

# МЕТРИЗАЦИЯ Т-АЛФАВИТА: ИЗМЕРЕНИЕ РАССТОЯНИЯ МЕЖДУ МНОГОМЕРНЫМИ ВЕЩЕСТВЕННЫМИ ДИСКРЕТНЫМИ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЯМИ

А.В. Макаренко

Для дискретных вещественных последовательностей предложена мера их сходства в расширенном пространстве состояний. Мера основана на методах символического СТQ-анализа и применима в том числе к хаотическим и стохастическим многомерным неэквидистантным временным рядам. Проведен анализ предложенных метрик и описаны их базовые свойства. Эффективность метода проверена на модельных системах, отличающихся топологией и сложностью аттрактора. Продемонстрирована высокая чувствительность разработанных мер сходства на примере анализа финансовых временных рядов.

**Ключевые слова:** дискретные последовательности, Т-алфавит, метрическое множество, символический анализ, финансовые временные ряды, осциллятор Ресслера.

## ВВЕДЕНИЕ

Множество прикладных аспектов анализа динамических процессов и систем, в том числе и в задачах управления, так или иначе связано с конечными временными рядами — дискретными полупоследовательностями вида  $\{s_k\}_{k \in K}$ , где  $s$  — переменная состояния динамического процесса (системы),  $s \in S \subset \mathbb{R}^N$ ;  $N$  — размерность пространства состояний процесса (системы),  $n = \overline{1, N}$ ;  $k$  — дискретное время,  $k \in K = \overline{0, K}$ ,  $K \subset \mathbb{R}$ ,  $K < +\infty$ . При этом каждому  $k$ -му отсчету может быть сопоставлен момент «физического» времени  $t_k$ . С данными полупоследовательностями тесно связаны дискретные отображения (модели) вида

$$s_{k+1} = f(s_k, p), \quad p \in P \subset \mathbb{R}^L; \quad l = \overline{1, L}, \quad (B.1)$$

где  $p$  — вектор параметров модели,  $L$  — размерность пространства параметров модели. Заметим, что дискретные динамические системы в форме (B.1) являются таким классом объектов, изучение

свойств которых важно как с фундаментальной точки зрения, так и с прикладных позиций.

Хорошо известно, что весьма мощным инструментом исследования динамических систем, заданных в виде (B.1), а также динамических процессов в форме  $\{s_k\}_{k \in K}$  служат методы символической динамики [1–3]. При этом возможности символического анализа [4–6] полностью раскрываются на детерминированных системах вида (B.1), траектории  $\{s_k\}_{k \in K}$  которых демонстрируют аналогию со случайными процессами, или являются хаотическими [7, 8].

В контексте данной парадигмы автором разрабатывается символический СТQ-анализ (аббревиатура СТQ обозначает три алфавита, которыми оперирует метод: С, Т и Q) [9], который направлен на исследование различных свойств динамических систем и процессов с позиций формы (структуры геометрии) траекторий систем в расширенном пространстве состояний  $S \times K$ . Под формой (структурой геометрии) траектории динамической системы в расширенном фазовом пространстве понимается некий ее инвариант, сохраняющийся при однородных сдвигах и растяжениях траектории в пространстве фазовых переменных [9].



Предложенный метод на данный момент имеет три конструктивных расширения: Т-синхронизация хаотических колебаний [10]; ТQ-бифуркации в дискретных динамических системах [11]; ТQ-сложность хаотических последовательностей [12]. В связи с разработкой ряда других расширений (в том числе предсказание эволюции траекторий и управление динамикой систем) возникает естественная задача о метризации Т-алфавита (введение функции расстояния между символами), который является базовым для данного метода символического анализа.

Отметим, что один из важных вопросов динамики хаотических и/или стохастических систем заключается в количественном оценивании степени близости (сходства) их траекторий, что в большинстве прикладных случаев выражается в анализе конечных временных рядов вида  $\{s_k\}_{k \in K}$ . Под эту задачу разработано множество подходов. Наиболее широко применяемые: коэффициент корреляции Пирсона — измеряет силу связи между двумя процессами в линейном приближении, требует нормальности анализируемых процессов; коэффициент корреляции Спирмена — также измеряет силу связи между двумя процессами в линейном приближении, является непараметрическим, но теряет точность при большом числе одинаковых рангов в одной или обеих выборках. В данном контексте, определение метрических свойств Т-алфавита обретает также самостоятельную ценность, так как на основе этой метрики возможен синтез меры для оценивания сходства дискретных последовательностей (траекторий систем), причем в силу ряда свойств Т-алфавита, в том числе и между сильно нестационарными системами. При этом, исходя из сути предлагаемого подхода, близость траекторий фактически будет означать «похожесть» их форм (графиков) в расширенном пространстве состояний  $S \times K$ .

Решению данных задач и посвящена настоящая работа.

## 1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ Т-АЛФАВИТА

Выделим из исходной последовательности  $\{s_k\}_{k \in K}$  трехточечную опорную подпоследовательность:

$$s_k^{(3)} = \{s_{k-1}^{(n)}, s_k^{(n)}, s_{k+1}^{(n)}\}.$$

Определим отображение, кодирующее подпоследовательность  $s_k^{(3)}$ , в терминах конечного Т-алфавита [9]:

$$T_k^{\alpha\varphi} \Big|_n = f_T^s(s_k^{(3)}). \quad (1.1)$$

Строго, отображение (1.1) задается через соотношения:

$$\begin{aligned} T0: & \Delta s_- = \Delta s_+ = 0; \\ T1: & \Delta s_- = \Delta s_+ < 0; \\ T2: & \Delta s_- = \Delta s_+ > 0; \\ T3N: & \Delta s_- < 0, \Delta s_+ < \Delta s_-; \\ T3P: & \Delta s_- < 0, \Delta s_+ < 0, \Delta s_+ < 0, \Delta s_+ > \Delta s_-; \\ T4N: & \Delta s_- > 0, \Delta s_+ = 0; \\ T4P: & \Delta s_- < 0, \Delta s_+ = 0; \\ T5N: & \Delta s_- > 0, \Delta s_+ > 0, \Delta s_+ < \Delta s_-; \\ T5P: & \Delta s_- > 0, \Delta s_+ > \Delta s_-; \\ T6S: & \Delta s_- > 0, \Delta s_+ < 0, \Delta s_+ > \Delta s_-; \\ T6: & \Delta s_- = -\Delta s_+ > 0; \\ T6L: & \Delta s_- > 0, \Delta s_+ < 0, \Delta s_+ < -\Delta s_-; \\ T7S: & \Delta s_- < 0, \Delta s_+ > 0, \Delta s_+ < -\Delta s_-; \\ T7: & \Delta s_- = -\Delta s_+ < 0; \\ T7L: & \Delta s_- < 0, \Delta s_+ > 0, \Delta s_+ > -\Delta s_-; \\ T8N: & \Delta s_- = 0, \Delta s_+ < 0; \\ T8P: & \Delta s_- = 0, \Delta s_+ > 0. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Здесь и далее

$$\Delta s_- = s_k^{(n)} - s_{k-1}^{(n)}, \quad \Delta s_+ = s_{k+1}^{(n)} - s_k^{(n)}.$$

Таким образом, отображение (1.1) в форме (1.2) является сюръекцией  $\sim f_T^s: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{Z}_{17}$ , а все символы Т-алфавита  $T_o^{\alpha\varphi} = T_0^{\alpha\varphi} \cup T_s^{\alpha\varphi} \cup T_c^{\alpha\varphi}$  однозначно разделяются на три непересекающихся класса:

$$T_0^{\alpha\varphi} = \{T0\},$$

$$T_s^{\alpha\varphi} = \{T1, T2, T4N, T4P, T6, T7, T8N, T8P\}, \quad (1.3)$$

$$T_c^{\alpha\varphi} = \{T3N, T3P, T5N, T5P, T5P, T6S, T6L, T7S, T7L\}.$$

Мощность множества  $|T_o^{\alpha\varphi}| = 17$ . Как следует из выражений (1.3), каждый символ  $T_k^{\alpha\varphi} \Big|_n$  кодируется в виде  $Ti$ , где  $i$  — правая часть кодов символов алфавита  $T_o^{\alpha\varphi}$ . Графические диаграммы, иллюстрирующие геометрию символов  $T_o^{\alpha\varphi}$ , приведены на рис. 1. В свою очередь, полное Т-символьное представление  $k$ -го отсчета исходной последовательности  $\{s_k\}_{k \in K}$  есть

$$T_k^{\alpha\varphi} = \left[ T_k^{\alpha\varphi} \Big|_1, \dots, T_k^{\alpha\varphi} \Big|_n, \dots, T_k^{\alpha\varphi} \Big|_N \right], \quad (1.4)$$

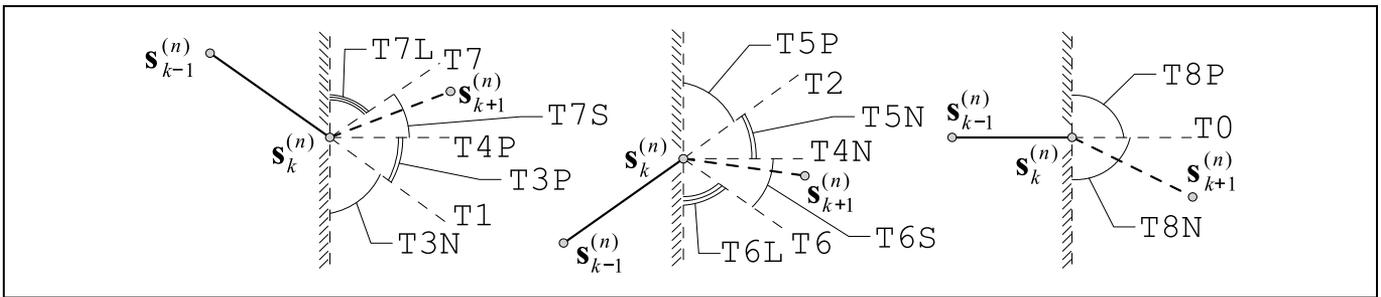


Рис. 1. Графические диаграммы, иллюстрирующие геометрию символов  $T_k^{\alpha\phi}$  для  $k$ -го отсчета и  $n$ -й фазовой переменной отображения (В.1). Диаграммы можно трактовать как графики, полученные погружением исходной последовательности  $\{s_k\}_{k \in K}$  из  $S^{(n)} \times K$  в  $S^{(n)} \times \mathbb{R}$  и ее дальнейшей кусочно-линейной интерполяции по точкам  $k \in K$

а символ  $T_k^{\alpha\phi}$  кодируется через  $T_{i_1 \dots i_n \dots i_N}$ . Мощность полного T-алфавита есть  $|\Gamma_o^{\alpha\phi}|N = 17^N$  и определяется размерностью пространства состояний отображения (В.1).

## 2. МЕТРИЗАЦИЯ T-АЛФАВИТА И РАССТОЯНИЕ МЕЖДУ T-ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЯМИ

### 2.1. Метризация T-алфавита

Как уже было указано во Введении, решение ряда задач требует метризованного множества  $\Gamma_o^{\alpha\phi}$ , т. е. наличия функции расстояния между символами T-алфавита. В частности, подобная потребность возникает при конструировании меры сложности хаотических, стохастических последовательностей в терминах T-алфавита [12], а также в задачах сравнения различных последовательностей между собой.

Далее в достаточно строгом виде рассматривается и обосновывается один из естественных подходов к метризации множества  $\Gamma_o^{\alpha\phi}$ . Идея подхода первоначально была предложена автором в докладе [13].

Введем в рассмотрение  $C^0$ -непрерывные конечные одноточечные деформации опорной подпоследовательности  $s_k^{(3)}$ , см. рис. 2, а:

$$s_k^{(3)} = s_k^{(3)} + \xi_k, \quad |\xi_k^{(1-3)}| < \infty. \quad (2.1)$$

Одноточечность означает, что в каждый момент времени может быть смещена любая, но только одна из точек подпоследовательности  $s_k^{(3)}$ . Одноточечность деформации — это ключевое отличие настоящего подхода от раннего варианта [13]. Отметим, что подобная конструкция более корректна, так по своей сути ближе к классическому рас-

стоянию Левенштейна [14], с редакционным предписанием: *заменить и совпадение* [15].

В результате для одноточечных деформаций получаем три неориентированных графа переходов между символами T-алфавита (см. рис. 2, б):  $\Gamma_-^{\text{Td}}$ ,  $\Gamma_0^{\text{Td}}$  и  $\Gamma_+^{\text{Td}}$ , порождаемые смещением точек  $s_{k-1}^{(n)}$ ,  $s_k^{(n)}$  и  $s_{k+1}^{(n)}$  соответственно. Число вершин в каждом графе отвечает мощности множества  $\Gamma_o^{\alpha\phi}$ .

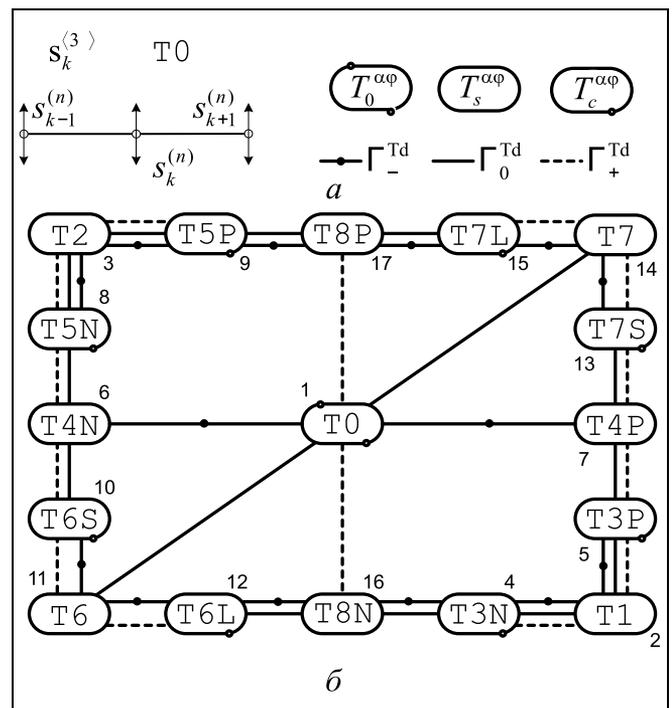


Рис. 2. Основная идея метризации T-алфавита: а — схема одноточечных  $C^0$ -непрерывных деформаций опорной подпоследовательности  $s_k^{(3)}$ ; б — графы трансформации символов T-алфавита при деформациях вида (2.1)

Отметим, что графы  $\Gamma_-^{\text{Td}}$ ,  $\Gamma_0^{\text{Td}}$  и  $\Gamma_+^{\text{Td}}$  содержат ровно по три компоненты связности каждый.

Далее определим граф  $\Gamma_{1p}^{\text{Td}} = \Gamma_-^{\text{Td}} \cup \Gamma_0^{\text{Td}} \cup \Gamma_+^{\text{Td}}$ , который вполне связан. Затем выпишем  $\mathbf{N}_{1p}^E$  — матрицу числа ребер на кратчайшем пути в графе  $\Gamma_{1p}^{\text{Td}}$  между всеми парами его вершин.

Базовую метрику между символами Т-алфавита определим в виде:

$$d_T(\text{T}i, \text{T}j) = (\mathbf{N}_{1p}^E)_{ij}. \quad (2.2)$$

Как несложно заметить, метрика (2.2) отвечает всем трем аксиомам метрического пространства: тождество, симметрия и неравенство треугольника. Кроме того,  $d_T \geq 0$ . Множество  $\text{T}_o^{\alpha\varphi}$  с определенной над ним метрикой (2.2) назовем метрическим Т-множеством.

Базовую метрику между символами Т-алфавита возможно расширить:

$$d_T^V(\text{T}i, \text{T}j) = d_T(\text{T}i, \text{T}j) + (\mathbf{N}_{1p}^V)_{ij}, \quad (2.3)$$

где  $\mathbf{N}_{1p}^V$  — матрица определяющая минимальное число точек в подпоследовательности  $s_k^{(3)}$ , которые необходимо подвергнуть смещению, чтобы символ  $\text{T}i$  преобразовать в символ  $\text{T}j$ , причем  $(\mathbf{N}_{1p}^V)_{ij} = 0$ . В свою очередь, метрика (2.3) также отвечает всем трем аксиомам метрического пространства: тождество, симметрия и неравенство треугольника. И также  $d_T^V \geq 0$ . Множество  $\text{T}_o^{\alpha\varphi}$  с определенной над ним метрикой (2.3) назовем V-расширенным метрическим Т-множеством.

Смысл V-расширения метрического Т-пространства можно трактовать в контексте увеличения «стоимости» операции преобразования Т-символа  $\text{T}i \rightarrow \text{T}j$  при условии  $(\mathbf{N}_{1p}^V)_{ij} > 0$ , т. е. когда для перехода  $\text{T}i \rightarrow \text{T}j$  необходимо подвергнуть смещению более одной точки.

## 2.2. Основные свойства метрического Т-множества

Гистограммы распределения дистанций между символами Т-алфавита по метрикам (2.2) и (2.3) приведены на рис. 3. Видно, что наиболее вероятные расстояния между Т-символами по данным метрикам равны 3 и 5 соответственно. Максимальные расстояния между Т-символами равны 6 и 8 соответственно, и они отвечают единственной паре символов  $\text{T}1$  и  $\text{T}2$  (см. рис. 2, б).

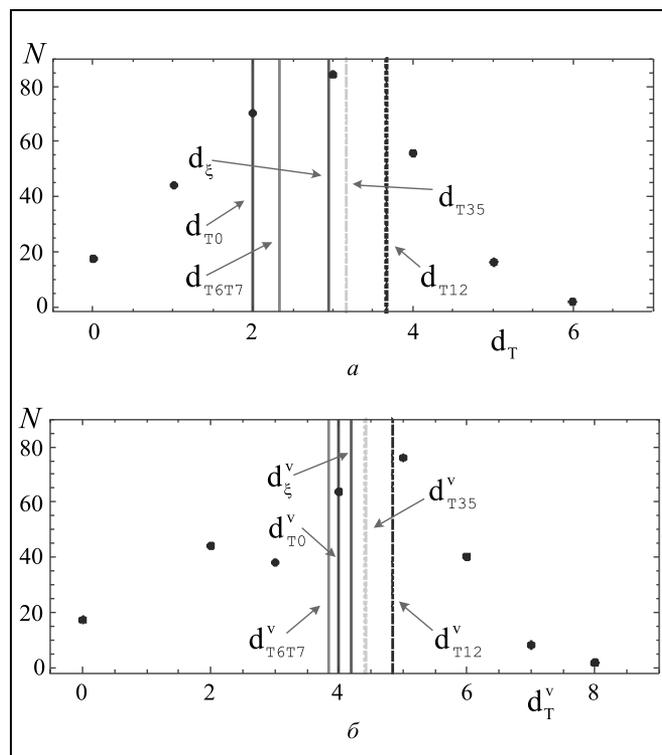


Рис. 3. Гистограмма распределения дистанций между символами Т-алфавита: а — по метрике (2.2), б — по метрике (2.3). Смысл дополнительных обозначений разъясняется в п. 2.3

Для метрики (2.4) справедлива

**Лемма.** При преобразовании  $\text{T}i \rightarrow \text{T}j$  для любых  $\text{T}i, \text{T}j \in \text{T}_o^{\alpha\varphi}$  имеет место равенство

$$\max \mathbf{N}_{1p}^V = 2. \quad (2.4)$$

Доказательство. Рассмотрим подграфы графа  $\Gamma_{1p}^{\text{Td}}$ , полученные через все парные объединения в тройке  $\{\Gamma_-^{\text{Td}}, \Gamma_0^{\text{Td}}, \Gamma_+^{\text{Td}}\}$ :

$$\Gamma_{-0}^{\text{Td}} = \Gamma_-^{\text{Td}} \cup \Gamma_0^{\text{Td}}, \quad \Gamma_{0+}^{\text{Td}} = \Gamma_0^{\text{Td}} \cup \Gamma_+^{\text{Td}},$$

$$\Gamma_{-+}^{\text{Td}} = \Gamma_-^{\text{Td}} \cup \Gamma_+^{\text{Td}}.$$

Далее для каждого из полученных подграфов выпишем матрицы числа ребер на кратчайшем пути в графе между всеми парами его вершин:  $\mathbf{N}_{-0}^E$ ,  $\mathbf{N}_{0+}^E$  и  $\mathbf{N}_{-+}^E$ . Затем введем вспомогательную величину:

$$(\mathbf{D}_{23})_{ij} = \min\{(\mathbf{N}_{-0}^E)_{ij}, (\mathbf{N}_{0+}^E)_{ij}, (\mathbf{N}_{-+}^E)_{ij}\} - (\mathbf{N}_{1p}^E)_{ij},$$

$$\forall i, j: \text{T}i, \text{T}j \in \text{T}_o^{\alpha\varphi}.$$

Характеристика  $\mathbf{D}_{23}$  показывает, насколько изменится число ребер на кратчайшем пути в графе  $\Gamma_{1p}^{\text{Td}}$  при

условии, что могут быть поочередно смещены только две (любые) из трех точек подпоследовательности  $s_k^{(3)}$ .

Прямое вычисление величины  $D_{23}$  приводит к результатам:

$$\min D_{23} = 0, \quad \max D_{23} = 0,$$

что доказывает условие (2.4) и соответственно лемму.

### 2.3. Расстояние между T-последовательностями

Введем в рассмотрение две T-последовательности одинаковой длины и размерности:

$$\{T_k^{\alpha\phi}\}_{k \in K'} \Leftarrow \{s'_k\}, \quad \{T_k^{\alpha\phi}\}_{k \in K''} \Leftarrow \{s''_k\},$$

$$|K'| \equiv |K''|, \quad \text{dims}' \equiv \text{dims}''$$

и поставим задачу определить между ними расстояние, тем самым оценив «похожесть» исходных последовательностей  $\{s'_k\}$  и  $\{s''_k\}$  в терминах символического СТQ-анализа. Вполне естественно для решения данной задачи использовать меры (2.2) или (2.3).

Вначале доопределим через норму  $L_1$  базовые метрики для случая полного T-символьного представления (1.4):

$$d_T(Ti_1 \dots i_n \dots i_N, Tj_1 \dots j_n \dots j_N) = \sum_{n=1}^N d_T(Ti_n, Tj_n),$$

$$d_T^v(Ti_1 \dots i_n \dots i_N, Tj_1 \dots j_n \dots j_N) = \sum_{n=1}^N d_T^v(Ti_n, Tj_n). \quad (2.5)$$

Из (2.5) уже можно получить меры для определения расстояния между двумя T-последовательностями одинаковой длины:

$$d_{\{T\}} = \lim_{|K'|} \frac{1}{|K'|} \sum_{k \in K'} d_T(Ti_1 \dots i_n \dots i_N, Tj_1 \dots j_n \dots j_N)|_k,$$

$$d_{\{T\}}^v = \lim_{|K'|} \frac{1}{|K'|} \sum_{k \in K'} d_T^v(Ti_1 \dots i_n \dots i_N, Tj_1 \dots j_n \dots j_N)|_k. \quad (2.6)$$

Отметим, что доопределение (2.5) и меру (2.6) можно изменить, например, применив норму  $L_\infty$  или метрику Хэмминга, но данные изменения следует соотносить скорее с прикладными аспектами и задачами анализа тех или иных данных.

Значения вероятностей появления T-символов в истинно случайном временном ряду  $\{\xi_k\}$ , фазовая переменная которого равномерно распределена

$$\begin{matrix} T3N & T3P & T5N & T5P & T6S & T6L & T7S & T7L \\ \frac{1}{12} & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{matrix} \quad (2.7)$$

Один из методов вычисления вероятностей [16]:

$$P(T7L) = \int_a^b ds_0 \int_a^{s_0} ds_1 \int_a^{s_1} p_\xi(s_0) p_\xi(s_1) p_\xi(s_2) ds_2,$$

где  $p_\xi$  — плотность вероятности величины  $\xi$ . На основе вероятностей (2.7) можно рассчитать несколько ключевых расстояний в смысле формул (2.6):

	T0	T6T7	$\xi$	T35	T12	
$d_{\{*\}}$	2	7/3	53/18	19/6	11/3	(2.8)
$d_{\{*\}}^v$	4	23/6	151/36	53/12	29/6	

где обозначения имеют смысл расстояний между временным рядом  $\{\xi_k\}$  и временными рядами: T0 — точка покоя динамической системы (цикл периода 1); T6T7 — цикл периода 2;  $\xi$  — случайный временной ряд, фазовая переменная которого также распределена равномерно; T35 — циклическая последовательность символов  $Tij, i = 3, 5, j = N, P$ , нелинейно убывающий (возрастающий) временной ряд, для иллюстрации см. рис. 1; T12 — линейно убывающий (возрастающий) временной ряд.

Из выражения (2.8) следует одна особенность метрик (2.2) и (2.3). В первом случае случайный временной ряд (с равномерным распределением фазовой переменной) наиболее близок к траектории покоя динамической системы, во втором — к циклу периода 2. Этот аспект можно конструктивно применять при исследовании особых точек отображения (B.1).

## 3. ПРИМЕРЫ

### 3.1. Степень схожести форм траекторий осциллятора Ресслера

Применим предложенный метод для изучения степени близости («похожести») форм траекторий классического осциллятора Ресслера [4, 17] (случай ленточного (band-type,  $r_b$ ) и винтового (screw-type,  $r_s$ ) хаоса):

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -y - z, & \dot{y} &= x + py, & \dot{z} &= q - z(x - r), \\ p &= 0,2, & q &= 0,1, & r &= r_b = 4,4, & r &= r_s = 12. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Примеры аттракторов показаны на рис. 4, а и б (см. третью страницу обложки). Система уравнений (3.1) интегрировалась численно на интервале  $T = [0, 8] \times 10^3$  явным методом Рунге — Кутты 5-го порядка с фиксированным шагом  $\Delta t = 10^{-2}$ . В каждом из хаотических режимов формировались опорные траектории  $s$ , количеством  $N = 1000$ . Их на-

Рисунки к статье А.В. Макаренко  
 «Метризация Т-алфавита: измерение расстояния между многомерными  
 вещественными дискретными последовательностями»  
 (см. с. 2–9)

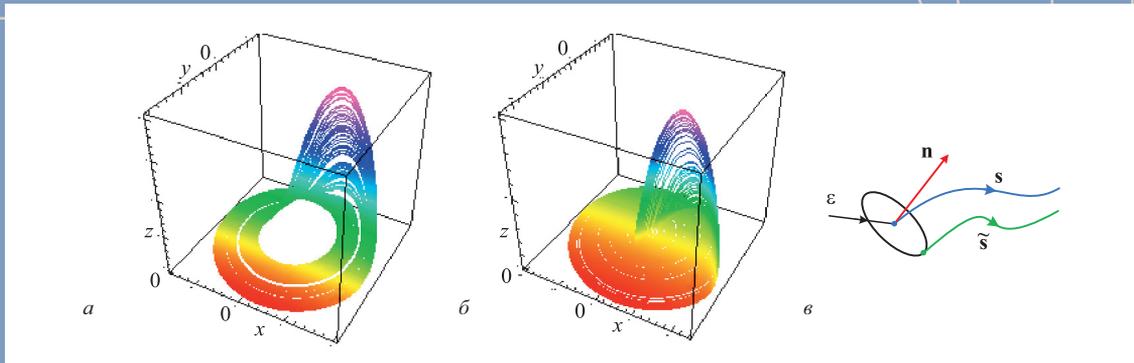


Рис. 4. Аттракторы осциллятора Рёслера:  $a - r_b$ ;  $b - r_s$ ;  $c$  – иллюстрация принципа формирования возмущённой траектории:  $\mathbf{n}$  – касательный вектор к траектории  $\mathbf{s}$  в точке  $\mathbf{s}_0$ ;  $\epsilon$  – радиус окружности (ортогональной вектору  $\mathbf{n}$ ), на которой псевдослучайно выбирается начальная  $\tilde{\mathbf{s}}_0$  точка слабовозмущённой траектории  $\tilde{\mathbf{s}}$

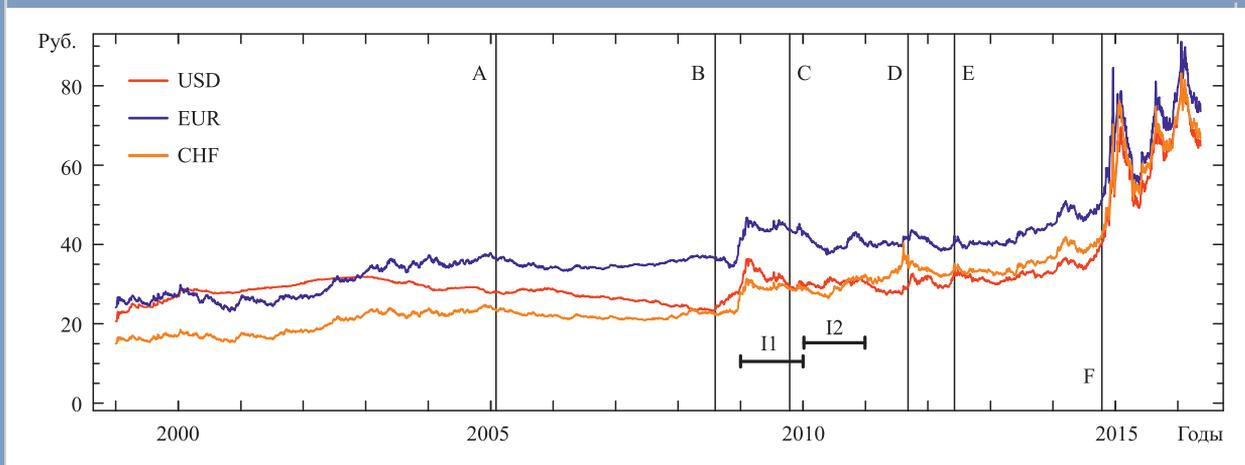


Рис. 6. Временные ряды курсов обмена валют

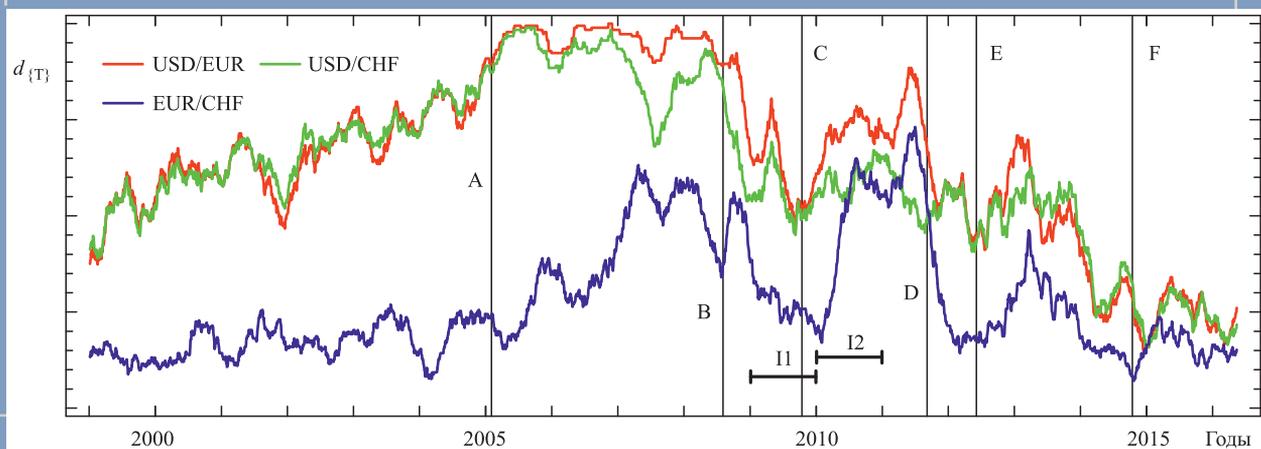


Рис. 7. Расстояния между Т-последовательностями временных рядов курсов валют

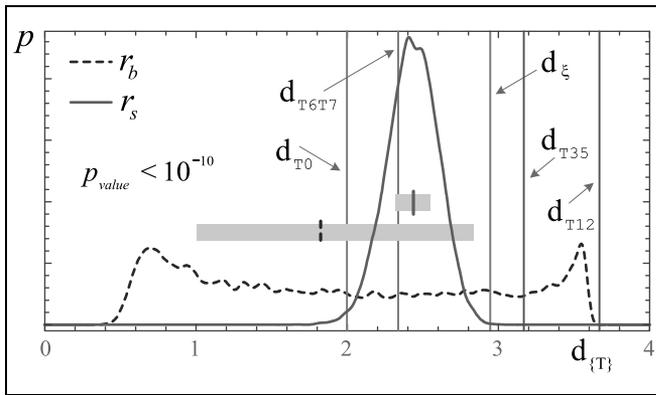


Рис. 5. Плотность распределения степени близости форм траекторий  $s$  и  $\tilde{s}$  осциллятора Ресслера

чальные точки  $s_0$  являются некоррелированными равномерно распределенными псевдослучайными величинами внутри параллелепипеда, накрывающего аттрактор. Для каждой из опорных траекторий формировалось восемь слабозмущенных (см. рис. 4,  $\theta$ ), у которых радиус возмущения  $\varepsilon$  варьировался в пределах от  $10^{-10}$  до  $10^{-3}$ .

Степень схожести форм траекторий  $s$  и  $\tilde{s}$  оценивалась на интервале  $T' = [7, 8] \times 10^3$ . Подобный сдвиг от  $t = 0$  объясняется необходимостью сведения паразитного влияния переходного процесса к минимуму. Анализируемые  $T$ -последовательности  $\{T_k^{\alpha\varphi}\}_{k=1}^K$  формировались посредством стробоскопического отображения Пуанкаре. Их длина  $K = 10^5$ , что гарантированно многократно перекрывает длину основного псевдопериода хаотического колебания.

Плотности распределений степени близости форм траекторий  $s$  и  $\tilde{s}$  осциллятора Ресслера по базовой метрике (2.2) для случаев ленточного и винтового хаоса показаны на рис. 5. Сразу отметим, что рассчитанные степени близости форм опорной и возмущенной траекторий не зависят от радиуса возмущения  $\varepsilon$ . Это указывает на то, что на исследуемом интервале  $T'$  траектории полностью «забыли» начальные условия. В данном контексте результаты анализа полностью соответствуют тому факту, что в хаотическом аттракторе Ресслера траектории интенсивно перемешиваются [4].

Из рис. 5 видно, что формы траекторий  $s$  и  $\tilde{s}$  в режиме ленточного хаоса более «похожие», нежели в случае винтового хаоса (оценка статистически значима, применялся непараметрический критерий сдвига Манна — Уитни). Это утверждение находится в полном соответствии с теоретическими

представлениями о том, что хаос в режиме  $r_s$  устроен более сложно относительно режима  $r_b$  из-за присутствия в винтовом аттракторе гетероклинических орбит Шильникова [4, 8, 18], которые приводят, в том числе, к топологически более сложному перемешиванию траекторий в аттракторе и усложнению их формы. Следовательно, вероятность того, что формы двух случайных траекторий окажутся похожи — существенно уменьшается, что и демонстрирует полученный результат. Распределение степени близости форм траекторий для случая  $r_b$  весьма растянуто, что также согласуется с известным фактом: ленточный аттрактор содержит большое число псевдопериодических орбит [4]. При этом левая часть распределения соответствует паре псевдопериодических орбит, а правая — псевдопериодической и хаотической орбитам. Результаты по метрике (2.3) качественно соответствуют изложенным.

### 3.2. Измерение расстояния между временными рядами, описывающими курсы валют

Продemonстрируем базовые возможности разработанных метрик схожести дискретных последовательностей на примере финансовых временных рядов. Пример имеет определенную прикладную ценность в разрезе исследований по макроэкономике и стохастической финансовой математике. Рассмотрим временные ряды курсов обмена некоторых мировых валют (доллар США — USD, евро — EUR, и швейцарский франк — CHF) по отношению к рублю РФ — RUB за период с 01.01.1999 г. по 15.05.2016 г. Исходные данные взяты с официального web-сайта Центрального банка России (Банк России, Курс обмена валют<sup>1</sup>). Длина временных рядов:  $K = 4316$  отсчетов. Исходные временные ряды показаны на рис. 6 (см. третью страницу обложки).

На рис. 6 введены отметки:

А — введение ЦБ РФ бивалютной корзины (1 февраля 2005 г.);

В — кризис, вызванный событиями в Южной Осетии (5 августа 2008 г.);

С — в IV квартале 2009 г. швейцарские банки неожиданно сократили кредит Греции в 20 раз за один квартал, фактически выйдя из ее финансовой системы (причем перед самым началом масштабного долгового кризиса в Греции и еврозоне);

Д — начало поддержки CHF со стороны Швейцарского народного банка и установление мини-

<sup>1</sup> [http://www.cbr.ru/currency\\_base/dynamics.aspx](http://www.cbr.ru/currency_base/dynamics.aspx).

мального обменного курса по паре EUR/CHF (примерно 7 сентября 2011 г.);

Е — существенный рост в июне 2012 года курса швейцарского франка к евро;

F — упразднение коридора бивалютной корзины в РФ и прекращение ЦБ РФ проведения регулярных интервенций (14 октября 2014 г.).

Кроме того, выделены два интервала:

I1 — активная фаза российского экономического кризиса;

I2 — период существенного подорожания швейцарского франка, причем на фоне более медленного роста остальных мировых валют (CHF вырос по отношению к EUR на 17 %).

Здесь отметим, что содержательная расшифровка отметок А — F и интервалов I1, I2 введена автором в контексте смысловой близости к анализируемым данным, и должна восприниматься как поясняющая. Расшифровка не претендует на абсолютную объективность, более того, содержательная трактовка отметок и интервалов может быть изменена (расширена) в результате дополнительных исследований.

На рис. 7 (см. третью страницу обложки) приведены графики расстояний между T-последовательностями временных рядов курсов валют: USD/EUR, USD/CHF и EUR/CHF к RUB. Расстояния рассчитывались по формуле (2.6) в метрике (2.3). Для выделения трендовой составляющей расстояния вычислялись методом скользящего среднего на подпоследовательностях длиной 90 отсчетов, что примерно соответствует временному интервалу в один квартал.

Как видно из рис. 7, с 1999 г. и до момента введения ЦБ РФ бивалютной корзины (отметка А), расстояние между парами USD/EUR и USD/CHF достаточно монотонно нарастало, при этом расстояние по паре EUR/CHF оставалось примерно постоянным. После введения ЦБ РФ бивалютной корзины и до момента отметки В, расстояние между парами USD/EUR и USD/CHF в общем-то стабилизировалось, а по паре EUR/CHF — начало заметно возрастать. При этом незадолго до наступления момента отметки В, расстояние между всеми парами начало снижаться, достигнув локального минимума в окрестности отметки С. На интервале I2 расстояние по паре EUR/CHF с 0,68 выросло до 2,59, после чего достигло глобального максимума 2,92 и в окрестности отметки D начало снижаться — на момент Е практически вернувшись к исходным значениям. Динамика по парам USD/EUR и USD/CHF, на данном отрезке времени, качественно соответствует описанному, но количественный эффект для них выражен существенно слабее. Между временными отметками Е—F

сформировался локальный максимум расстояния по всем парам. В свою очередь, в окрестности временной отметки F по всем парам сформировался глобальный минимум. Отметим два примечательных момента: наиболее сильно пара EUR/CHF отличалась от двух других пар в окрестности временной отметки А, а в окрестности отметки F — отличия минимальны.

Из полученных результатов следуют основные выводы:

— из всех исследованных курсов валют (доллар США, евро и швейцарский франк) по отношению к рублю РФ динамика формирования именно USD/RUB и EUR/RUB, наиболее существенно различается в контексте формы траекторий в расширенном пространстве состояний  $S \times K$ ;

— в контексте формы траектории динамика формирования курса CHF относительно RUB существенно ближе к EUR, нежели к USD;

— с момента наступления временной отметки В и до конечной даты анализа 15.05.2016 г. наблюдается отчетливая тенденция сближения форм траекторий, отвечающих временным рядам обменных курсов исследованных валют к рублю РФ.

Таким образом, полученные результаты продемонстрировали высокую чувствительность разработанных метрик схожести стохастических (хаотических) дискретных последовательностей и подтвердили структурное отличие пары USD/RUB от пар EUR/RUB и CHF/RUB [12].

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Осуществлена метризация T-алфавита, являющегося основным элементом символического STQ-анализа. Полученные метрики расстояния позволяют заняться разработкой ряда конструктивных расширений данного метода символического анализа, в том числе: предсказание эволюции хаотических траекторий и управление динамикой нелинейных систем.

На основе сформированных метрик T-алфавита синтезирована мера схожести дискретных последовательностей (траекторий динамических систем). В силу ряда свойств T-алфавита, разработанные меры схожести позволяют корректно измерять близость форм траекторий многомерных систем в расширенном пространстве состояний, причем как между сильно нестационарными системами, так и в случае неэквидистантных наблюдений.

Эффективность предложенного метода проверена на модельном примере — эталонной модели нелинейной динамики — осцилляторе Ресслера, функционирующего в режимах ленточного и вин-



тового хаоса. Установлено, что формы траекторий в режиме ленточного хаоса более «похожие», нежели в случае винтового хаоса (оценка статистически значима). Это утверждение находится в полном соответствии с теоретическими представлениями о том, что хаос в режиме винтового хаоса устроен более сложно относительно ленточного режима из-за присутствия в первом аттракторе гетероклинических орбит Шильникова [4, 8, 18].

Базовые возможности разработанных мер схожести дискретных последовательностей также продемонстрированы на примере анализа финансовых временных рядов — курсов обмена мировых валют по отношению к рублю за период с 01.01.1999 г. по 15.05.2016 г.

Полученные результаты продемонстрировали высокую чувствительность разработанных мер «похожести» и подтвердили структурное отличие пары USD/RUB от пар EUR/RUB и CHF/RUB [12].

В заключение отметим, что предложенный подход ни в коем случае не является заменой классического метода оценивания схожести временных рядов. Напротив, метрика Т-алфавита органично интегрируется с ними, позволяя посмотреть на анализируемую систему с несколько иной точки зрения — в аспекте геометрии ее траектории в расширенном пространстве состояний.

*Автор благодарен рецензентам за полезные замечания, способствовавшие улучшению изложения материала статьи.*

## ЛИТЕРАТУРА

1. Гукенхеймер Дж., Холмс Ф. Нелинейные колебания, динамические системы и бифуркации векторных полей. — М.-Ижевск: ИКИ, 2002. — 560 с.
2. Каток А.Б., Хасселблат Б. Введение в современную теорию динамических систем с обзором последних достижений / Пер. с англ. под ред. А.С. Городецкого. — М.: МЦНМО, 2005.
3. Боуэн Р. Методы символической динамики. — М.: Мир, 1979.

4. Gilmore R., Lefranc M. The topology of chaos. — N.-Y.: Wiley-Interscience, 2002.
5. Hsu C.S. Cell-to-Cell Mapping: A method of Global Analysis for Nonlinear Systems. — N.-Y.: Springer-Verlag, 1987.
6. Osipenko G. Dynamical Systems, Graphs, and Algorithms // Lecture Notes in Mathematics. — 2004. — Vol. 1889. — P. 288.
7. Анищенко В.С., Вадивасова Т.Е., Окрокверцхов Г.А., Стрелкова Г.И. Статистические свойства динамического хаоса. — Успехи физических наук. — 2005 — Т. 175. — С. 163—179.
8. Лоскутов А.Ю. Очарование хаоса. — Успехи физических наук. — 2010. — Т. 180. — С. 1305—1329.
9. Макаренко А.В. Исследование дискретных отображений в TQ-пространстве (базовые возможности) // Проблемы математического анализа. — 2016. — Вып. 86. — С. 19—31.
10. Макаренко А.В. Исследование временной структуры синхронизации в многомерных хаотических системах // Журнал экспериментальной и теоретической физики. — 2015. — Т. 147. — С. 1053—1063.
11. Макаренко А.В. TQ-бифуркации в дискретных динамических системах: исследование качественных перестроений формы колебаний // Там же. — 2016. — Т. 150. — С. 771—782.
12. Makarenko A.V. Estimation of the TQ-complexity of chaotic sequences // IFAC-PapersOnLine. — 2015. — Vol. 48. — P. 1049—1055; arXiv:1506.09103.
13. Макаренко А.В. Расстояние между символами Т-алфавита и свойства дискретных динамических систем // Междунар. конф. «Анализ и особенности» / Тез. докл., Москва, Матем. ин-т им. В.А. Стеклова РАН, 2012. — С. 78—79.
14. Levenshtein V.I. Binary codes capable of correcting deletions, insertions, and reversals // Soviet Physics Doklady. — 1966. — Vol. 10. — P. 707—710.
15. Gusfield D. Algorithms on Strings, Trees and Sequences. — Cambridge: Cambridge University Press, 1997.
16. Макаренко А.В. Символический анализ в пространстве «скорость—кривизна» многомерных динамических процессов // Журнал вычислит. математики и математ. физики. — 2012. — Т. 52. — С. 1248—1260.
17. Rossler O.E. Chaos in abstract kinetics: Two prototypes // Bulletin of Mathematical Biology. — 1977. — Vol. 39. — P. 275.
18. Shilnikov L.P., Shilnikov A., Turaev D., Chua L. Methods of Qualitative Theory in Nonlinear Dynamics. (Part II) // World Scientific Series on Nonlinear Science Series A. — 2001. — Vol. 5.

*Статья представлена к публикации членом редколлегии П.Ю. Чеботаревым.*

**Макаренко Андрей Викторович** — канд. техн. наук, ст. науч. сотрудник, Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, г. Москва; руководитель, Науч.-исслед. группа «Конструктивная Кибернетика», г. Москва, ✉ avm.science@mail.ru.

## Не забудьте подписаться!

Подписку на журнал «Проблемы управления» можно оформить в любом почтовом отделении (подписной индекс 81708 в каталоге Роспечати или 38006 в объединенном каталоге «Пресса России»), а также через редакцию с любого месяца, при этом почтовые расходы редакция берет на себя. Отдельные номера редакция высылает по первому требованию.