УДК 519.81+519.722 DOI: http://doi.org/10.25728/pu.2021.6.1

АНАЛИЗ ПРОТИВОРЕЧИВОСТИ ИНФОРМАЦИИ В ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ ДОВЕРИЯ. Ч. 2. ВНУТРЕННИЙ КОНФЛИКТ[1]

А.Е. Лепский

Аннотация. Во второй части обзора рассматривается понятие меры внутреннего конфликта тела свидетельств в рамках теории функций доверия (теории свидетельств Демпстера – Шейфера). Рассматривается понятие неконфликтных фокальных элементов одного тела свидетельств, а также требования, предъявляемые к мерам внутреннего конфликта. Обсуждается некоторая аксиоматика меры внутреннего конфликта, основанная на усилении желательных свойств. Анализируются результаты об общем виде меры внутреннего конфликта, удовлетворяющей этой системе аксиом. Рассматриваются различные способы оценивания внутреннего конфликта: энтропийный подход; методы, основанные на вычислении автоконфликтности и максимизации контурной функции; метрический подход. Подробно рассмотрен декомпозиционный подход, предполагающий, что источник информации, который формирует тело свидетельств с большим внутренним конфликтом, мог быть неоднородным. Материал статьи проиллюстрирован большим количеством примеров.

Ключевые слова: теория функций доверия, правила комбинирования, конфликтность фокальных элементов, мера внутреннего конфликта.

ВВЕДЕНИЕ

Данная статья является непосредственным продолжением аналитического обзора [1], в котором рассматривались основные методы анализа противоречивости информации между телами свидетельств в теории функций доверия (теории свидетельств Демпстера – Шейфера). Но противоречивой может быть и информация, предоставляемая одним телом свидетельств. В этом случае говорят о внутреннем конфликте. В качестве примера свидетельства, в котором наблюдается большой внутренний конфликт, можно привести следующее: стоимость акций компании завтра будет в промежутке [0,10] или в промежутке [30,35] с равными весами.

Различные понятия, описывающие внутренние противоречия самих тел свидетельств (или функций доверия, им соответствующих), обсуждались в ряде работ 80–90-х годов XX в. Но идея разграничения понятий внешнего и внутреннего конфликтов свидетельств восходит к работам [2, 3].

Настоящий обзор посвящен анализу аксиоматики и основных методов оценивания внутреннего конфликта тела свидетельств. Основная часть статьи имеет следующую структуру. В § 1 вводятся основные определения и обозначения, приводятся базовые сведения из теории функций доверия. При этом более подробная вводная информация представлена в первой части обзора [1]. В § 2 обсуждаются понятия неконфликтных фокальных элементов, а также требования, предъявляемые к мерам внутреннего конфликта. В § 3 приводятся результаты, касающиеся общего вида меры, удовлетворяющей некоторой системе аксиом. В § 4 рассматриваются различные способы оценивания внутреннего конфликта: энтропийный подход (п. 4.1); методы, основанные на вычислении автоконфликтности и максимизации функции правдоподобия (п. 4.2); метрический подход (п. 4.3); декомпозиционный подход (п. 4.4). Наконец, в заключении подведены некоторые результаты данного исследования.

[1]Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 20-11-50077.

1. НЕКОТОРЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ И СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ ДОВЕРИЯ

Для удобства напомним основные понятия из теории Демпстера – Шейфера [4, 5]. Более подробную информацию можно найти в § 1 и 2 первой части обзора [1].

Пусть $X=\{x_1,...,x_n\}$ – конечное множество и 2^X – множество всех подмножеств из множества X. Базовым доверительным назначением (БДН, англ. *basic belief assignment*), или функцией масс, называют функцию множеств m: $2^X \to [0,1]$, которая удовлетворяет условию $\sum_{A\in 2^X} m(A)=1$.

Подмножество $A\subseteq X$ называют фокальным элементом, если $m(A)>0$. Пару $F=(\mathcal{A},m)$ из множества всех фокальных элементов $\mathcal{A}=\{A\}$ и соответствующей БДН $m(A)$, $A\in\mathcal{A}$, называют телом свидетельства. Пусть $\mathcal{F}(X)$ – множество всех тел свидетельств на множестве X, а $\mathcal{P}(X)$ – множество всех вероятностных мер на множестве X.

Телу свидетельств $F=(\mathcal{A},m)$ можно поставить во взаимно однозначное соответствие функцию доверия (*belief function*) $Bel(A)=\sum_{B\subseteq A} m(B)$ и функцию правдоподобия (*plausibility function*) $Pl(A)=1-Bel(A^c)=\sum_{A:B\cap A\neq\varnothing} m(B)$, где A^c – дополнение множества A. Функция $Pl(x)=\sum_{A\in\mathcal{A}:x\in A} m(A)$, $x\in X$, называется контурной функцией тела свидетельств. Будем обозначать функции доверия и правдоподобия через Bel_F и Pl_F соответственно, если надо подчеркнуть их зависимость от тела свидетельств $F=(\mathcal{A},m)$.

На множестве функций множеств g: $2^X\to\mathbb{R}$ можно ввести отношение порядка: $g_1\le g_2$, если $g_1(A)\le g_2(A)$ $\forall A\in 2^X$.

Функция доверия (и тело свидетельств) называется:

– категоричной (*categorical*), если она имеет только один фокальный элемент; соответствующее тело свидетельств будем обозначать $F_A=(A,1)$;

– бессодержательной (*vacuous*), если единственным фокальным элементом этой функции является всё множество X, $F_X=(X,1)$;

– консонантной (*consonant*), если её фокальные элементы являются вложенными, т. е. $\forall A,B\in\mathcal{A}$: $A\subseteq B$ или $B\subseteq A$;

– простой, если БДН имеет не более двух фокальных элементов, и если их два, то X – один из них;

– догматической (*dogmatic*), если $X\notin\mathcal{A}$ (т. е. $m(X)=0$).

Любое тело свидетельства $F=(\mathcal{A},m)$ можно представить в виде $F=\sum_{A\in\mathcal{A}} m(A)F_A$. Простое тело свидетельств будет иметь вид $F_A^{\omega}=(1-\omega)F_A+\omega F_X$, где $\omega\in[0,1]$.

Тело свидетельств $F'=(\mathcal{A}',m')$ называется специализацией тела свидетельств $F''=(\mathcal{A}'',m'')$ (обозначают: $F'\sqsubseteq F''$), если существует такое разбиение множества $\mathcal{A}'=\mathcal{A}_1'\cup\ldots\cup\mathcal{A}_k'$, $\mathcal{A}_i'\cap\mathcal{A}_j'=\varnothing$ $\forall i\neq j$, $k=|\mathcal{A}''|$: $\bigcup_{A\in\mathcal{A}_i'} A\subseteq B_i$, $\sum_{A\in\mathcal{A}_i'} m'(A)=m''(B_i)$ $\forall B_i\in\mathcal{A}''$, $i=1,\ldots,k$. Другими словами, тело свидетельств F' уточняет (специализирует) тело свидетельств F''. Последнее в этом случае называют обобщением тела свидетельств F'.

Количество незнания в информации, содержащейся в теле свидетельств $F=(\mathcal{A},m)$, оценивается с помощью индексов неточности [6]. Примером такого индекса является нормированная обобщенная мера Хартли [7, 8] $H_0(F)=\sum_{A\in\mathcal{A}} m(A)\log_{|X|}|A|$, которую в основном и будем использовать далее.

В теории функций доверия развит инструментарий комбинирования тел свидетельств. Под правилом комбинирования понимают некоторую операцию $\otimes:\mathcal{F}(X)\times\mathcal{F}(X)\to\mathcal{F}(X)$. Наиболее популярными являются такие правила [9]:

• Ненормализованное правило Демпстера $\otimes_{ND}$: $m_{ND}(A)=\sum_{B\cap C=A} m_1(B)m_2(C)$ $\forall A\in 2^X$.

Канонической мерой (внешнего) конфликта называется величина $K=K(F_1,F_2)=m_{ND}(\varnothing)=\sum_{B\cap C=\varnothing} m_1(B)m_2(C)\in[0,1]$, которая характеризует степень конфликтности источников информации, описываемых телами свидетельств F_1 и F_2: чем больше значение этого параметра, тем более противоречивую информацию предоставляют источники.

• Правило Демпстера [4] $\otimes_D$: $m_D(A)=\dfrac{m_{ND}(A)}{1-K}$ $\forall A\in 2^X\setminus\varnothing$. Если $K=1$ (полная конфликтность), то правило Демпстера неприменимо.

• Дизъюнктивное правило консенсуса $\otimes_{\cup}$ [10]:

$$m_{\cup}(A)=\sum_{B\cup C=A} m_1(B)m_2(C),\quad A\in 2^X. \qquad (1)$$

2. ПОНЯТИЯ НЕКОНФЛИКТНЫХ ФОКАЛЬНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ И МЕРЫ ВНУТРЕННЕГО КОНФЛИКТА

Под мерой внутреннего конфликта тела свидетельств понимают некоторый функционал $Con_{int}:\mathcal{F}(X)\to[0,1]$, который должен быть максимальным в случае полного конфликта между фокальными элементами этого тела свидетельств и минимальным в случае их неконфликтности.

По аналогии с неконфликтностью между телами свидетельств (см. § 3 в первой части обзора [1]) рассматривают такие случаи неконфликтности фокальных элементов одного тела свидетельств $F=(\mathcal{A},m)$ (соответствующие источники информации называют конфликтно-свободными):

1) сильная неконфликтность: $\bigcap_{A\in\mathcal{A}}A\neq\varnothing$;

2) (простая) неконфликтность: $A\cap B\neq\varnothing$ $\forall A,B\in\mathcal{A}$.

Замечание 1. Фокальные элементы, удовлетворяющие условию 1), называют логически согласованными [11], а удовлетворяющие условию 2) – попарно согласованными [12]. Из логической согласованности следует попарная согласованность, но не наоборот. В статье [12] исследовались свойства тел свидетельств, удовлетворяющих общему условию s-согласованности: $\bigcap_{i=1}^{s}A_i\neq\varnothing$ $\forall A_1,\ldots,A_s\in\mathcal{A}$, где $2\le s\le|\mathcal{A}|$.

В общем случае желательно, чтобы мера внутреннего конфликта Con_{int} удовлетворяла следующим условиям:

I1: $Con_{int}(F)=0$, если фокальные элементы тела свидетельств F являются логически (или попарно в слабом случае) согласованными.

В частности, при выполнении условия I1 верно, что:

- $Con_{int}(F)=0$, если F – категоричное тело свидетельств;
- $Con_{int}(F)=0$, если F – консонантное тело свидетельств;
- $Con_{int}(F)=0$, если F – простое тело свидетельств.

I2: $Con_{int}(F_1)\ge Con_{int}(F_2)$ $\forall F_1,F_2\in\mathcal{F}(X)$, $F_1\sqsubseteq F_2$ (антимонотонность по специализации).

Кроме того, мера внутреннего конфликта «сложного» тела свидетельств не должна быть меньше минимальной меры конфликта составляющих его «простых» тел свидетельств. Это требование может быть сформулировано относительно класса $\mathcal{OR}$ так называемых оптимистичных правил комбинирования тел свидетельств.

Правило комбинирования $\otimes$ называется оптимистичным (пессимистичным) относительно индекса неточности [6] f, если $f(F_1\otimes F_2)\le f(F_i)$ ($f(F_1\otimes F_2)\ge f(F_i)$), $i=1,2$.

Справедливо следующее утверждение (см., например, работу [13]).

Утверждение 1. $H_0(F_1\otimes_{ND}F_2)\le H_0(F_i)$ *и* $H_0(F_1\otimes_{\cup}F_2)\ge H_0(F_i)$, $i=1,2$, $\forall F_1,F_2\in\mathcal{F}(X)$.

Таким образом, ненормализованное правило Демпстера $\otimes_{ND}$ является оптимистичным, а дизъюнктивное правило консенсуса – пессимистичным относительно нормированной обобщенной меры Хартли H_0. Этот же результат верен и для любого линейного строгого индекса неточности [6].

I3: $Con_{int}(F_1\otimes F_2)\ge\min\{Con_{int}(F_1),Con_{int}(F_2)\}$ $\forall F_1,F_2\in\mathcal{F}(X)$ и $\forall\otimes\in\mathcal{OR}$.

К желательным свойствам меры внутреннего конфликта также относят свойство независимости от упорядочивания альтернатив множества X или некоторое его обобщение. Пусть $\varphi:X\to Y$ – взаимно однозначное отображение. Тогда можно рассмотреть образ тела свидетельств $F=(\mathcal{A},m)$ при отображении φ: $F^{\varphi}=(\mathcal{A}^{\varphi},m^{\varphi})$, где $\mathcal{A}^{\varphi}=\{\varphi(A):A\in\mathcal{A}\}\subseteq 2^Y$, $m^{\varphi}(B)=\sum_{A:\varphi(A)=B}m(A)$ $\forall B\in\mathcal{A}^{\varphi}$.

I4: $Con_{int}(F^{\varphi})=Con_{int}(F)$ $\forall F\in\mathcal{F}(X)$ и любого взаимно однозначного отображения φ.

3. АКСИОМАТИКА МЕР ВНУТРЕННЕГО КОНФЛИКТА

Аксиоматизация меры внутреннего конфликта в неявной форме встречается при аксиоматизации так называемых мер неопределенности в рамках теории функций доверия [14] и теории неточных вероятностей [15].

В явной форме аксиоматика мер внутреннего конфликта была рассмотрена в статье [16]. Исследовалась система аксиом мер внутреннего конфликта, основанная на усилении условий I1 – I4:

B1: $Con_{int}(F)=0\Leftrightarrow$ фокальные элементы тела свидетельств $F=(\mathcal{A},m)$ являются сильно неконфликтными, т. е. $\bigcap_{A\in\mathcal{A}}A\neq\varnothing$;

B2: $Con_{int}(F_1)\ge Con_{int}(F_2)$ $\forall F_1,F_2\in\mathcal{F}(X)$, $Bel_{F_1}\ge Bel_{F_2}$;

B3: $Con_{int}(\alpha F_1+(1-\alpha)F_2)\ge\alpha Con_{int}(F_1)+(1-\alpha)Con_{int}(F_2)\,\forall\alpha\in[0,1]$ и $\forall F_1,F_2\in\mathcal{F}(X)$;

B4: $Con_{int}(F^{\varphi}) \le Con_{int}(F)$ $\forall F \in \mathcal{F}(X)$ и любого отображения $\varphi: X \to Y$; $Con_{int}(F^{\varphi}) = Con_{int}(F)$, если φ – инъективное отображение.

Аксиома B2 является усилением свойства I2, поскольку из $Bel_{F'} \ge Bel_{F''}$ следует, что $F' \sqsubseteq F''$, но не наоборот [10].

Аксиома B3 является усилением свойства I3 на случай множества линейных правил комбинирования (эти правила будут одновременно оптимистичными и пессимистичными относительно линейного индекса неточности), поскольку $\alpha Con_{int}(F_1) + (1-\alpha)Con_{int}(F_2) \ge \min\{Con_{int}(F_1, Con_{int}(F_2)\}$.

Аксиома B4 является усилением свойства I4 на случай, когда отображение φ не является инъективным: если образами различных элементов из множества X будет один элемент из множества Y, то мера внутреннего конфликта тела свидетельств F^{φ} будет не больше меры конфликта тела свидетельств F.

Тогда справедлива следующая теорема о продолжении меры внутреннего конфликта с множества вероятностных мер $\mathcal{P}(X)$ на множество всех тел свидетельств $\mathcal{F}(X)$.

Теорема 1 [16]. *Если функционал* $Con: \mathcal{P}(X) \to [0,1]$ *удовлетворяет аксиомам* B1, B3, B4 *на множестве* $\mathcal{P}(X)$, *то функционал*

$$Con_{int}(F) = \inf\left\{Con(P): P \in \mathcal{P}_{Bel_F}\right\}$$

будет удовлетворять аксиомам B1 — B4 *на множестве* $\mathcal{F}(X)$, *где* Bel_F *– функция доверия, соответствующая телу свидетельств* F, $\mathcal{P}_{Bel_F} = \{P \in \mathcal{P}(X): Bel_F(A) \le P(A) \ \forall A \subseteq X\}$ *– множество вероятностных мер, согласованных с функцией* Bel_F.

Эта теорема позволяет определить меру внутреннего конфликта на множестве $\mathcal{F}(X)$, если она будет задана на множестве $\mathcal{P}(X)$. Поскольку $P = \sum_{i=1}^{n} P(\{x_i\}) F_{\{x_i\}}$, то

$$Con(P) = f(P(\{x_1\}),...,P(\{x_n\})), \qquad (2)$$

где $f(t_1,...,t_n)$ – некоторая функция, $n = |X|$. В статье [16] были найдены необходимые и достаточные условия на функцию f для того, чтобы функционал (2) удовлетворял аксиомам B1 – B4 на множестве $\mathcal{P}(X)$. В частности, следующее утверждение описывает широкий класс таких функций.

Утверждение 2 [16]. *Пусть функция* $g:[0,1] \to [0,+\infty)$ *является вогнутой и удовлетворяет условиям:* $g(0) = g(1) = 0$; g *строго убывает в точке* $t = 1$. *Тогда функция* $f(t_1,..., t_n) = \sum_{i=1}^{n} g(t_i)$ *будет по формуле* (2) *определять меру внутреннего конфликта на множестве* $\mathcal{P}(X)$, *которая удовлетворяет аксиомам* B1 – B4.

Примерами функции g из утверждения 2, которую можно назвать образующей функцией для меры конфликта на множестве $\mathcal{P}(X)$, являются: $g(t) = \begin{cases} -t\ln t, & t \in (0,1], \\ 0, & t = 0, \end{cases}$ в этом случае $Con(P) = -\sum_{i=1}^{n} P(\{x_i\}) \ln P(\{x_i\})$ – энтропия Шеннона; $g(t) = t - t^2$, $t \in [0,1]$, в этом случае $Con(P) = E_I(P)$, где E_I – энтропийный функционал из представления (6) в первой части обзора [1].

4. СПОСОБЫ ОЦЕНИВАНИЯ ВНУТРЕННЕГО КОНФЛИКТА

4.1. Энтропийный подход

В этом случае мера внутреннего конфликта тела свидетельств $F = (\mathcal{A}, m)$ должна отражать распределение значений функции масс тела свидетельства на «конфликтующих» фокальных элементах, т. е. на тех фокальных элементах, которые не являются сильно или слабо неконфликтующими. Такой подход к определению внутреннего конфликта исследовался в начале 1980-х гг. в рамках обобщения энтропии Шеннона в теории Демпстера – Шейфера [17]. Как правило, энтропийный функционал имеет вид среднего значения распределения фокальных элементов относительно некоторой функции конфликтности:

$$\sum_{A \in \mathcal{A}} m(A) \theta(\psi(A)),$$

где $\theta: [0, 1] \to [0, +\infty]$ – возрастающая, выпуклая функция, $\theta(0) = 0$ (например, для функционалов, рассматриваемых ниже, используется функция $\theta(t) = -\log_2(1-t)$); $\psi: 2^X \to [0, 1]$ – функция множеств, значения которой $\psi(A)$, $A \in 2^X$, характеризуют суммарные массы конфликтующих с множеством A фокальных элементов. В частности, рассматривают:

- меру диссонанса (*measure of dissonance*) [18]

$$E(F) = -\sum_{A \in \mathcal{A}} m(A) \log_2 Pl(A) =$$
$$= -\sum_{A \in \mathcal{A}} m(A) \log_2 (1 - K(A)),$$

где $K(A)=\sum_{A\cap B=\varnothing} m(B)$ – суммарное значение масс конфликтующих с множеством A фокальных элементов касательно отношения «непересечения»;

- меру конфузии (*measure of confusion*) [19] как среднее значение конфликтующих фокальных элементов относительно отношения «невключения»

$$C(F)=-\sum_{A\in\mathcal{A}} m(A)\log_2 Bel(A)=$$
$$=-\sum_{A\in\mathcal{A}} m(A)\log_2\left(1-L(A)\right),$$

где $L(A)=\sum_{B\not\subseteq A} m(B)$ – суммарное значение масс конфликтующих с множеством A фокальных элементов касательно отношения «невключения»;

- меру расхождения (*measure of discord*) [20]

$$D(F)=-\sum_{A\in\mathcal{A}} m(A)\log_2\left(1-Conf(A)\right),$$

где $Conf(A)=\sum_{B\in\mathcal{A}} m(B)\dfrac{|B\setminus A|}{|B|}$ – суммарное взвешенное значение масс конфликтующих с множеством A фокальных элементов; очевидно, что $K(A)\le Conf(A)\le L(A)$;

- меру раздора (*measure of strife*) [21]

$$ST(F)=-\sum_{A\in\mathcal{A}} m(A)\log_2\left(1-CONF(A)\right),$$

где $CONF(A)=\sum_{B\in\mathcal{A}} m(B)\dfrac{|A\setminus B|}{|A|}$ – суммарное взвешенное значение масс конфликтующих с множеством A фокальных элементов.

Каждый энтропийный функционал характеризует определенный тип конфликтности фокальных элементов. Условиям I1 и I2 удовлетворяет только энтропийная мера диссонанса E. Остальные из рассмотренных энтропийных мер этим условиям, вообще говоря, не удовлетворяют.

Пример 1. Пусть $X=\{x_1,...,x_5\}$. Найдем энтропийные меры конфликта для тел свидетельств $F_i(\alpha)=\alpha F_A+(1-\alpha)F_{B_i}$, $\alpha\in[0,1]$, $i=1,2,3$, и различных случаев взаимного расположения фокальных элементов $A\in 2^X$ и $B_i\in 2^X$, $i=1,2,3$. Во всех случаях пусть $A=\{x_1,x_2\}$ и $|B_i|=3$, $i=1,2,3$.

1) $B_1=\{x_1,x_2,x_3\}$. В этом случае $A\subseteq B_1$. Тогда $K(A)=K(B_1)=0$; $L(A)=1-\alpha$, $L(B_1)=0$; $Conf(A)=\frac{1}{3}(1-\alpha)$, $Conf(B_1)=0$; $CONF(A)=0$, $CONF(B_1)=\frac{1}{3}\alpha$. Следовательно, имеем такие энтропийные меры: $E(F_1(\alpha))=0$, $C(F_1(\alpha))=-\alpha\log_2\alpha$, $D(F_1(\alpha))=-\alpha\times\log_2\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\alpha\right)$, $ST(F_1(\alpha))=-(1-\alpha)\log_2\left(1-\frac{1}{3}\alpha\right)$.

2) $B_2=\{x_2,x_3,x_4\}$. В этом случае $A\cap B_2\ne\varnothing$, но $A\not\subseteq B_2$ и $B_2\not\subseteq A$. Тогда $K(A)=K(B_2)=0$; $L(A)=1-\alpha$, $L(B_2)=\alpha$; $Conf(A)=\frac{2}{3}(1-\alpha)$, $Conf(B_2)=\dfrac{1}{2}\alpha$; $CONF(A)=\frac{1}{2}(1-\alpha)$, $CONF(B_2)=\frac{2}{3}\alpha$. Следовательно, имеем такие энтропийные меры: $E(F_2(\alpha))=0$, $C(F_2(\alpha))=-\alpha\log_2\alpha-(1-\alpha)\log_2(1-\alpha)$, $D(F_2(\alpha))=-\alpha\log_2\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\alpha\right)-(1-\alpha)\log_2\left(1-\frac{1}{2}\alpha\right)$, $ST(F_2(\alpha))=-\alpha\log_2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\alpha\right)-(1-\alpha)\log_2\left(1-\frac{2}{3}\alpha\right)$.

Таким образом, в первых двух случаях мера диссонанса будет неинформативной (т. е. $E(F_i)\equiv 0$, $i=1,2$), поскольку она учитывает только отношение «непересечения» фокальных элементов, которого в этих случаях нет.

3) $B_3=\{x_3,x_4,x_5\}$. В этом случае $A\cap B_3=\varnothing$. Тогда $K(A)=L(A)=Conf(A)=CONF(A)=1-\alpha$, $K(B_3)=L(B_3)=Conf(B_3)=CONF(B_3)=\alpha$. Следовательно, $E(F_3(\alpha))=C(F_3(\alpha))=D(F_3(\alpha))=ST(F_3(\alpha))=-\alpha\log_2\alpha-(1-\alpha)\log_2(1-\alpha)$. То есть в этом случае все энтропийные меры конфликта совпадают и принимают максимальное значение для любого фиксированного $\alpha\in[0,1]$.

Заметим, что во всех случаях $D(F_i(1-\alpha))=ST(F_i(\alpha))$, $i=1,2,3$. Кроме того, энтропийный конфликт относительно любой меры поточечно возрастает с увеличением «степени непересечения» фокальных элементов (например, $D(F_1(\alpha))\le D(F_2(\alpha))\le D(F_3(\alpha))$ $\forall\alpha\in[0,1]$). ♦

4.2. Методы, основанные на вычислении автоконфликтности и максимизации контурной функции

Тело свидетельств $F=(\mathcal{A},m)$ можно считать внутренне неконфликтным, если оно не конфликтует с самим собой относительно какой-нибудь меры внешнего конфликта (см. первую часть обзора [1]). Например, тело свидетельств F может быть неконфликтным с самим собой относительно канонической меры конфликта K, т. е. $K(F,F)=0$. Саму величину $K(F,F)$ можно тогда рассматривать как меру внутреннего конфликта. В работе [22] был введен так называемый автоконфликт (*auto-conflict*) порядка s: $Con_{aut,s}(F)=K(\underbrace{F,...,F}_{s})$.

Если $s=2$, то такую меру будем называть просто автоконфликтом: $Con_{aut}(F)=Con_{aut,2}(F)$. Мера автоконфликта Con_{aut} будет удовлетворять условиям I1 (для случая простой неконфликтности фокальных элементов), а также условиям I2, I4 и I3, если $\mathcal{OR}=\{\otimes_{ND}\}$.

Другой подход связан с понятием сильной неконфликтности фокальных элементов. Нетрудно видеть, что

$$\Omega_{\mathcal{A}}=\bigcap\nolimits_{A\in\mathcal{A}}A\neq\varnothing \quad\Leftrightarrow$$
$$\exists x\in X: Pl(x)=\sum\nolimits_{A\in\mathcal{A}:x\in A}m(A)=1.$$

Другими словами, логическая согласованность тела свидетельств ($\Omega_{\mathcal{A}}\neq\varnothing$) равносильна тому, что контурная функция будет достигать максимального единичного значения: $\max_{x\in X}Pl(x)=1$. Заметим, что если $|\mathcal{A}|=s$ и $\Omega_{\mathcal{A}}\neq\varnothing$, то $Con_{aut,s}(F)=0$. Основываясь на этом наблюдении, в работе [23] была введена мера внутреннего конфликта $Con_{pl}(F)=1-\max\{Pl(x):x\in X\}$. В этом случае максимум контурной функции $\max\{Pl(x):x\in X\}=1-Con_{pl}(F)$ представляет собой меру неконфликтности. Мера Con_{pl} удовлетворяет условиям I1 – I4 (условию I3 она удовлетворяет, если $\mathcal{OR}=\{\otimes_{ND}\}$). Другие свойства этой меры исследовались в работах [2, 23].

Замечание 2. В статье [16] показано, что меру внутреннего конфликта $Con_{pl}(F)$ можно получить с помощью описанного в теореме 1 продолжения на множество $\mathcal{F}(X)$ меры конфликта вида (2), где функция f имеет вид: $f(t_1,...,t_n)=$ $=\min\{1-t_1,...,1-t_n\}$, $n=|X|$. Причем эта мера будет удовлетворять аксиомам B1 — B4.

Пример 2. Для тел свидетельств $F_i(\alpha)$, $i=1,2,3$, из примера 1, имеем: $Con_{pl}(F_1(\alpha))=Con_{pl}(F_2(\alpha))=$ $=1-\max_{1\le k\le 5}Pl(x_k)=0$, поскольку в первом случае $Pl(x_1)=Pl(x_2)=1$, а во втором $Pl(x_2)=1$. В третьем случае $Pl(x_1)=Pl(x_2)=\alpha$, $Pl(x_3)=Pl(x_4)=Pl(x_5)=$ $=1-\alpha$. Поэтому $Con_{pl}(F_3(\alpha))=1-\max_{1\le k\le 5}Pl(x_k)=$ $=\min\{\alpha,1-\alpha\}$.

Мера автоконфликтности в этом примере будет равна $Con_{aut}(F_1(\alpha))=Con_{aut}(F_2(\alpha))=0$ и $Con_{aut}(F_3(\alpha))=$ $=2\alpha(1-\alpha)$. ♦

Поскольку мера конфликта Con_{pl} легко вычисляется и удовлетворяет многим желательным свойствам (в частности, аксиомам B1 — B4), то это делает ее наиболее популярной при использовании в прикладных задачах. В то же время, как показывает пример 2, она будет нечувствительной при наличии пересекающихся фокальных элементов.

4.3. Метрический подход

В этом случае мера внутреннего конфликта тела свидетельств $F=(\mathcal{A},m)$ вычисляется как

$$Con_{int}(F)=\inf_{F'\in\mathcal{V}(X)}d(F,F'), \qquad (3)$$

где d – некоторая метрика между телами свидетельств (см. п. 4.3.1 в первой части обзора [1]), а $\mathcal{V}(X)$ – некоторое множество тел свидетельств с заведомо нулевым внутренним конфликтом, т. е. удовлетворяющих условию I1. Это может быть, например, множество категоричных или простых тел свидетельств. Такой подход рассматривался в работе [24] и применялся для оценивания надежности экспертных прогнозов погоды. В общем случае такая мера может и не удовлетворять всем желательным свойствам меры конфликта. Результат вычисления внутреннего конфликта будет существенно зависеть от выбора множества $\mathcal{V}(X)$. Кроме того, решение оптимизационной задачи (3) может иметь большую вычислительную сложность.

Пример 3. Найдем внутренний конфликт тел свидетельств $F_i(\alpha)$, $i=1,2,3$, из примера 1 по формуле (3), где метрика $d=d_J$ вычисляется по формуле (см. статью [25] и п. 4.3.1 в первой части обзора [1])

$$d_J(F_1,F_2)=$$
$$=\sqrt{\tfrac{1}{2}\sum\nolimits_{A,B\in 2^X\setminus\{\varnothing\}}\tfrac{|A\cap B|}{|A\cup B|}(m_1(A)-m_2(A))(m_1(B)-m_2(B))},$$
$$F_1=(\mathcal{A}_1,m_1),\ F_2=(\mathcal{A}_2,m_2).$$

Пусть $\mathcal{V}(X)$ – множество простых тел свидетельств на множестве X вида $F^{\omega}_{\{x\}}=(1-\omega)F_{\{x\}}+\omega F_X$, где $\omega\in[0,1]$, $x\in X$. Тогда $Con_{int}(F_i(\alpha))=\min_{1\le i\le 5}\min_{\omega_i\in[0,1]}d_J(F_i(\alpha),F^{\omega_i}_{\{x_i\}})$, $i=1,2,3$.

В частности, для множества $B_1=\{x_1,x_2,x_3\}$ (в этом случае $A\subseteq B_1$) имеем

$$d_J(F_1(\alpha),F^{\omega_i}_{\{x_i\}})=$$
$$=\tfrac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{h^2(\alpha,\omega_i)-\alpha(1-\omega_i)-\tfrac{2}{3}(1-\alpha)(1-\omega_i)},\ i=1,2,$$
$$d_J(F_1(\alpha),F^{\omega_3}_{\{x_3\}})=\tfrac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{h^2(\alpha,\omega_3)-\tfrac{2}{3}(1-\alpha)(1-\omega_3)},$$
$$d_J(F_1(\alpha),F^{\omega_i}_{\{x_i\}})=\tfrac{1}{\sqrt{2}}h(\alpha,\omega_i),\ i=4,5,$$

где

$$h(\alpha,\omega)=\sqrt{\alpha^2+(1-\alpha)^2+\omega^2+(1-\omega)^2-\tfrac{4}{5}\alpha\omega-\tfrac{6}{5}(1-\alpha)\omega}.$$

Теперь

$$\min_{\omega_i\in[0,1]}d_J(F_1(\alpha),F^{\omega_i}_{\{x_i\}})=d_J(F_1(\alpha),F^{\omega_i}_{\{x_i\}})\Big|_{\omega_i=\frac{38-11\alpha}{60}}=$$
$$=\tfrac{1}{30}\sqrt{\tfrac{3479}{4}\alpha^2-841\alpha+239},\ i=1,2,$$
$$\min_{\omega_3\in[0,1]}d_J(F_1(\alpha),F^{\omega_3}_{\{x_3\}})=d_J(F_1(\alpha),F^{\omega_3}_{\{x_3\}})\Big|_{\omega_3=\frac{38+4\alpha}{60}}=$$
$$=\tfrac{1}{30}\sqrt{896\alpha^2-676\alpha+239},$$

$$\min_{\omega_i\in[0,1]} d_J(F_1(\alpha),\ F_{\{x_i\}}^{\omega_i}) = d_J(F_1(\alpha),\ F_{\{x_i\}}^{\omega_i})\Big|_{\omega_i=\frac{8-\alpha}{10}} =$$

$$= \tfrac{1}{10}\sqrt{99\alpha^2-84\alpha+36},\ i=4,\ 5.$$

Тогда

$$Con_{int}(F_1(\alpha)) = \min_{1\le i\le 5}\min_{\omega_i\in[0,1]} d_J(F_1(\alpha),\ F_{\{x_i\}}^{\omega_i}) =$$

$$= \tfrac{1}{30}\sqrt{\tfrac{3479}{4}\alpha^2-841\alpha+239}.$$

Для множества $B_2=\{x_2,\ x_3,\ x_4\}$ (в этом случае $A\cap B_2\ne\varnothing$, но $A\not\subseteq B_2$ и $B_2\not\subseteq A$) получим, что $Con_{int}(F_2(\alpha)) = Con_{int}(F_1(\alpha))$ $\forall\alpha\in[0,1]$, а для множества $B_3=\{x_3,\ x_4,\ x_5\}$ (в этом случае $A\cap B_3=\varnothing$)

$$Con_{int}(F_3(\alpha)) =$$

$$= \min\left\{\tfrac{1}{20}\sqrt{351\alpha^2-376\alpha+144},\tfrac{1}{30}\sqrt{896\alpha^2-676\alpha+239}\right\}.$$

Нетрудно видеть, что $Con_{int}(F_1(\alpha)) = Con_{int}(F_2(\alpha)) \le$ $\le Con_{int}(F_3(\alpha))$ $\forall\alpha\in[0,1]$.♦

4.4. Декомпозиционный подход к вычислению меры внутреннего конфликта

В основе декомпозиционного подхода лежит предположение, что источник информации, который формирует тело свидетельств с большим внутренним конфликтом, мог быть неоднородным. Например, информация о прогностической стоимости акций получена с помощью нескольких различных методик. В этом случае можно считать, что тело свидетельств $F=(\mathcal{A},m)$ является результатом комбинирования нескольких декомпозируемых тел свидетельств $F_i=(\mathcal{A}_i,m_i)\in\mathcal{F}(X)$, $i=1,\dots,l,$ с помощью некоторого правила комбинирования $\otimes$: $F=F_1\otimes\ldots\otimes F_l$. Поэтому для фиксированного правила комбинирования $\otimes$ и фиксированной меры (внешнего) конфликта $Con_{ext}:\underbrace{\mathcal{F}(X)\times\ldots\times\mathcal{F}(X)}_{l}\to[0,1]$ (см. первую часть обзора [1]) внутренний декомпозиционный конфликт Con_{dec} тела свидетельств F можно оценить по формуле [26, 27]:

$$Con_{dec}(F) = Con_{ext}(F_1,\dots,F_l)$$

при условии

$$F=F_1\otimes\ldots\otimes F_l.$$

Поскольку последнее уравнение имеет множество решений, то можно поставить оптимизационные задачи о нахождении наибольшего $\overline{Con_{dec}^{\otimes}}(F)$ и наименьшего $\underline{Con_{dec}^{\otimes}}(F)$ конфликтов:

$$\overline{Con_{dec}^{\otimes}}(F) = \sup_{F=F_1\otimes\ldots\otimes F_l} Con_{ext}(F_1,\dots,F_l),$$

$$\underline{Con_{dec}^{\otimes}}(F) = \inf_{F=F_1\otimes\ldots\otimes F_l} Con_{ext}(F_1,\dots,F_l). \qquad (4)$$

Пусть $S_n=\left\{\mathbf{s}=(s_i)_{i=1}^n : s_i\ge 0\ \forall i=1,\dots,n,\ \sum_{i=1}^n s_i=1\right\}$ – n-мерный симплекс.

Рассмотрим некоторые частные случаи указанной задачи.

Декомпозиция с помощью правила Демпстера. Пусть для декомпозиции применяется правило Демпстера $\otimes_D$. Тогда задачи (4) для $l=2$ примут вид:

найти

$$K(F_1,F_2) = \sum_{\substack{B\cap C=\varnothing,\\ B\in\mathcal{A}_1,C\in\mathcal{A}_2}} m_1(B)m_2(C)\to\sup\ (\inf) \qquad (5)$$

при условии, что

$$\mathbf{m}_1=(m_1(B))_{B\in\mathcal{A}_1}\in S_{|\mathcal{A}_1|},\ \mathbf{m}_2=(m_2(C))_{C\in\mathcal{A}_2}\in S_{|\mathcal{A}_2|}, \quad (6)$$

$$\left(1-K_0(F_1,\ F_2)\right)m(A) = \\ = \sum_{\substack{B\cap C=A,\\ B\in\mathcal{A}_1,C\in\mathcal{A}_2}} m_1(B)m_2(C),\ A\in\mathcal{A}, \qquad (7)$$

$$K(F_1,F_2)<1. \qquad (8)$$

Это задачи квадратичного программирования при линейных (6) и квадратичных (7)–(8) ограничениях. Заметим, что в случае общей постановки (5)–(8) мера декомпозиционного конфликта $\underline{Con_{dec}^{\otimes_D}}(F)=0$ и достигается для тел свидетельств $F_1=F$ и $F_2=F_X$. Наибольшее значение конфликта $K(F_1,F_2)=1$ для двух тел свидетельств, удовлетворяющих условиям (6)–(7) (без условия (8)), будет достигаться, например, для таких тел свидетельств $F_i=(\mathcal{A}_i,m_i)\in\mathcal{F}(X)$, $i=1,2$, в которых $B\cap C=\varnothing$ $\forall B\in\mathcal{A}_1,\forall C\in\mathcal{A}_2$. Причем последние тела свидетельств никак не связаны с телом свидетельств F.

Декомпозиция с помощью дизъюнктивного правила консенсуса. Пусть для декомпозиции применяется дизъюнктивное правило консенсуса $\otimes_{\cup}$ вида (1). Тогда вместо условия (7) в задаче нахождения внутреннего конфликта будет применяться условие (1). Таким образом, в этом случае мы имеем задачу о нахождении тел свидетельств, имеющих наибольший (наименьший) канонический конфликт (5) и удовлетворяющих условиям (1), (6).

Замечание 3. В случае использования дизъюнктивного правила консенсуса иногда удобно считать, что пустое множество тоже может быть фокальным элементом тела свидетельств. Это можно интерпретировать как то, что альтернатива $x\notin X$, а значение $m(\varnothing)$ – как степень доверия к тому, что $x\notin X$. Соответствующие решения будем называть обобщенными и обозначать через

$\mathcal{CON}_{dec}^{\otimes_{\cup}}(F)$. Тогда наибольшее значение канонического конфликта (5), удовлетворяющего условиям (1) и (6), будет равно $\overline{\mathcal{CON}_{dec}^{\otimes_{\cup}}}(F)=1$ и достигаться на декомпозиции тела свидетельств F вида $F_1 = F$, $F_2 = F_\varnothing$.

Как видно, в общей постановке задача нахождения наибольшего и наименьшего внутренних конфликтов $\overline{Con_{dec}^{\otimes}}(F)$ и $\underline{Con_{dec}^{\otimes}}(F)$ часто приводит к тривиальным решениям.

В то же время понятно, что предположение о неоднородности источника информации тела свидетельств с большим внутренним конфликтом подразумевает, что те тела свидетельств, композиция которых образует исходное тело свидетельств, должны быть в некотором смысле более простыми, чем исходное тело свидетельств. Кроме того, сам способ комбинирования также может накладывать определенные ограничения на декомпозируемое множество тел свидетельств. В частности, можно выделить такие ограничения на декомпозируемое множество тел свидетельств:

– структурные ограничения,
– ограничения по конфликтности,
– ограничения, связанные с правилами комбинирования,
– смешанные ограничения.

Структурные ограничения предполагают, что декомпозируемое множество тел свидетельств ищется в некотором классе простых по структуре тел свидетельств. Примерами таких классов являются простые тела свидетельств (или их обобщения, см. ниже), консонантные тела свидетельств и т. д.

Так, в работе [28] внутренний конфликт определялся как конфликт между так называемыми обобщенными простыми БДН (*generalized simple basic belief assignment*, это тела свидетельств вида $F_A^{\omega} = (1-\omega)F_A + \omega F_X$, где $\omega \in (0,\infty)$), на которые однозначно раскладывается исходное недогматическое (т. е. $m(X) > 0$) тело свидетельств (такое разложение Шейфер назвал каноническим). Если исходное тело свидетельств является догматическим (т. е. $m(X) = 0$), то перед разложением необходимо выполнить дисконтирование БДН с малым параметром $\varepsilon > 0$: $m(X) = \varepsilon > 0$, функции масс остальных фокальных элементов пересчитываются пропорционально исходным значениям. Само разложение недогматического тела свидетельств F на обобщенные простые БДН можно выполнить в два этапа с помощью следующего способа согласно изложенному в докладе [29]. На первом этапе вычисляются значения так называемой функции общности (*commonality function*): $q(A) = \sum_{B \supseteq A} m(B)$. На втором этапе для каждого подмножества $B \in 2^X \setminus X$ вычисляются веса ω_B тел свидетельств $F_B^{\omega_B}$ по формуле $\omega_B = \prod_{A \supseteq B} q(A)^{(-1)^{|A|-|B|+1}}$. Тогда [29] $F = \otimes_{B \in 2^X \setminus X} F_B^{\omega_B}$, где $\otimes = \otimes_{ND}$ – ненормализованное правило Демпстера. В качестве меры внутреннего конфликта в работе [28] было предложено использовать значение $Con_{dec\_simple}(F) = \tilde{m}(\varnothing)$, где $\tilde{F} = (\mathcal{A}, \tilde{m}) = \otimes_{B \in 2^X \setminus \{\varnothing, X\}} F_B^{\omega_B}$. Нетрудно видеть, что

$$Con_{dec\_simple}(F) = \sum_{\substack{B_{i_1} \cap \ldots \cap B_{i_k} = \varnothing, \\ B_{i_1},\ldots,B_{i_k} \in 2^X \setminus \{\varnothing, X\}}} \prod_{s=1}^{k} \left(1-\omega_{B_{i_s}}\right) \times \\ \times \prod_{B \in \left(2^X \setminus \{\varnothing, X\}\right) \setminus \left\{B_{i_1},\ldots,B_{i_k}\right\}} \omega_B. \quad (9)$$

Пример 4. Если $X = \{x_1, x_2\}$ и $F = \alpha F_{\{x_1\}} + \beta F_{\{x_2\}} + (1-\alpha-\beta)F_X$, $\alpha, \beta \ge 0$, $\alpha + \beta < 1$, то $q(\varnothing) = 1$, $q(\{x_1\}) = 1-\beta$, $q(\{x_2\}) = 1-\alpha$, $q(X) = 1-\alpha-\beta$. Поэтому $\omega_\varnothing = \dfrac{(1-\alpha)(1-\beta)}{1-\alpha-\beta}$, $\omega_{\{x_1\}} = \dfrac{1-\alpha-\beta}{1-\beta}$, $\omega_{\{x_2\}} = \dfrac{1-\alpha-\beta}{1-\alpha}$. Следовательно, $Con_{dec\_simple}(F) = \tilde{m}(\varnothing) = (1-\omega_{\{x_1\}}) \times (1-\omega_{\{x_2\}}) = \dfrac{\alpha\beta}{(1-\alpha)(1-\beta)}$. ♦

Для вычисления меры Con_{dec_simple} тела свидетельств из примера 1 нам понадобится следующая

Лемма. *Пусть* $F = \alpha F_A + \beta F_B + (1-\alpha-\beta)F_X$, $\alpha, \beta \in (0,1)$, $\alpha + \beta < 1$, $A, B \in 2^X$. *Тогда:*

– *если* $A \subseteq B \subseteq X$, *то* $\omega_A = 1-\alpha$, $\omega_B = \dfrac{1-\alpha-\beta}{1-\alpha}$, $\omega_D = 1 \quad \forall D \in 2^X \setminus \{\varnothing, A, B, X\}$;

– *если* $A \cap B \ne \varnothing$, $A \not\subseteq B$ *и* $B \not\subseteq A$, *то* $\omega_A = \dfrac{1-\alpha-\beta}{1-\beta}$, $\omega_B = \dfrac{1-\alpha-\beta}{1-\alpha}$, $\omega_{A \cap B} = \dfrac{(1-\alpha)(1-\beta)}{1-\alpha-\beta}$, $\omega_D = 1 \quad \forall D \in 2^X \setminus \{\varnothing, A \cap B, A, B, X\}$;

– *если* $A \cap B = \varnothing$, то $\omega_A = \dfrac{1-\alpha-\beta}{1-\beta}$, $\omega_B = \dfrac{1-\alpha-\beta}{1-\alpha}$, $\omega_D = 1 \quad \forall D \in 2^X \setminus \{\varnothing, A, B, X\}$.

Следствие. Если $F = \alpha F_A + \beta F_B + (1-\alpha-\beta)F_X$, $\alpha, \beta \in (0,1)$, $\alpha + \beta < 1$ то:

– $Con_{dec\_simple}(F) = 0$, если $A \cap B \ne \varnothing$;

– $Con_{dec\_simple}(F) = \dfrac{\alpha\beta}{(1-\alpha)(1-\beta)}$, если $A \cap B = \varnothing$.

Пример 5. Для тел свидетельств $F_i(\alpha)=\alpha F_A+(1-\alpha)F_{B_i}$, $\alpha\in[0,1]$, $A=\{x_1, x_2\}$, $|B_i|=3$, $i=1, 2, 3$, на множестве $X=\{x_1,..., x_5\}$ (см. пример 1) выполним сначала дисконтирование с малым параметром $\varepsilon>0$, получим тела свидетельств $F_i(\alpha,\varepsilon)=\alpha(1-\varepsilon)F_A+(1-\alpha)(1-\varepsilon)F_{B_i}+\varepsilon F_X$, $i=1, 2, 3$. Тогда из доказанного выше следствия вытекает, что в первом случае $B_1=\{x_1, x_2, x_3\}$ (когда $A\subseteq B_1$) и во втором случае $B_2=\{x_2, x_3, x_4\}$ (когда $A\cap B_2\neq\varnothing$, но $A\not\subseteq B_2$ и $B_2\not\subseteq A$) имеем $Con_{dec\_simple}(F_i(\alpha, \varepsilon))=0$, $i=1,2$. В третьем же случае $B_3=\{x_3,x_4,x_5\}$, когда $A\cap B_3=\varnothing$, имеем $Con_{dec\_simple}(F_3(\alpha, \varepsilon))=(1-\omega_{\{x_1,x_2\}})\times$ $\times(1-\omega_{\{x_3,x_4,x_5\}})=\dfrac{\alpha(1-\alpha)(1-\varepsilon)^2}{(\alpha(1-\varepsilon)+\varepsilon)((1-\alpha)(1-\varepsilon)+\varepsilon)}$. В пределе при $\varepsilon\to+0$ получим, что $Con_{dec\_simple}(F_3(\alpha))=$ $=\begin{cases}1, \ \alpha\in(0, 1),\\ 0, \ \alpha=0\vee\alpha=1.\end{cases}$ ♦

Последний пример показывает, что для догматических тел свидетельств мера конфликта Con_{dec_simple} является довольно «грубой». Кроме того, разложение на обобщенные простые БДН имеет и другие недостатки. Прежде всего, тела свидетельств вида F_A^{ω}, когда $\omega\notin[0, 1]$, требуют определенной интерпретации. В этом случае нельзя сказать, что исходное тело свидетельств получено в результате комбинирования информации из нескольких других источников. Кроме того, в разложении может быть до $2^{|X|}-1$ обобщенных простых БДН, отличных от бессодержательного тела свидетельств F_X. Хотя на самом деле (как показывает следующий пример) исходное тело свидетельств может быть результатом комбинирования небольшого числа более сложных, чем обобщенные простые БДН, но внутренне неконфликтных тел свидетельств.

Пример 6. Пусть на множестве $X=\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ заданы два тела свидетельств: $F_1=\alpha F_{\{x_2,x_3\}}+$ $+(1-\alpha)F_{\{x_1,x_2,x_3\}}$, $\alpha\in(0,1)$, и $F_2=\beta F_{\{x_1,x_4\}}+(1-\beta)F_{\{x_1,x_2,x_4\}}$, $\beta\in(0,1)$. Эти тела свидетельств являются консонантными, т. е. каждое из них неконфликтно с самим собой. Их каноническая мера конфликта $K=K(F_1, F_2)=\alpha\beta$. Если мы выполним комбинирование этих тел свидетельств с помощью ненормализованного правила Демпстера, то получим: $F=F_1\otimes_{ND}F_2=(1-$ $-\alpha)\beta F_{\{x_1\}}+\alpha(1-\beta)F_{\{x_2\}}+(1-\alpha)(1-\beta)F_{\{x_1,x_2\}}$. После декомпозиции этого тела свидетельств на обобщенные простые БДН и вычисления соответствующей меры конфликта получим (см. пример 4): $Con_{dec\_simple}(F)=$ $=\dfrac{\alpha\beta(1-\alpha)(1-\beta)}{(1-\alpha+\alpha\beta)(1-\beta+\alpha\beta)}<K$. То есть конфликт между исходными консонантными телами свидетельств будет больше того, который мы получим в результате декомпозиции комбинированного тела свидетельств на обобщенные простые БДН. ♦

Близкий к изложенному в работе [28] декомпозиционный подход к оцениванию внутреннего конфликта тел свидетельств рассматривался в статье [30]. В этой работе исследовалась функция конфликта на наборах непересекающихся подмножеств $\{B_{i_1},...,B_{i_k}\}$, $B_{i_1}\cap...\cap B_{i_k}=\varnothing$, вида $f_{\varnothing}\left(\{B_{i_1},...,B_{i_k}\}\right)=\prod_{s=1}^{k}\left(1-\omega_{B_{i_s}}\right)\prod_{B\in\left(2^X\setminus\{\varnothing,X\}\right)\setminus\{B_{i_1},...,B_{i_k}\}}\omega_B$ (см. формулу (9)), а также функция локального конфликта (*local conflict function*) $\overline{f}_{\varnothing}(A)=$ $=\sum_{\substack{A\in\{B_{i_1},...,B_{i_k}\},\\ B_{i_1}\cap...\cap B_{i_k}=\varnothing}}\dfrac{1}{\left|\{B_{i_1},...,B_{i_k}\}\right|}f_{\varnothing}\left(\{B_{i_1},...,B_{i_k}\}\right)$, $A\subsetneq X$.

Эти функции использовались в работе [30] для принятия решения о выборе наименее конфликтных источников информации для комбинирования в задаче локализации положения робота.

Ограничения по конфликтности предполагают, что декомпозируемое множество тел свидетельств ищется в классе таких тел свидетельств, которые имеют меньший внутренний конфликт, чем исходное тело свидетельств относительно какой-либо другой (недекомпозиционной) меры конфликта.

Пример 7. Пусть $X=\{x_1,x_2,x_3\}$ и $F=\alpha F_{\{x_1\}}+$ $+\beta F_{\{x_2\}}+\gamma F_{\{x_3\}}+(1-\alpha-\beta-\gamma)F_{\{x_2,x_3\}}$, $\alpha, \beta, \gamma>0$, $\alpha+\beta+$ $+\gamma<1$. Рассмотрим декомпозицию тела свидетельств F с помощью ненормализованного правила Демпстера: $F=F_1\otimes_{ND}F_2$. Причем декомпозицию будем искать в классе неконфликтных тел свидетельств (т. е. с нулевым автоконфликтом: $Con_{aut}(F_i)=0$, $i=1, 2$). Нетрудно показать, что единственная декомпозиция в этом случае будет иметь вид:

$$\begin{cases}F_1=\lambda_1 F_{\{x_2,x_3\}}+\lambda_2 F_{\{x_1,x_2\}}+\lambda_3 F_{\{x_2\}},\\ F_2=\mu_1 F_{\{x_2,x_3\}}+\mu_2 F_{\{x_1,x_3\}}+\mu_3 F_{\{x_3\}}.\end{cases}$$

Из равенства $F=F_1\otimes_{ND}F_2$ следует, что неотрицательные коэффициенты λ_i,μ_i, $i=1,2,3,$ должны удовлетворять системе

$$\begin{cases}\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=1, \quad \mu_1+\mu_2+\mu_3=1,\\ \lambda_1\mu_1=1-\alpha-\beta-\gamma, \quad \lambda_2\mu_2=\alpha,\\ (\lambda_2+\lambda_3)\mu_1=\beta, \quad \lambda_1(\mu_2+\mu_3)=\gamma.\end{cases}$$

Эта система имеет решение, если $\alpha(1-\alpha-\beta-\gamma)=\beta\gamma$. В этом случае решением будет $\lambda_1=1-\alpha-\beta$, $\mu_1=1-\alpha-\gamma$, $\lambda_2=\dfrac{\alpha}{\alpha+\gamma}$, $\mu_2=\alpha+\gamma$, $\lambda_3=\mu_3=0$. При этом $Con_{dec}(F)=K(F_1,F_2)=0$. Но, например, $Con_{aut}(F)=\alpha(1-\alpha)+\beta\gamma$. ♦

Ограничения, связанные с правилами комбинирования. Выбор правила комбинирования накладывает определенные ограничения на множество допустимых тел свидетельств. Это обусловлено различным характером этих правил. Например, конъюнктивное правило является оптимистичным, а дизъюнктивное – пессимистичным. Ограничения на множество допустимых тел свидетельств, согласованные с характером правил комбинирования, можно задать, например, с помощью индексов неточности [6]. Здесь и далее в качестве индекса неточности будем использовать нормированную обобщенную меру Хартли $H_0(F)=$ $=\sum_{A\in\mathcal{A}} m(A)\log_{|X|}|A|$, хотя все результаты справедливы и для более широкого класса таких индексов, в частности, для строгих линейных индексов неточности (см. работы [26, 27]).

С учетом оптимистичности правила Демпстера (см. утверждение 1) задача оценивания внутреннего конфликта тела свидетельств F при декомпозиции его на два тела свидетельств $F_i=(\mathcal{A}_i,m_i)\in\mathcal{F}(X)$, $i=1,2$, может быть сформулирована следующим образом. Требуется найти наибольшее (наименьшее) значение функционала $K(F_1,F_2)$ при выполнении ограничений (6)–(8) и условий

$$H_0(F)\le H_0(F_i)\,,\ i=1,2\,. \tag{10}$$

Решения указанных задач обозначим через $\underline{Con}^{\otimes_D}_{dec\_gen}(F)$ и $\overline{Con}^{\otimes_D}_{dec\_gen}(F)$ соответственно. Заметим, что для тел свидетельств $F_1=F$ и $F_2=F_X$ выполняются условия (10), так как $H_0(F_X)=1$. Поэтому всегда $\underline{Con}^{\otimes_D}_{dec\_gen}(F)=0$. Тогда может быть поставлена задача о нахождении тел свидетельств, имеющих наибольший канонический конфликт (5) и удовлетворяющих условиям (6)–(8), (10).

Кроме ограничений снизу вида (10), могут рассматриваться и ограничения сверху на количество незнания в информации, содержащейся в декомпозируемых телах свидетельств: $H_0(F_i)\le H_{\max}$, $i=1,2$, где $H_{\max}$ – максимально допустимый уровень незнания.

Если декомпозиция тела свидетельств F осуществляется с помощью дизъюнктивного правила консенсуса, то вместо условий (7) в задаче нахождения внутреннего конфликта будут использованы условия (1). Кроме того, для дизъюнктивного правила консенсуса и любого линейного индекса неточности, в частности для H_0, верна оценка (см. утверждение 1)

$$H_0(F)\ge H_0(F_i)\,,\ i=1,\,2\,. \tag{11}$$

Таким образом, в этом случае мы имеем задачу о нахождении тел свидетельств, имеющих наибольший (наименьший) канонический конфликт (5) и удовлетворяющих условиям (1), (6), (11). Решения соответствующих задач будем обозначать через $\underline{Con}^{\otimes_\cup}_{dec\_gen}(F)$ и $\overline{Con}^{\otimes_\cup}_{dec\_gen}(F)$.

Пример 8. Пусть $X=\{x_1,x_2\}$ и $F=\alpha F_{\{x_1\}}+\beta F_{\{x_2\}}+(1-\alpha-\beta)F_X$, $\alpha,\beta\ge 0$, $\alpha+\beta<1$. Тогда [26] $\overline{Con}^{\otimes_D}_{dec\_gen}(F)=\dfrac{\alpha\beta}{(1-\alpha)(1-\beta)}$, и если $\sqrt{\alpha}+$ $+\sqrt{\beta}\le 1$, то $\underline{Con}^{\otimes_\cup}_{dec\_gen}(F)=2\sqrt{\alpha\beta}$. При $\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}>1$ соответствующая декомпозиционная задача для нахождения меры конфликта $\underline{Con}^{\otimes_\cup}_{dec\_gen}$ не имеет решения (но будет иметь решение в обобщенном смысле, см. замечание 3). Отметим, что на множестве $X=\{x_1,x_2\}$ $\overline{Con}^{\otimes_D}_{dec\_gen}=Con_{dec\_simple}$ (см. пример 4). ♦

Некоторые свойства мер конфликта, полученных декомпозиционным методом с ограничениями, связанными с правилами комбинирования, можно найти в статье [31], где, в частности, показано, что $\overline{Con}^{\otimes_D}_{dec\_gen}(F)=1$ в случае полной конфликтности фокальных элементов, $\overline{Con}^{\otimes_D}_{dec\_gen}(F)=0$ для простых тел свидетельств.

Общим недостатком декомпозиционного подхода является его высокая вычислительная сложность. Но это компенсируется хорошей интерпретируемостью такой меры в случае, когда источник информация является неоднородным.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе дан аналитический обзор современного состояния исследований по анализу противоречивости (конфликтности) информации в рамках теории функций доверия в том случае, когда эта информация описывается одним телом свидетельств.

Отметим, что:

- существует ряд требований к мере внутреннего конфликта: минимальность при той или иной степени неконфликтности фокальных элементов, антимонотонность по специализации, неубывание при оптимистичном комбинировании, невозрастание при отображении базового множества;

- эти свойства положены в основу аксиоматики меры внутреннего конфликта; найден общий вид меры внутреннего конфликта; показано, что на множестве вероятностных мер он будет совпадать с некоторым энтропийным функционалом (в частности, с энтропией Шеннона при соответствующем выборе образующей функции);
- существует несколько способов оценивания внутреннего конфликта: энтропийный, на основе вычисления автоконфликтности, на основе вычисления контурной функции, метрический, декомпозиционный.

Рассмотренные методы оценивания внутреннего конфликта отличаются условиями выполнения желательных свойств, различной чувствительностью, вычислительной сложностью и той моделью, которая положена в основу оценивания: среднее распределения масс конфликтующих фокальных элементов, удаленность от множества неконфликтующих тел свидетельств, автоконфликтность, мера логической согласованности фокальных элементов, неоднородность источников информации и т. д.

Конечно же, существует и ряд открытых проблем в оценивании внутреннего конфликта тел свидетельств:

– исследование свойств мер внутреннего конфликта, основанных на той или иной модели;

– нахождение общего вида меры внутреннего конфликта для других систем аксиом;

– исследование мер конфликта для тел свидетельств, определенных на пространстве с мерой

– и др.

Актуальными являются прикладные задачи, связанные с оцениванием внутреннего конфликта. Среди них можно выделить проблему уменьшения внутреннего конфликта тела свидетельств (в том числе полученных на основе обработки экспертных данных). Эта проблема, в частности, может быть решена путем обобщения исходного тела свидетельств (см. условие I2) или его декомпозиции на внутренне неконфликтные тела свидетельств (см. п. 4.4).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Лепский А.Е.* Анализ противоречивости информации в теории функций доверия. Ч. 1. Внешний конфликт // Проблемы управления. – 2021. – № 5. – С. 3–19. [*Lepskiy, A.* Analysis of the inconsistency of information in the theory of belief functions. Part 1. External conflict // Control Sciences. – No. 5. – P. 2–16]
2. *Daniel, M.* Conflicts within and between Belief Functions // Hüllermeier, E., Kruse, R., Hoffmann, E. (Eds.) – IPMU 2010: LNAI 6178, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2010. – P. 696–705
3. *Daniel, M.* Non-conflicting and Conflicting Parts of Belief Functions // Coolen, F., de Cooman, G., Fetz, T., Oberguggenberger, M. (Eds.) – ISIPTA’11. Proc. of the 7th ISIPTA: Studia Universitätsverlag. – Innsbruck, 2011. – P. 149–158.
4. *Dempster, A.P.* Upper and Lower Probabilities Induced by a Multivalued Mapping // Annals of Mathematical Statistics. – 1967. – Vol. 38. – P. 325–339.
5. *Shafer, G.* A Mathematical Theory of Evidence. – Princeton, N.J.: Princeton University Press, 1976.
6. *Bronevich, A., Lepskiy, A.* Imprecision Indices: Axiomatic, Properties and Applications // Int. J. of General Systems. – 2015. – Vol. 44, no. 7-8. – P. 812–832.
7. *Higashi, M., Klir, G.J.* Measures of Uncertainty and Information Based on Possibility Distributions // Int. J. General Systems. – 1983. – No. 9. – P. 43–58.
8. *Dubois, D., Prade, H.* A Note on Measures of Specificity for Fuzzy Sets // Int. J. of General Systems. – 1985. – No. 10. – P. 279–283.
9. *Sentz, K., Ferson, S.* Combination of Evidence in Dempster-Shafer Theory // In: Report SAND 2002-0835, Sandia National Laboratories, 2002.
10. *Dubois, D., Prade, H.* A Set-Theoretic View on Belief Functions: Logical Operations and Approximations by Fuzzy Sets // Int. J. of General Systems. – 1986. – No. 12. – P. 193–226.
11. *Destercke, S., Burger, T.* Toward an Axiomatic Definition of Conflict between Belief Functions // IEEE Transactions on Cybernetics. – 2013. – Vol. 43, no. 2. – P. 585–596.
12. *Pichon, F., Jousselme, A.-L., Ben Abdallah, N.* Several Shades of Conflict // Fuzzy Sets and Systems. – 2019. – Vol. 366. – P. 63–84.
13. *Lepskiy, A.* General Schemes of Combining Rules and the Quality Characteristics of Combining // F. Cuzzolin (Ed.): BELIEF 2014, LNAI 8764. – Springer-Verlag, 2014. – P. 29–38.
14. *Harmanec, D.* Toward a Characterization of Uncertainty Measure for the Dempster–Shafer Theory // Proc. of the 11 Intern. Conf. on Uncertainty in Artificial Intel. – Montreal, Canada, 1995. – P. 255–261.
15. *Bronevich, A., Klir, G.J.* Measures of Uncertainty for Imprecise Probabilities: An Axiomatic Approach // Int. J. of Approximate Reasoning. – 2010. – Vol. 51. – P. 365–390.
16. *Bronevich, A., Lepskiy, A.* Measures of Conflict, Basic Axioms and Their Application to the Clusterization of a Body of Evidence // Fuzzy Sets and Systems. – 2021. – DOI: https://doi.org/10.1016/j.fss.2021.04.016.
17. *Klir, G.J.* Uncertainty and Information: Foundations of Generalized Information Theory. – Hoboken, NJ: Wiley-Interscience, 2006.
18. *Yager, R.R.* Entropy and Specificity in a Mathematical Theory of Evidence // Int. J. of General Systems. – 1983. – Vol. 9, no. 4. – P. 249–260.
19. *Höhle, U.* Entropy with respect to plausibility measures // Proc. of the 12 IEEE Intern. Symposium on Multiple-Valued Logic. – Paris, 1982. – P. 167–169.
20. *Klir, G.J., Ramer, A.* Uncertainty in the Dempster-Shafer Theory: A Critical Re-examination // Int. J. of General Systems. – 1990. – Vol. 18, no. 2. – P. 155–166.

21. *Klir, G.J., Parviz, B.* Probability-Possibility Transformations: A Comparison // Int. J. of General Systems. – 1992. – Vol. 21, no. 3. – P. 291–310.
22. *Osswald, C., Martin, A.* Understanding the Large Family of Dempster-Shafer Theory's Fusion Operators – A Decision-Based Measure // Int. Conf. on Information Fusion. – Florence, Italy, 2006.
23. *Daniel, M.* Properties of Plausibility Conflict of Belief Functions // Rutkowski, L., Korytkowski, M., Scherer, R., et al. (Eds.). – ICAISC 2013, Part I, LNAI 7894. – Springer-Verlag, 2013. – P. 235–246.
24. *Bronevich, A.G., Spiridenkova, N.S.* Measuring Uncertainty for Interval Belief Structures and Its Application for Analyzing Weather Forecasts // in: Kacprzyk, J., Szmidt, E., Zadrożny, S., Krawczak, M. (Eds.). – Advances in Fuzzy Logic and Technology 2017, Advances in Intelligent Systems and Computing. – Vol. 641. – Springer, Cham, 2018. – P. 273–285.
25. *Jousselme, A.-L., Grenier, D., Bossé, E.* A New Distance between Two Bodies of Evidence // Information Fusion. – 2001. – No. 2. – P. 91–101.
26. *Lepskiy, A.* On Internal Conflict as an External Conflict of a Decomposition of Evidence // Vejnarová J., Kratochvil V. (Eds.): – BELIEF 2016, LNAI 9861. – Springer-Verlag, 2016. – P. 25–34.
27. *Lepskiy, A.* Decomposition of Evidence and Internal Conflict // Procedia Computer Science. – 2017. – Vol. 122. – P. 186–193.
28. *Schubert, J.* The Internal Conflict of a Belief Function // Denoeux T., Masson, M.H. (Eds.) – Belief Functions: Theory and Applications: Advances in Intelligent and Soft Computing. – Vol. 164. – Springer, Berlin, Heidelberg, 2012. – P. 169–177.
29. *Smets, P.* The Canonical Decomposition of a Weighted Belief // Proc. of the 14th Intern. Joint Conf. on Artificial Intel., 1995. – P. 1896–1901.
30. *Roquel, A., Le Hégarat-Mascle, S., Bloch, I., Vincke, B.* Decomposition of Conflict as a Distribution on Hypotheses in the Framework on Belief Functions// Int. J. of Approximate Reasoning. – 2014. – Vol. 55. – P. 1129–1146.
31. *Lepskiy, A.E.* Decompositional Approach for Evaluation of Internal Conflict in the Framework of the Evidence Theory // Nechetkie Sistemy i Myagkie Vychisleniya. – 2020. – Vol. 15, no. 1. – P. 43–63.

Статья представлена к публикации членом редколлегии П.Ю. Чеботаревым.

Поступила в редакцию 19.07.2021,
после доработки 27.08.2021.
Принята к публикации 31.08.2021

Лепский Александр Евгеньевич – д-р физ.-мат. наук, Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», Москва, ✉ alex.lepskiy@gmail.com.

ANALYSIS OF INFORMATION INCONSISTENCY IN BELIEF FUNCTION THEORY. PART II: INTERNAL CONFLICT

A.E. Lepskiy

National Research University Higher School of Economics, Moscow, Russia

✉ alex.lepskiy@gmail.com

Abstract. Part II of the survey considers the measure of internal conflict in a body of evidence within belief function theory (the Dempster–Shafer theory of evidence). The concepts of non-conflict focal elements in a body of evidence and the basic requirements applied to measures of internal conflict are discussed. Some axiomatics of a measure of internal conflict based on strengthening desirable properties is studied. The general forms of measures of internal conflict that satisfy this system of axioms are presented and analyzed. Different methods for estimating internal conflict are considered: an entropy approach, methods based on auto-conflict calculation and contour function maximization, and metric and decompositional approaches. The decompositional approach assumes that the information source for a body of evidence with great internal conflict could be heterogeneous. This approach is considered in detail. Many illustrative examples are provided.

Keywords: belief function theory, combining rules, inconsistency of bodies of evidence, measure of internal conflict.

Funding. This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research, project no. 20-11-50077.