$ достаточно нетривиальна.

Таким образом, согласованный анализ параметров доменов $\bar{S}D$ и SD , а также структуры переходов $\bar{S}D \leftrightarrow SD$ позволяет получить существенно больше информации о характере перестройки структуры аттракторов и перемежаемом поведении в синхронизирующихся системах.

Как следует из ранее полученных результатов (см. работы [10, 17, 25] и приведенные в них ссылки), Т-синхронизация обнаруживается не только при прямой синхронности систем, но и при обратной, а также в режиме лаг-синхронизации. Более того, Т-синхронизация детектируется и при фазовой синхронизации (с синхронизацией временных масштабов) [26] и потенциально способна диагностироваться при обобщенной синхронизации [27].

2. ГРАФ ВРЕМЕННОЙ СТРУКТУРЫ СИНХРОНИЗАЦИИ ХАОТИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Согласованное рассмотрение десинхронных и синхронных доменов позволяет ввести в рассмотрение индикаторную последовательность временной структуры Т-синхронизации

$$\{D_r^{SS}\}_{r=1}^{R^{SS}}, \quad D_r^{SS} \in \mathbb{N}_2 = \{\bar{S}D = 0, SD = 1\}, \quad (2.1)$$

где r — номер домена, R^{SS} — число доменов, причем $R^{SS} \leq (K+1)\text{div}2$. С последовательностью (2.1) свяжем момент b_r^{SS} появления домена в индикаторной последовательности $\{J_k^s\}_{k=1}^K$ и длину L_r^{SS} домена, см. выражения (1.5) и (1.6). Формально, правило порождения последовательности (2.1) представим в виде:

$$\begin{aligned} D_r^{SS} = & \begin{cases} \bar{S}D & J_{k'}^s = 1, J_{k''}^s = 0 \vee k'' = 0, J_{k'''}^s = 0 \vee k''' = K+1, \\ SD & J_{k'}^s = 0, J_{k''}^s = 1 \vee k'' = 0, J_{k'''}^s = 1 \vee k''' = K+1, \end{cases} \\ & k' \in \overline{b_r^{SS}, b_r^{SS} + L_r^{SS} - 1}, \quad k'' = b_r^{SS} - 1, \\ & k''' = b_r^{SS} + L_r^{SS}. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Отметим, что выражение (2.2) представляет собой фактически свертку условий (1.5) и (1.6), из которой проистекает

Свойство 1. Индикаторная последовательность $\{D_r^{SS}\}_{r=1}^{R^{SS}}$ не может содержать два последовательных домена одного сорта, т. е. справедливо условие

$$D_r^{SS} \neq D_{r+1}^{SS}, \quad \forall r \in \overline{1, R^{SS} - 1}. \quad \blacklozenge$$

Переходы между доменами $\bar{S}D$ и SD в индикаторной последовательности $\{D_r^{SS}\}_{r=1}^{R^{SS}}$ можно представить в виде ориентированного графа

$$\Gamma^{SS} = \langle V^{SS}, E^{SS} \rangle,$$

где V^{SS} — множество вершин (доменов $\bar{S}D$ и SD), а E^{SS} — множество дуг (ориентированных ребер, междоменных переходов $\bar{S}D \rightarrow SD$ и $SD \rightarrow \bar{S}D$). Формально, правило для включения вершин и дуг в граф Γ^{SS} представим в виде:

$$\forall r \in \overline{1, R^{SS}},$$

$$V^{SS} \ni \bar{S}D | L^{\bar{S}D} : D_r^{SS} = \bar{S}D \wedge L^{\bar{S}D} = L_r^{SS},$$

$$V^{SS} \ni SD | L^{SD} : D_r^{SS} = SD \wedge L^{SD} = L_r^{SS}, \quad (2.3a)$$

$$\forall r \in \overline{1, R^{SS} - 1},$$

$$\begin{aligned} E^{SS} \ni \bar{S}D | L^{\bar{S}D} \rightarrow SD | L^{SD} : D_r^{SS} = \bar{S}D \wedge D_{r+1}^{SS} = \\ = SD \wedge L^{\bar{S}D} = L_r^{SS} \wedge L^{SD} = L_{r+1}^{SS}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E^{SS} \ni SD | L^{SD} \rightarrow \bar{S}D | L^{\bar{S}D} : D_r^{SS} = SD \wedge D_{r+1}^{SS} = \\ = \bar{S}D \wedge L^{SD} = L_r^{SS} \wedge L^{\bar{S}D} = L_{r+1}^{SS}. \end{aligned} \quad (2.3b)$$

Отметим, что ориентированность графа Γ^{SS} — принципиальный момент, вытекающий из структуры последовательности $\{D_r^{SS}\}_{r=1}^{R^{SS}}$, а именно, наличия порядка следования доменов.

Граф Γ^{SS} можно взвесить. Его вершины размечаются посредством частоты встречаемости (вероятностей) доменов заданной длины

$$P^{\bar{S}D}[L] = \frac{H^{\bar{S}D}[L]}{\sum_{i=1}^K H^{\bar{S}D}[i]}, \quad P^{SD}[L] = \frac{H^{SD}[L]}{\sum_{i=1}^K H^{SD}[i]},$$

а разметка дуг — через условные переходные частоты встречаемости переходов между доменами заданной длины

$$P^{\bar{S}S}[\bar{L}, L] = \frac{H^{\bar{S}S}[\bar{L}, L]}{\sum_{\bar{l}=1}^K \sum_{l=1}^K H^{\bar{S}S}[\bar{l}, l]},$$

$$P^{S\bar{S}}[L, \bar{L}] = \frac{H^{S\bar{S}}[L, \bar{L}]}{\sum_{l=1}^K \sum_{\bar{l}=1}^K H^{S\bar{S}}[l, \bar{l}]},$$

где $H^{\bar{S}S}$ и $H^{S\bar{S}}$ — спектральные плотности меж-
доменных переходов $\bar{S}D \rightarrow SD$ и $SD \rightarrow \bar{S}D$ соот-
ветственно, по аналогии функций (1.7). Полные
«вероятности» перехода определяются по фор-
мулам:

$$P^{\bar{S}S}[\bar{L}, L] = \frac{P^{\bar{S}D}[\bar{L}]P^{\bar{S}S}[\bar{L}, L]}{\sum_{\bar{l}=1}^K \sum_{l=1}^K P^{\bar{S}D}[\bar{l}]P^{\bar{S}S}[\bar{l}, l]},$$

$$P^{S\bar{S}}[L, \bar{L}] = \frac{P^{SD}[L]P^{S\bar{S}}[L, \bar{L}]}{\sum_{l=1}^K \sum_{\bar{l}=1}^K P^{SD}[l]P^{S\bar{S}}[l, \bar{l}]}.$$

Сформулируем основные утверждения относи-
тельно свойств графа Γ^{SS} .

Утверждение 1. *Граф Γ^{SS} является тривиальным, т. е. имеет место $|V^{SS}| \equiv 1$ только в двух случаях: $\delta^S \equiv 0$ или $\delta^S \equiv 1$.*

Доказательство утверждения элементарно. Рас-
смотрим случай $\delta^S \equiv 0$. Исходя из выражения (1.8),
 $H^{SD}[L^{SD}] = 0 \forall L^{SD} = \bar{1}, \bar{K}$ и $J_k^S = 0 \forall k = \bar{1}, \bar{K}$. Отсюда
следует, с учетом определения 2, что $H^{\bar{S}D}[L^{\bar{S}D} = K] \equiv 1$
и $H^{\bar{S}D}[L^{\bar{S}D} < K] \equiv 0$. Следовательно, с учетом правила
(2.3а), граф Γ^{SS} содержит единственную вершину, $|V^{SS}| \equiv 1$.
Случай $\delta^S \equiv 1$ доказывается аналогично. Во всех осталь-
ных случаях $|V^{SS}| > 1$, что доказывает требуемое.

Утверждение 2. *Граф Γ^{SS} не содержит петель.*

Доказательство утверждения построим от про-
тивного. Допустим, граф Γ^{SS} содержит петли, из чего
следует, согласно правилу (2.3а), равенство

$$\exists r: \{D_r^{SS}, L_r^{SS}\} = \{D_{r+1}^{SS}, L_{r+1}^{SS}\}. \quad (2.4)$$

Результат (2.4) противоречит свойству 1, что доказывает
требуемое. ♦

Из свойств индикаторной последовательности
 $\{D_r^{SS}\}_{r=1}^{R^{SS}}$ вытекает

Лемма 1. *Если граф Γ^{SS} не является тривиаль-
ным, т. е. отвечает условию $|V^{SS}| > 1$, то он одно-
значно слабо связный.*

Доказательство леммы проведем в несколько
шагов.

Сначала учтем, что если лемма верна, то при замене
в графе Γ^{SS} дуг неориентированными ребрами, получив-
шийся граф $\Gamma_*^{SS} = \langle V^{SS}, E_*^{SS} \rangle$ будет содержать одну и
только одну компоненту связности, т. е. для всех пар
вершин будет существовать путь. Переход к графу Γ_*^{SS}
означает замену правила (2.3б) на правило

$$\forall r \in \overline{1, R^{SS}-1},$$

$$\begin{aligned} E_*^{SS} \ni \bar{S}D|L^{\bar{S}D} &\leftrightarrow SD|L^{SD}: D_r^{SS} = \bar{S}D \wedge D_{r+1}^{SS} = \\ &= SD \wedge L^{\bar{S}D} = L_r^{SS} \wedge L^{SD} = L_{r+1}^{SS}, \\ E_*^{SS} \ni SD|L^{SD} &\leftrightarrow \bar{S}D|L^{\bar{S}D}: D_r^{SS} = SD \wedge D_{r+1}^{SS} = \\ &= \bar{S}D \wedge L^{SD} = L_r^{SS} \wedge L^{\bar{S}D} = L_{r+1}^{SS}. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Далее, примем во внимание схему формирования
графа Γ_*^{SS} : (i) — все элементы последовательности
 $\{D_r^{SS}\}_{r=1}^{R^{SS}}$ так или иначе отображаются в вершины графа
 Γ_*^{SS} , см. правило (2.3а); (ii) — ребра графа Γ_*^{SS} форми-
руются как переходы между последовательными эле-
ментами (D_r^{SS} и D_{r+1}^{SS}) последовательности $\{D_r^{SS}\}_{r=1}^{R^{SS}}$,
причем все переходы, так или иначе, отображаются в
ребра графа Γ_*^{SS} , см. правило (2.5).

Наконец, из схемы формирования графа Γ_*^{SS} сле-
дует (при его нетривиальности), что в наихудшем слу-
чае (когда все пары $D_r^{SS}|L_r^{SS}$ в последовательности
 $\{D_r^{SS}\}_{r=1}^{R^{SS}}$ различны) только две вершины, соответству-
ющие первому и последнему элементам $\{D_r^{SS}\}_{r=1}^{R^{SS}}$ име-
ют степень 1, а остальные степень 2, т. е. граф Γ_*^{SS} пред-
ставляет собой цепь, что доказывает требуемое.

Утверждение 3. *Нетривиальный граф Γ^{SS} являет-
ся двудольным.*

Доказательство утверждения основано на объ-
единении нескольких моментов. Прежде всего, заметим,
что множество вершин V^{SS} нетривиального графа Γ^{SS} , на
основании последовательности (2.1) и правила (2.3а),
можно разбить на два непересекающихся и непустых
подмножества $V_{\bar{S}D}^{SS} \ni \bar{S}D$ и $V_{SD}^{SS} \ni SD$, которые включают



в себя только десинхронные и синхронные домены соответственно.

Далее, исходя из правила (2.36) и свойства 1, не существует дуг, которые соединяют вершины в пределах одного подмножества V_{SD}^{SS} или V_{SD}^{SS} . Также, на основании утверждения 2, в нетривиальном графе Γ^{SS} отсутствуют петли.

Наконец, в силу леммы 1, нетривиальный граф Γ^{SS} — слабо связный, т. е. не имеет изолированных вершин.

Объединение сформулированных результатов доказывает требуемое. ♦

Исходя из свойства двудольности графа Γ^{SS} (см. утверждение 3), максимально возможное число дуг в нем определяется по формуле

$$\hat{N}_E^{SS} = 2 N_V^{\bar{SD}} N_V^{SD},$$

где $N_V^{\bar{SD}}$ — число вершин сорта $\bar{SD}$, N_V^{SD} — число вершин сорта SD .

В заключение данного параграфа отметим, что граф Γ^{SS} при исследовании временной структуры синхронизации хаотических колебаний, потенциально открывает широкие возможности по применению инструментария теории сетей [18, 28–32] с привлечением методов статистической физики [33] и символической динамики [21–24]. Отметим, что эти вопросы составляют предмет наших текущих исследований.

3. ПРИМЕР

Применим предложенный подход к изучению временной структуры синхронизации хаоса для исследования процесса выхода из режима полной синхронизации хаоса в системе двух однонаправленно связанных логистических отображений:

$$x_{k+1} = 4\lambda x_k(1 - x_k),$$

$$y_{k+1} = 4\lambda[y_k + \gamma(x_k - y_k)](1 - [y_k + \gamma(x_k - y_k)]), \quad (3.1)$$

где x_k и y_k — переменные состояния соответственно ведущего и ведомого процессов, $x, y \in (0, 1)$; $\gamma \in [0, 1]$ — параметр связи между процессами; $\lambda \in (0, 1]$ — управляющий параметр, задающий режим колебаний.

Система связанных логистических отображений представляет собой одну из популярных моделей нелинейной динамики при изучении хаотической синхронизации (см. работы [10, 19, 34]) и приведенные в них ссылки. Ее теоретическое значение обусловлено тем, что при относительной простоте логистического отображения порождает широкий спектр сложных, в том числе и хаотических колебательных режимов [20, 35], переход к которым осуществляется через классический сценарий удвоения периода. А с учетом универсальности Фейгенбаума многие результаты распространяются на широкий класс как модельных, так и реальных физичес-

ких, биофизических, химических и других систем, что обуславливает и прикладной интерес к логистическому отображению [35, 36].

Параметры Т-синхронизации рассчитывались на интервале $k \in [1, 2] \times 10^5$. Подобный сдвиг от значения $k = 1$ объясняется необходимостью сведения паразитного влияния переходного процесса к минимуму. Кроме того, все оценки анализируемых величин усреднялись по 10^3 реализациям начальных условий: $x_1 = \xi_1$, $y_1 = \xi_2$, где $\xi_1, \xi_2 \in (0, 1)$ — некоррелированные равномерно распределенные псевдослучайные величины. Это позволило нейтрализовать на траекториях процессов x и y эффект памяти индуцированный начальными условиями. Значение параметра связи изменялось на интервале $\gamma \in [0, 0,5]$ с дискретностью 1×10^{-4} . Значение управляющего параметра было принято $\lambda = 0,95$ — режим существования в модели (3.1) развитого хаоса [36]. Необходимо отметить, что согласно результатам работы [20] — окончательное качественное усложнение хаотической траектории происходит при $\lambda = 0,98805...$ Тем не менее, выбранное значение управляющего параметра объясняется необходимостью взаимного анализа и согласования результатов, полученных в настоящей работе, с результатами работ [10, 19, 34].

Ранее было установлено, что при $\gamma \geq \gamma_{rb} = 0,38$ в системе реализуется грубый режим полной синхронизации, в точке $\gamma_{bb} = 0,35$ устанавливается негрубый режим полной синхронизации, который существует на интервале $\gamma_{bb} \leq \gamma < \gamma_{rb}$, а значение $\gamma_s = 0,0191$ можно считать статистически значимым порогом возникновения Т-синхронизации в системе (3.1). На шкале параметра связи отмечены еще четыре точки, ответственные за различные перестройки структуры аттрактора: $\gamma_{wm} = 0,0639$, $\gamma_{ws} = 0,14$, $\gamma_{r1} = 0,2606$ и $\gamma_{r2} = 0,2755$. Так, при γ_{ws} в аттракторе фиксируется неустойчивое квазипериодическое движение, на котором траектория проводит значительную часть времени [34] (см. также [10]), а при γ_{r1} траектория ведомой системы (y) содержит максимальную концентрацию релаксационных колебаний, отсутствующих в ведущей системе (x) [19].

Отметим, что построение критических интервалов производилось по эмпирическим функциям распределения рассчитываемых характеристик. Верхний и нижний квантили строились как двусторонние порядков $1 - \alpha/2$ и $\alpha/2$ соответственно. Уровень статистической значимости принят $\alpha = 10^{-3}$. При этом в качестве оценки средней величины исследуемых характеристик в работе используется медиана, как более робастный индикатор, нежели арифметическое среднее [37].

Далее показан анализ системы (3.1) с позиций изучения характеристик графа временной структуры синхронизации. На рис. 4 приведен график зависимости числа вершин в графе Γ^{SS} от параметра связи γ .

Из рисунка видно, что характер поведения кривых для десинхронных и синхронных доменов идентичен в районе γ_{bb} . Это связано с вырождением числа доменов при наступлении негрубого режима полной синхрони-

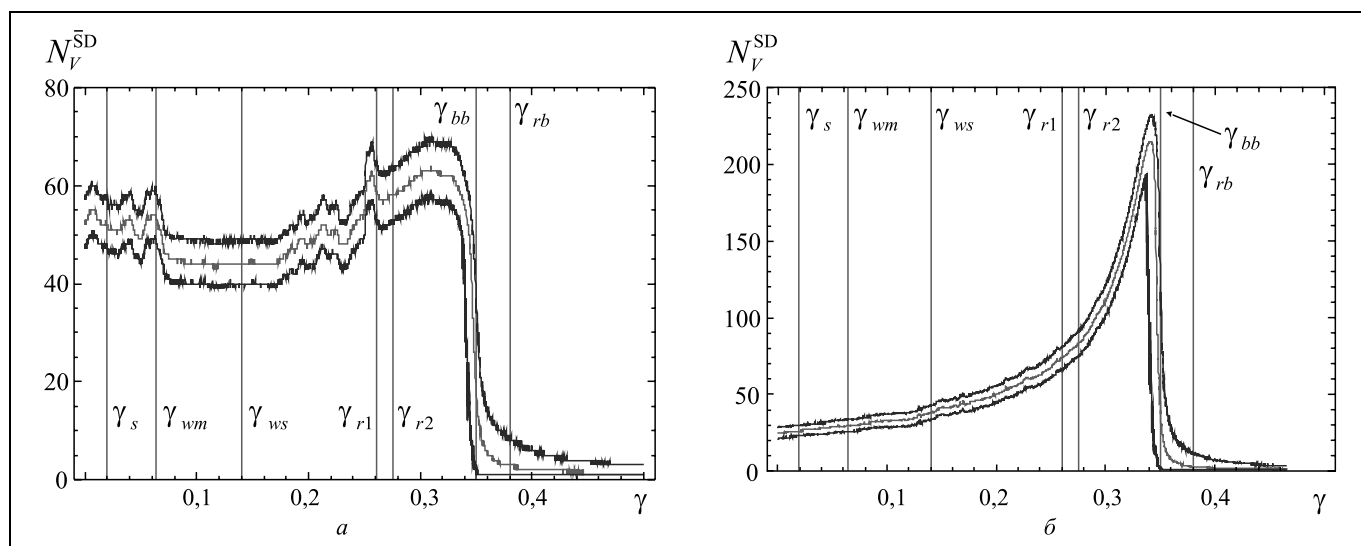


Рис. 4. Зависимость числа вершин в графе Γ^{SS} от параметра γ для десинхронных (а) и синхронных (б) доменов

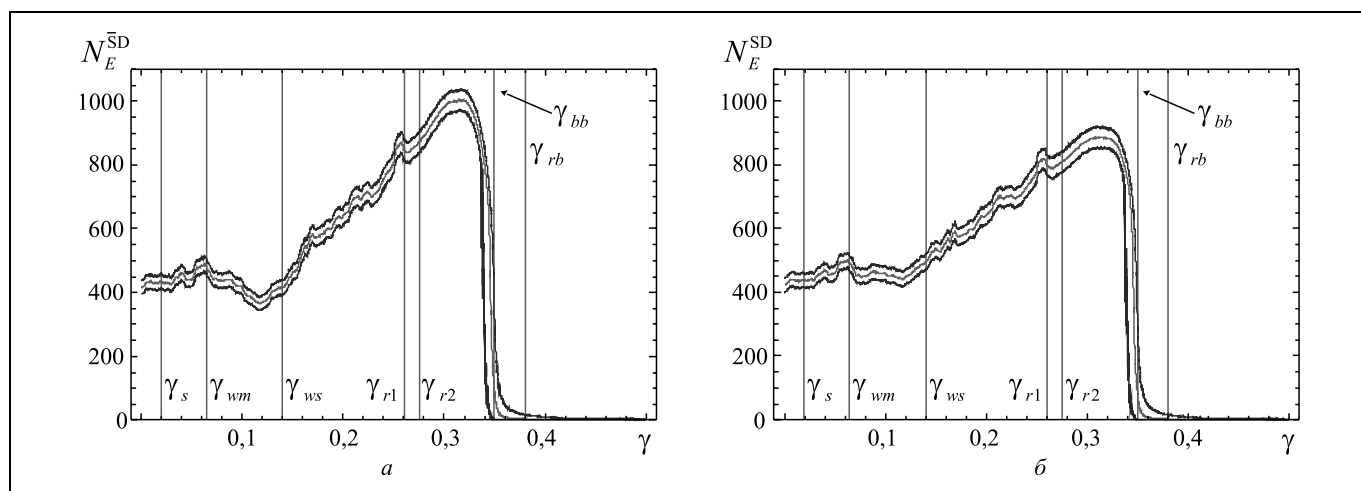


Рис. 5. Зависимость числа дуг в графе Γ^{SS} от параметра γ : а — $\bar{SD} \rightarrow SD$; б — $SD \rightarrow \bar{SD}$

зации, подробнее см. работу [10]. При этом вид кривых существенно разнится в зоне $\gamma < \gamma_{bb}$, где число вершин сорта $\bar{SD}$ (см. рис. 4, а) демонстрирует статистически значимые флуктуации, в частности в зоне γ_{ws} и γ_{r1} .

Зависимости числа дуг в графе Γ^{SS} от параметра связи приведены на рис. 5. Из графиков видно, что зависимости в принципе «качественно» подобны, отличаясь некоторыми количественными значениями. При этом также наблюдается существенное снижение количества междоменных переходов при наступлении негрубого режима полной синхронизации, что в первую очередь обусловлено собственно снижением количества доменов.

На рис. 6 приведены зависимости среднего числа исходящих дуг на вершину в графе Γ^{SS} от параметра

связи γ . Усредненные величины вычислялись по формулам:

$$\tilde{D}_{Eout}^{\bar{SD}}(\gamma) = \frac{N_E^{\bar{SD}}(\gamma)}{N_V^{\bar{SD}}(\gamma)}, \quad \tilde{D}_{Eout}^{SD}(\gamma) = \frac{N_E^{SD}(\gamma)}{N_V^{SD}(\gamma)}. \quad (3.2)$$

Величины (3.2) позволяют в определенной мере нейтрализовать в характеристиках $N_E^{\bar{SD}}$ и N_E^{SD} эффекты, вызванные повышением числа доменов, и выделить собственно структурные эффекты, что подтверждается рис. 6. Характерно, что до момента γ_{bb} разнообразие по междоменным переходам $\bar{SD} \rightarrow SD$ нарастает, а по переходам $SD \rightarrow \bar{SD}$ снижается. При этом истинная исхо-

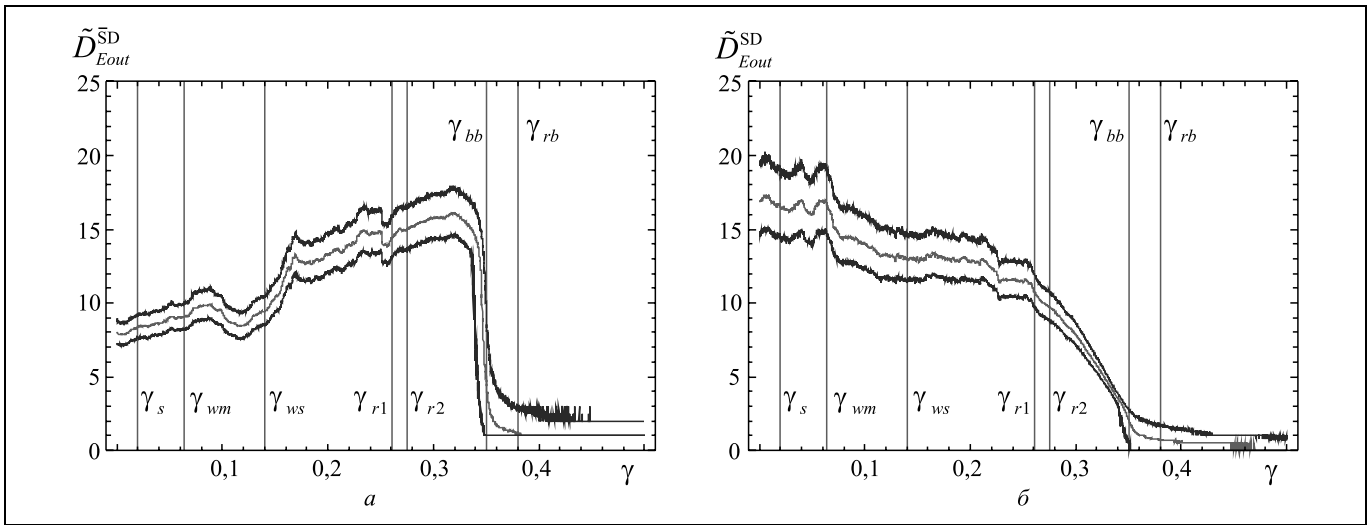


Рис. 6. Зависимость среднего числа исходящих дуг на вершину в графе Γ^{SS} от параметра γ : а — $\bar{SD}$; б — SD

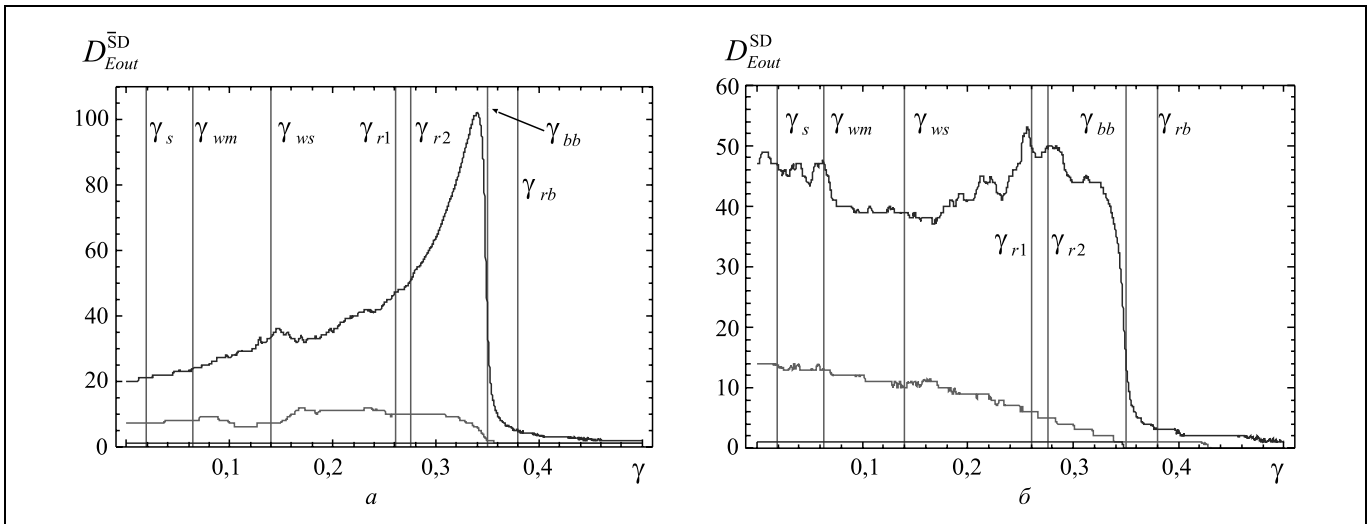


Рис. 7. Зависимость исходящей степени вершин графа Γ^{SS} от параметра γ : а — $\bar{SD}$; б — SD

дящая степень вершин в графе Γ^{SS} , которая приведена на рис. 7 существенно отличается от усредненных значений, показанных на рис. 6. Но, качественно, поведение кривых на рис. 7 в общем-то соответствует кривым на рис. 6 (в том числе в части разнообразия междоменных переходов).

Отметим, что здесь и далее для упрощения первичного анализа все характеристики графов, формирующих оценки для индивидуальных вершин, усреднялись в пределах графа.

На рис. 8 приведена входящая степень вершин в графе Γ^{SS} . Сопоставление рис. 7 и 8 показывает качественную симметричность графа Γ^{SS} (по распределению входящих и исходящих дуг) для системы (3.1), находящейся

в режиме полной синхронизации. Правда, стоит отметить некоторые отличия вблизи γ_{ws} , где фиксируется неустойчивое квазипериодическое движение [34].

Плотность графа Γ^{SS} по исходящим дугам приведена на рис. 9. Эта величина вычисляется по формуле:

$$P_{Eout}^{\bar{SD}}(\gamma) = 2 \frac{N_E^{\bar{SD}}(\gamma)}{\hat{N}_E^{SS}(\gamma)}, \quad P_{Eout}^{SD}(\gamma) = 2 \frac{N_E^{SD}(\gamma)}{\hat{N}_E^{SS}(\gamma)}.$$

Как следует из рис. 9, плотность графа Γ^{SS} до момента γ_{bb} в общем-то достаточно монотонно снижается. Исключение составляет локальное «проседание» характеристики $P_{Eout}^{\bar{SD}}$ в зоне γ_{ws} . Границы этого эффекта совпа-

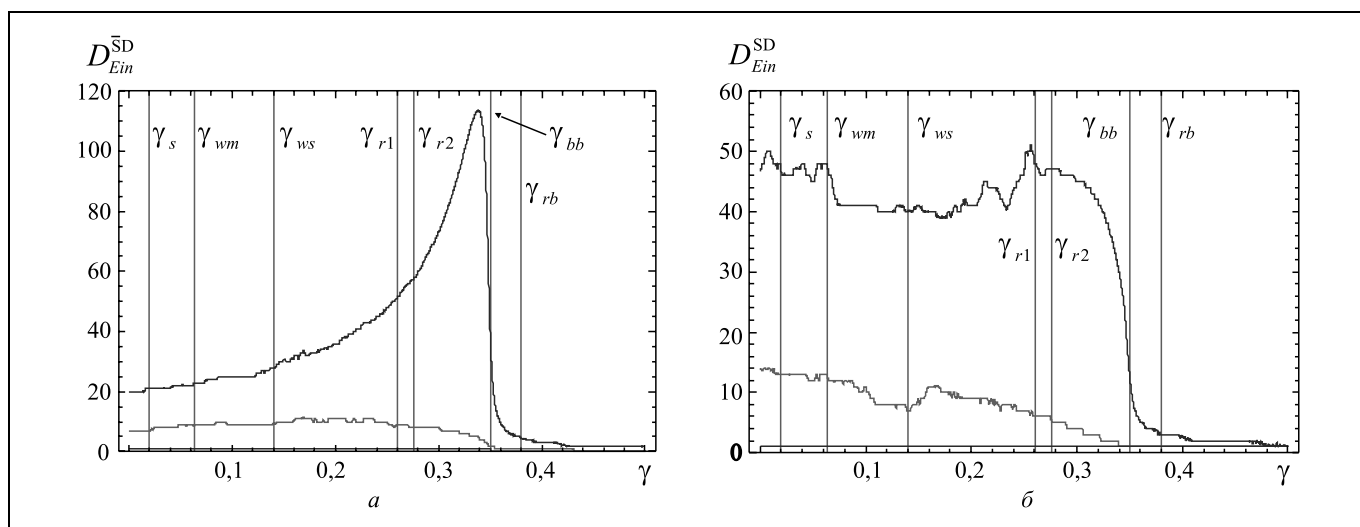


Рис. 8. Зависимость входящей степени вершин графа Γ^{SD} от параметра γ : a — $\bar{SD}$; b — SD

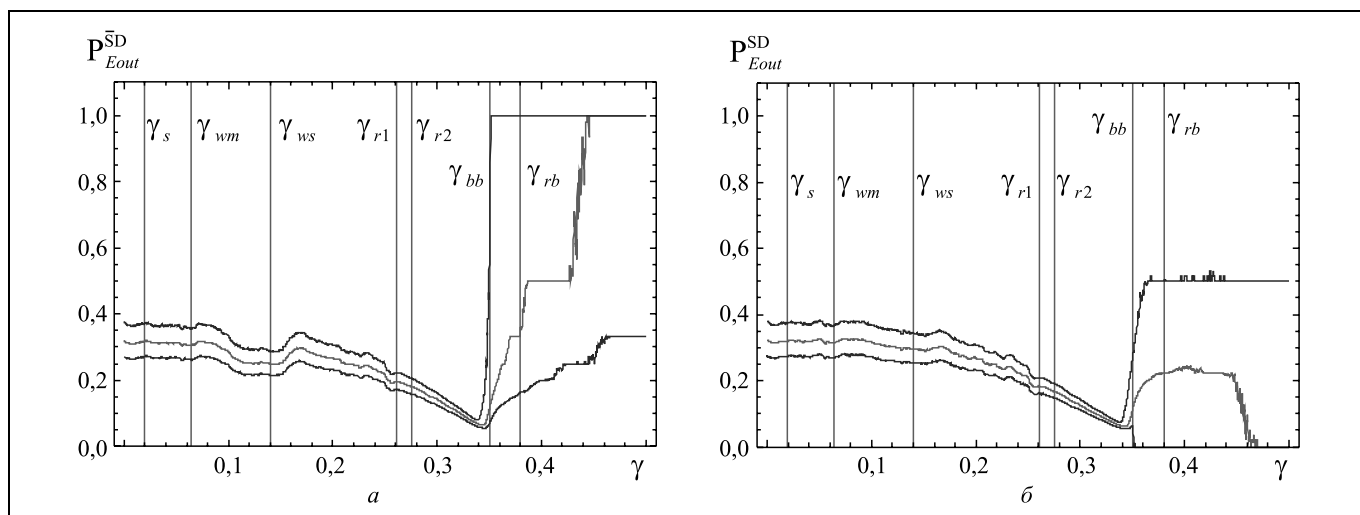


Рис. 9. Зависимость плотности графа Γ^{SS} от параметра γ : a — $\bar{SD} \rightarrow SD$; b — $SD \rightarrow \bar{SD}$

дают с границами гребенчатого спектра $H^{\bar{SD}}$, подробнее см. в работе [10].

Весьма важный класс характеристик графа составляют различные показатели его центральности [31, 32]. Основными считаются четыре [32]: degree (по степени); betweenness (по посредничеству); closeness (по близости) и eigenvector (по собственному вектору). Первый из них основывается на степенях вершин, которые были уже рассмотрены ранее (см. рис. 7 и 8). Три оставшихся подробнее изучаются далее.

Зависимость центральности по посредничеству от параметра связи приведена на рис. 10, a . Характеристика C_B^{SS} выражает, сколько кратчайших путей между

всеми вершинами графа Γ^{SS} проходит через определенную вершину. Если у какого-либо узла высокий уровень C_B^{SS} , можно предположить, что он — единственная связь между различными частями графа [32]. При анализе графа Γ^{SS} центральность по посредничеству позволяет судить, насколько связь между двумя доменами зависит от третьего домена.

Зависимость центральности по близости для различных значений приведена на рис. 10, b . Параметр C_C^{SS} выражает, насколько близко та или иная вершина графа Γ^{SS} расположена к остальным вершинам [32], т. е. он позволяет судить, насколько тот или иной домен связан с остальными.

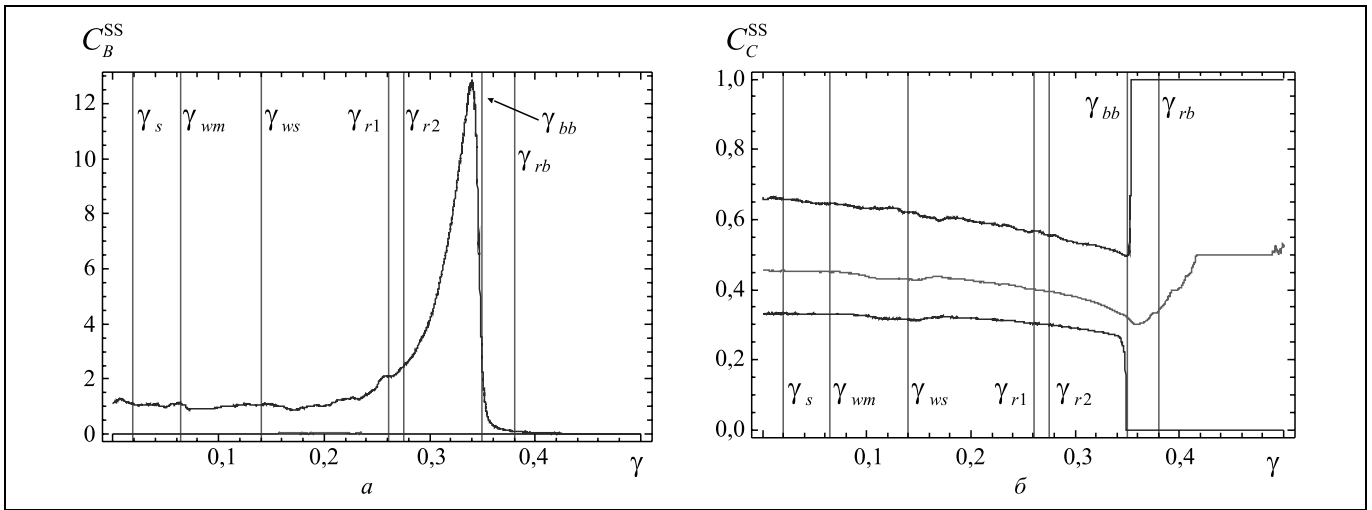


Рис. 10. Зависимость параметров графа Γ^{SS} от параметра γ : a — центральность «betweenness»; b — центральность «closeness»

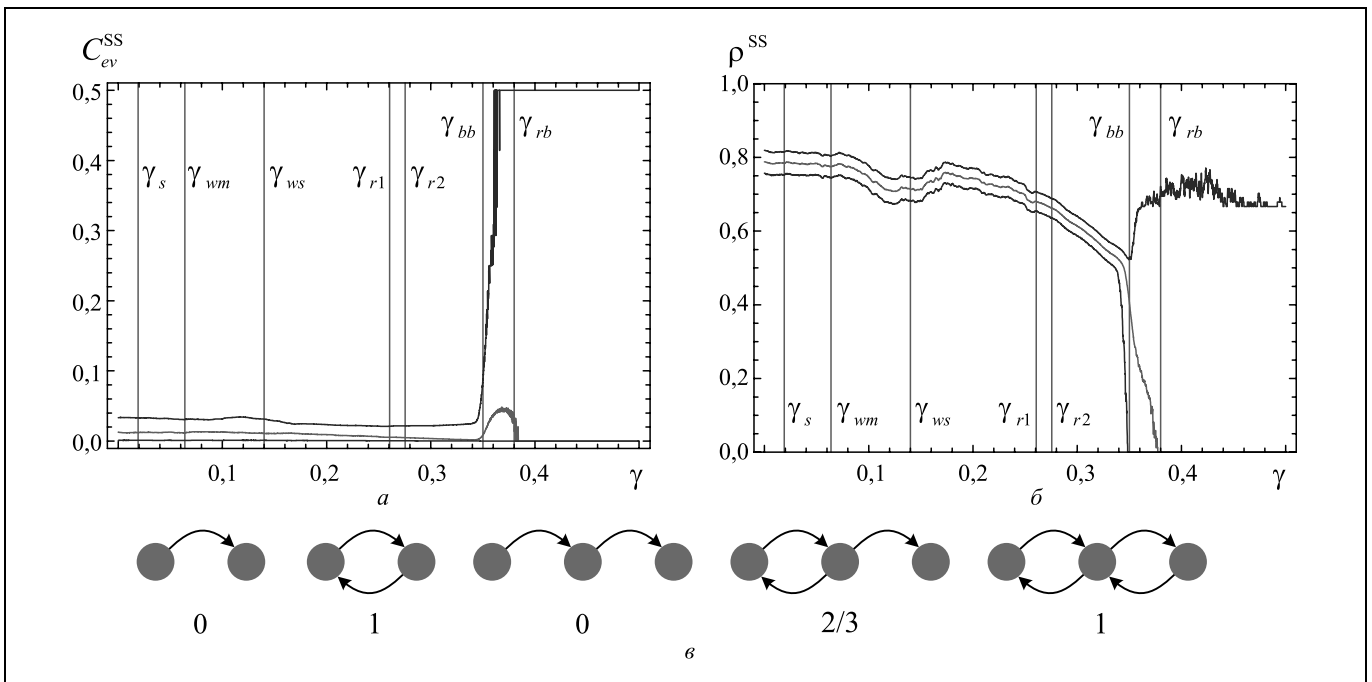


Рис. 11. Зависимость параметров графа Γ^{SS} от параметра γ : a — центральность по собственному вектору; b — Graph Reciprocity [37]; ϵ — демонстрация сути величины ρ^{SS}

И, наконец, зависимость от параметра связи центральности по собственному вектору приведена на рис. 11, a . Характеристика C_{ev}^{SS} демонстрирует зависимость между центральностью вершины и центральностями ее ближайших соседей в графе Γ^{SS} [32]. Отметим, что ближайшими соседями вершины в графе являются такие вершины, которые связаны с ней дугами. Интерпретировать параметр C_{ev}^{SS} в контексте графа Γ^{SS} можно

таким образом: домен, имеющий много связей с другими доменами, у которых также много связей, имеет высокую центральность по собственному вектору.

Необходимо отметить, что некая тривиальность рис. 10 и 11, a скорее всего вызвана существенным ростом числа вершин в графе Γ^{SS} а области $\gamma < \gamma_{bb}$, что потенциально маскирует структурные эффекты (аналогично ситуации с параметрами N_E^{SD} и N_E^{SD}). Следовательно

но, требуется модификация стандартных мер центральности [31, 32], позволяющая корректно сравнивать графы различных размеров и потенциально выявлять эффекты, связанные с перестройкой аттракторов при изменении характера и режима синхронизации.

Дополнительно также рассмотрим такую характеристику, как Graph Reciprocity [38]. Модельный пример, иллюстрирующий смысл величины ρ^{SS} , приведен на рис. 11, в. Зависимость ρ^{SS} от параметра связи для системы (3.1) приведена рис. 11, б, из которого следует, что параметр ρ^{SS} «видит» неустойчивое квазипериодическое движение на аттракторе при γ_{ws} .

В заключение данного параграфа отметим три момента.

- Помимо приведенных, были рассмотрены и другие характеристики, отражающие те или иные свойства графа Γ^{SS} . Но для системы (3.1) они оказались слабоинформативными в части анализа режимов синхронизации хаотических колебаний.
- Из полученных результатов следует, что многие характеристики графа Γ^{SS} устойчиво реагируют на перестроения аттракторов в системе (3.1) при установлении различных режимов синхронизации хаотических колебаний.
- Проведенное исследование следует дополнить, сняв ограничение в виде изучения только дескриптивных характеристик (медианы и квантилей) и усреднения оценок для индивидуальных вершин в пределах графа. Представляется, что подобное развитие потенциально способно существенно улучшить аналитические возможности инструментария, вплоть до идентификации на качественном уровне типов бифуркационных перестроений аттрактора. Однако, данный вопрос требует дополнительных исследований.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе получил дальнейшее развитие метод диагностирования синхронизации хаотических колебаний, основанный на так называемой Т-синхронизации [10, 25–27]. Существенное отличие рассмотренного подхода от аналогов заключается в способности разработанного инструментария количественно анализировать характеристики временной структуры синхронизации нелинейных систем [10] через перемежаемость [11, 12]. Кроме того, в отличие от подавляющего большинства существующих методов, подход на основе Т-синхронизации может быть с успехом применен для исследования многомерных систем, состоящих из двух и более связанных неидентичных осцилляторов, в том числе и их многомерных решеток с произвольной топологией. Так, пример анализа Т-синхронизации в трехмерных системах приведен в работе [26].

В данной работе впервые продемонстрирован анализ временной структуры Т-синхронизации с позиции теории графов, посредством исследования метрических и топологических характеристик графа Γ^{SS} . Причем в качестве изучаемого примера намеренно выбрана система связанных логистических отображений. С одной стороны она является хорошо изученной моделью (см. работы [10, 34, 35] и приведенные в них ссылки), с другой — из-за универсальности Фейгенбаума — многие результаты с этого отображения распространяются на широкий класс других систем различной природы [35, 36].

Из совокупности полученных результатов следует, что анализ метрических и топологических характеристик графа Γ^{SS} оказывается весьма чувствительным инструментом, позволяющим обнаруживать негрубость режима синхронизации и наличие бифуркационных смен режимов и/или характера синхронизации. Кроме того, инструментарий на основе символического СТQ-анализа позволяет проводить комплексное исследование синхронизма хаотических колебаний, включая обнаружение запаздывания между системами и инверсные эффекты между их фазовыми переменными.

Однако укажем и на основные недостатки предложенного подхода к диагностированию синхронизации хаотических колебаний. Метод в настоящий момент не позволяет дифференцировать и определять тип бифуркационных изменений аттрактора [13, 22] и качественный характер режима синхронизации. Устранение данных недостатков составляет предмет наших дальнейших исследований.

В заключение отметим, что рассмотренный подход, основанный на положениях символического СТQ-анализа [19, 20], может быть применен для анализа экспериментальных данных, поскольку не требует каких-либо априорных знаний об изучаемой системе. Более того, инвариантность символического анализатора к сдвигам и растяжениям фазовых траекторий [20] позволяет исследовать синхронизацию сильно нестационарных систем. Вполне возможно, это позволит эффективно применять предложенную методику для анализа многомерных временных рядов, порождаемых физическими и техническими [1, 2, 12], физиологическими и биологическими [14, 15], финансовыми [16, 17, 18, 27] и другими системами.

Автор благодарен рецензентам за ряд критических замечаний, учет которых позволил улучшить изложение материала статьи.



ЛИТЕРАТУРА

1. *Pikovsky A.S., Rosenblum M.G., Kurths J.* Synchronization: a universal concept in nonlinear sciences. — Cambridge: Cambridge University Press, 2001.
2. *The synchronization of chaotic systems / S. Boccaletti, J. Kurths, G.V. Osipov, et al.* // *Physics Reports*. — 2002. — Vol. 366. — P. 1—101.
3. *Abarbanel H.D.I., Rulkov N.F., Sushchik M.M.* Generalized synchronization of chaos: The auxiliary system approach // *Phys. Rev. E*. — 1996. — Vol. 53. — P. 4528—4535.
4. *Pecora L.M., Carroll T.L.* Synchronization in chaotic systems // *Phys. Rev. Lett.* — 1990. — Vol. 64. — P. 821—824.
5. *Liu W., Qian X., Yang J., et al.* Antisynchronization in coupled chaotic oscillators // *Phys. Lett. A*. — 2006. — Vol. 354. — P. 119—125.
6. *Rosenblum M.G., Pikovsky A.S., Kurths J.* From Phase to Lag Synchronization in Coupled Chaotic Oscillators // *Phys. Rev. Lett.* — 1997. — Vol. 78. — P. 4193—4196.
7. *Анищенко В.С., Постнов Д.Э.* Эффект захвата базовой частоты хаотических автоколебаний. Синхронизация странных аттракторов // *Письма в ЖТФ*. — 1988. — Т. 14. — С. 569—573.
8. *Pikovsky A.S., Rosenblum M.G., Kurths J.* Phase synchronization in regular and chaotic systems // *Int. J. of Bifurcation and Chaos*. — 2000. — Vol. 10. — P. 2291—2305.
9. *Короновский А.А., Храмов А.Е.* Анализ хаотической синхронизации динамических систем с помощью вейвлетного преобразования // *Письма в Журнал эксперимент. и теорет. физики*. — 2004. — Т. 79. — С. 391—395.
10. *Макаренко А.В.* Исследование временной структуры синхронизации в многомерных хаотических системах // *Журнал эксперимент. и теорет. физики*. — 2015. — Т. 147. — С. 1053—1063.
11. *Зельдович Я.Б., Молчанов С.А., Рузмайкин А.А., Соколов Д.Д.* Пережимаемость в случайной среде // *Успехи физических наук*. — 1987. — Т. 152. — С. 3—32.
12. *Mandelbrot B.B.* Intermittent turbulence in self-similar cascades: divergence of high moments and dimension of the carrier // *J. Fluid Mech.* — 1974. — Vol. 62. — P. 331—358.
13. *Брур Х.В., Дюмортье Ф., ван Стрин С., Такенс Ф.* Структуры в динамике. — М.: Ижевск: ИКИ, 2003. — 336 с.
14. *Борисов С.В., Каплан А.Я., Горбачевская Н.Л., Козлова И.А.* Анализ структурной синхронности ЭЭГ подростков, страдающих расстройствами шизофренического спектра // *Физиология человека*. — 2005. — Т. 31. — С. 16—23.
15. *Symbolic analysis of 24h holter heart period variability series: comparison between normal and heart failure patients / A. Porta, G. D'Addio, Pinna G.D., et al.* // *Computers in Cardiology*. — 2005. — Vol. 32. — P. 575—578.
16. *Tino P., Schittenkopf C., Dorffner G.* Temporal pattern recognition in noisy non-stationary time series based on quantization into symbolic streams: Lessons learned from financial volatility trading // *Pattern Analysis & Applications*. — 2001. — Vol. 4. — P. 283—311.
17. *Makarenko A.V.* Symbolic CTQ-analysis — a new method for studying of financial indicators // *Intern. Conf. «Advanced Finance and Stochastics»*. Moscow, 24—28 June 2013, Steklov Mathematical Institute. — М., 2013. — P. 63—64.
18. *Fiedor P.* Networks in financial markets based on the mutual information rate // *Phys. Rev. E*. — 2014. — Vol. 89. — 052801.
19. *Макаренко А.В.* Символический анализ в пространстве «скорость — кривизна» структуры хаоса в режиме синхронизации // *Письма в Журнал техн. физики*. — 2012. — Т. 38. — С. 1—9.
20. *Макаренко А.В.* Символический анализ в пространстве «скорость-кривизна» многомерных динамических процессов // *Журнал вычисл. матем. и матем. физ.* — 2012. — Т. 52. — С. 1248—1260.
21. *Боуэн Р.* Методы символической динамики. — М.: Мир, 1979.
22. *Gilmore R., Lefranc M.* The topology of chaos. — N.-Y.: John Wiley & Sons, 2002.
23. *Hsu C.S.* Cell-to-Cell Mapping: A method of Global Analysis for Nonlinear Systems. — N.-Y.: Springer-Verlag, 1987.
24. *Dellnitz M., Hohmann A.* A subdivision algorithm for the computation of unstable manifolds and global attractors // *Numerische Mathematik*. — 1997. — Vol. 75. — P. 293—318.
25. *Макаренко А.В.* Мера синхронности многомерных хаотических последовательностей на основе их символического представления в Т-алфавите // *Письма в Журнал техн. физики*. — 2012. — Т. 38. — С. 53—60.
26. *Макаренко А.В.* Исследование фазовой синхронизации хаотических колебаний в терминах символического СТQ-анализа // *Журнал техн. физики*. — 2016. — Т. 86. — С. 110—118.
27. *Makarenko A.V.* Generalized synchronization of multidimensional chaotic systems in terms of symbolic CTQ-analysis // *The 8th Chaotic Modeling and Simulation International Conference / Book of Abstracts*. — Paris: ISAST; IHP. — 2015. — P. 77—78.
28. *Battiston F., Nicosia V., Latora V.* Structural measures for multiplex networks // *Phys. Rev. E*. — 2014. — Vol. 89. — 032804.
29. *Davidson J., Grassberger P., Paczuski M.* Networks of recurrent events, a theory of records, and an application to finding causal signatures in seismicity // *Phys. Rev. E*. — 2008. — Vol. 77. — 066104.
30. *Mathematical Formulation of Multilayer Networks / M. Domenico, A. Sole-Ribalta, E. Cozzo, et al.* // *Phys. Rev. X*. — 2013. — Vol. 3. — 041022.
31. *Newman M.E.J.* Networks: An Introduction. — Oxford, UK: Oxford University Press, 2010.
32. *Network Analysis: Methodological Foundations, Lecture Notes in Computer Science 3418 / U. Brandes, T. Erlebach (Eds.).* — N.-Y.: Springer-Verlag, 2005.
33. *Bianconi G.* Statistical mechanics of multiplex networks: Entropy and overlap // *Phys. Rev. E*. — 2013. — Vol. 87. — 062806.
34. *Количество информации как мера синхронизации хаоса / А.В. Шабунин, В.В. Демидов, В.В. Астахов и др.* // *Письма в Журнал техн. физики*. — 2001. — Т. 27. — С. 78—85.
35. *Mosekilde E., Maistrenko Yu., Postnov D.* Chaotic synchronization: Applications to living systems. (World Sci. Ser. Nonlinear Sci. Ser. A Monogr. Treatises, vol. 42.) River Edge. — N.J.: World Sci. Publ., 2002.
36. *Фейгенбаум М.* Универсальность в поведении нелинейных систем // *Успехи физических наук*. — 1983. — Т. 141. — С. 343—374.
37. *Леман Э.* Проверка статистических гипотез. — М.: Наука, 1979.
38. *Garlaschelli D., Loffredo M.I.* Patterns of Link Reciprocity in Directed Networks // *Phys. Rev. Lett.* — 2004. — Vol. 93. — 268701.

Статья представлена к публикации членом редколлегии П.Ю. Чеботаревым.

Макаренко Андрей Викторович — канд. техн. наук, ст. науч. сотрудник, Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН; руководитель, Науч.-исслед. группа «Конструктивная Кибернетика», г. Москва, ✉ avm.science@mail.ru.