УДК 519.81+519.722 DOI: http://doi.org/10.25728/pu.2021.5.1

АНАЛИЗ ПРОТИВОРЕЧИВОСТИ ИНФОРМАЦИИ В ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ ДОВЕРИЯ. Ч. 1. ВНЕШНИЙ КОНФЛИКТ[1]

А.Е. Лепский

Аннотация. Приведен аналитический обзор результатов по анализу противоречивости информации в рамках теории функций доверия (теории свидетельств Демпстера – Шейфера), который интенсивно развивается в течение последних 10–15 лет. В первой части обзора рассматривается понятие меры внешнего конфликта тел свидетельств. Обсуждаются понятия конфликтных и неконфликтных тел свидетельств, а также основные требования, предъявляемые к мерам внешнего конфликта. Анализируются различные аксиомы меры внешнего конфликта. Приведены результаты по общему виду мер внешнего конфликта, удовлетворяющих системе аксиом. Рассмотрены различные способы построения мер внешнего конфликта: метрический, алгебраический и структурный подходы, оценивание с помощью правил комбинирования. Обсуждаются: проблема робастного оценивания внешнего конфликта, соотношение между мерой конфликта и метрикой на множестве тел свидетельств, согласованность правил комбинирования тел свидетельств и мер конфликта. Материал статьи проиллюстрирован большим количеством примеров.

Ключевые слова: теория функций доверия, правила комбинирования, конфликтность тел свидетельств, мера внешнего конфликта.

ВВЕДЕНИЕ

Во многих задачах анализа данных и принятия решений информацию, поступающую от различных источников (экспертов, аналитиков, мониторинговых данных и пр.), удобно описывать с помощью так называемых тел свидетельств, которые являются основным понятием в теории функций доверия (теории свидетельств Демпстера – Шейфера) [1, 2]. Тело свидетельств представляет собой совокупность множества некоторых подмножеств (так называемых фокальных элементов) из универсального множества и определенную на этих подмножествах функцию масс. В настоящее время теория функций доверия находит многочисленные приложения в анализе данных, обработке экспертной информации, задачах принятия решений и т. д. Это обусловлено как понятной, интерпретируемой, связанной с классическим вероятностным подходом основанием самой теории, так и наличием широкого инструментария для моделирования и оценивания таких важных факторов, как неопределенность и неточность информации, надежность источников информации, противоречивость информации из разных источников, степень незнания и т. д. Кроме того, в теории функций доверия широко развит аппарат комбинирования тел свидетельств (правила комбинирования Демпстера, Ягера, Инагаки и пр.) с учетом перечисленных выше факторов.

В настоящей статье проанализированы основные результаты, полученные за последние 15 лет, которые связаны с анализом противоречивости (конфликтности) источников информации в рамках теории функций доверия. Противоречивость информации, полученной из разных источников, является важной априорной характеристикой этих источников, которая должна учитываться в задаче принятия решения о возможности агрегирования этих источников или выбора источников из некоторого множества для агрегирования. Например, если один аналитик прогнозирует, что стоимость акций некоторой компании будет через месяц в промежутке [40, 50], а другой – в промежутке [70, 85] (все значения указаны в условных единицах), то можно говорить о большом (внешнем) конфликте между соответствующими свидетельствами.

[1]Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 20-11-50077.

Хотя само понятие конфликта (противоречивости) источников информации появилось еще в пионерских работах по теории свидетельств, в последнее время исследование понятия конфликтности в рамках теории функций доверия привлекло внимание многих исследователей и выделилось в отдельное научное направление. В рамках этого направления, в частности, исследовалась аксиоматика мер внешнего и внутреннего конфликта, различные способы оценивания конфликта, свойства мер конфликта, а также рассматривался ряд прикладных задач, связанных с оцениванием конфликта. В частности, оценивание величины конфликтности информации находит применение в задачах управления конфликтами [3], при анализе экспертной информации и рекомендаций [4–6], при анализе результатов голосований [7], в задаче разработке торговых стратегий [8], в задаче регистрации изображений [9] и т. д. Кроме того, связанное с конфликтом понятие метрики между телами свидетельств используется в задачах аппроксимации тел свидетельств [10–13] (которая состоит в том, что «сложное» тело свидетельств с большим числом фокальных элементов заменяется телом свидетельств с меньшим числом фокальных элементов), в задачах классификации [14] и кластеризации [15] данных и т. д. В силу многообразия таких задач, в настоящей статье прикладные аспекты анализа противоречивости в рамках теории функций доверия не рассматриваются.

Основная часть статьи имеет следующую структуру. В § 1 напоминаются основные положения теории функций доверия. В § 2 рассматриваются правила комбинирования тел свидетельств. В § 3 обсуждаются понятия конфликтных и неконфликтных тел свидетельств, а также требования, предъявляемые к мерам внешнего конфликта. В § 4 анализируются различные аксиомы меры конфликта и обсуждается общий вид такой меры, удовлетворяющей некоторой системе аксиом. В § 5 рассматриваются различные способы оценивания внешнего конфликта: метрический (п. 5.1), структурный (п. 5.2), алгебраический (п. 5.3), оценивание конфликта с помощью правил комбинирования (п. 5.4). В § 6 рассматривается робастная процедура оценивания конфликтности. Наконец, в заключении подведены некоторые результаты данного исследования.

Кроме конфликтности между телами свидетельств, рассматривают и конфликтность информации, предоставляемой одним свидетельством (внутренний конфликт). Этому понятию будет посвящена вторая часть обзора.

1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ ДЕМПСТЕРА — ШЕЙФЕРА

Пусть $X=\{x_1,\ldots,x_n\}$ – некоторое конечное множество, 2^X – множество всех подмножеств из множества *X*. Базовым доверительным назначением (БДН, англ. *basic belief assignment*), или функцией масс, в теории Демпстера – Шейфера называют функцию множеств *m:* $2^X \to [0,1]$, которая удовлетворяет условию $\sum_{A\in 2^X} m(A)=1$.

Как правило, рассматриваются нормализованные БДН, в которых $m(\varnothing)=0$. Ненормализованные БДН рассматриваются в рамках так называемой трансферабельной модели доверия (*Transferable Belief Model*), введенной в статье [16]. В этом случае значение $m(\varnothing)>0$ интерпретируется как мера доверия к тому, что истинное значение $x\notin X$.

Подмножество $A\subseteq X$ называют фокальным элементом БДН m, если $m(A)>0$. Пару $F=(\mathcal{A}, m)$ из множества всех фокальных элементов $\mathcal{A}=\{A\}$ и соответствующей БДН $m(A)$, $A\in\mathcal{A}$, называют телом свидетельства. Пусть $\mathcal{F}(X)$ – множество всех тел свидетельств на X, а $\mathcal{P}(X)$ – множество всех вероятностных мер на X

Для случаев, когда тело свидетельств $F=(\mathcal{A},m)$ известно, в теории Демпстера — Шейфера вводятся в рассмотрение некоторые функции множеств, важнейшими из которых являются функция доверия (*belief function*) $Bel(A)=\sum_{B\subseteq A} m(B)$ и двойственная к ней функция правдоподобия $Pl(A)=1-Bel(A^c)$, где A^c – дополнение множества A. Сама функция масс может быть однозначно восстановлена по функции доверия с помощью преобразования Мебиуса $m(A)=\sum_{B\subseteq A}(-1)^{|A\setminus B|}Bel(B)$. Всегда верно, что $Bel(A)\le Pl(A)$ $\forall A\subseteq X$, а длина интервала $[Bel(A), Pl(A)]$ определяет степень неопределенности события A [4]. Будем обозначать функции доверия и правдоподобия через Bel_F и Pl_F соответственно, если надо подчеркнуть их зависимость от тела свидетельств $F=(\mathcal{A}, m)$. Функция $Pl(x)=\sum_{A\in\mathcal{A}:x\in A} m(A)$, $x\in X$, называется контурной функцией тела свидетельств.

Тело свидетельств $F=(\mathcal{A},\ m)$ и соответствующие ему функции множеств могут быть заданы в векторной форме: $\mathbf{m}$ – $2^{|X|}$-мерный вектор, координатами которого являются значения функции масс $m(A)$, $A \in 2^X$, для некоторого упорядочения всех подмножеств из 2^X; **Pl** – $2^{|X|}$-мерный вектор значений $Pl(A)$, $A \in 2^X$, и т. д.

Существуют две основные интерпретации БДН и, соответственно, два подхода к построению теории функций доверия. Согласно первой, восходящей к работе [1], $m(A)$ интерпретируется как вероятность случайного события, значением которого является множество A (так называемое случайное множество, англ. *random set* [17]). В статистическом смысле в этом случае БДН рассматривается как относительная частота того, что истинная альтернатива принадлежит множеству A: $m(A) = q(A)/N$, где $q(A)$ – количество наблюдаемых множеств $A \subseteq X$; N – общее количество наблюдений. В альтернативном подходе, развитом в работе [2], сначала вводятся функции доверия и правдоподобия как функции множеств, удовлетворяющие ослабленной аксиоматике вероятностной меры. Затем эти функции используются для оценивания степени неопределенности источников информации (свидетельства). Поэтому теория Демпстера – Шейфера также называется теорией свидетельств или теорией функций доверия.

В статье [18] показано, что

$$Bel(A) = \inf_{P \in \mathcal{P}_{Bel}} P(A),\ Pl(A) = \sup_{P \in \mathcal{P}_{Bel}} P(A),\ A \subseteq X,$$

где $\mathcal{P}_{Bel}$ – множество вероятностных мер $P \in \mathcal{P}(X)$, согласованных с функцией Bel, т. е. $Bel(A) \le P(A)$ $\forall A \subseteq X$. Обратное утверждение неверно, т. е. нижняя грань множества вероятностных мер может и не быть функцией доверия. Множество $\mathcal{P}_{Bel}$ еще называют кредальным множеством функции Bel.

Пример 1. Предположим, что 10 экспертов дают прогноз о перспективности развития трех технологий $X = \{a, b, c\}$: три эксперта высказались в пользу технологий a или b, два – в пользу технологии b, четыре – в пользу технологий b или c и один – в пользу технологии c. Тогда, если не предполагать известным распределение между альтернативами (неопределенность информации), то функции масс равны

$$m(\{a, b\}) = \frac{3}{10},\ m(\{b, c\}) = \frac{4}{10},$$
$$m(\{b\}) = \frac{2}{10},\ m(\{c\}) = \frac{1}{10}.$$

Таким образом, имеем тело свидетельств $F = (\mathcal{A}, m)$ с множеством фокальных элементов $\mathcal{A} = \{\{a, b\}, \{b, c\}, \{b\}, \{c\}\}$. По этому телу свидетельств можно найти значения функций $Bel(A)$ и $Pl(A)$ $\forall A \subseteq X$. В частности, получим, что $Bel(\{a\}) = 0$, $Pl(\{a\}) = 0{,}3$, $Bel(\{b\}) = 0{,}2$, $Pl(\{b\}) = 0{,}9$, $Bel(\{c\}) = 0{,}1$, $Pl(\{c\}) = 0{,}5$. Эти числа можно считать нижними и верхними оценками вероятности перспективности развития отдельных технологий: $0 \le P(\{a\}) \le 0{,}3$, $0{,}2 \le P(\{b\}) \le 0{,}9$, $0{,}1 \le P(\{c\}) \le 0{,}5$. Причем наибольшую неопределенность имеет прогноз технологии b. ♦

Телу свидетельств $F = (\mathcal{A}, m)$ можно поставить в соответствие так называемую пигнистическую вероятность (*pignistic probability*) $Bet_F \in \mathcal{P}(X)$ [19], значения которой на элементах $x_i \in X$, $i = 1, ..., n$, равны вероятности этих событий при условии, что в пределах фокальных элементов случайные величины распределены равномерно:

$$Bet_F(x_i) = \sum_{A \in \mathcal{A},\, x_i \in A} \frac{m(A)}{|A|},\ i = 1, ..., n.$$

Эти значения совпадают со значениями Шепли [20]

$$Bet_F(x_i) = \\ = \sum_{A \in \mathcal{A},\, x_i \in A} \frac{(n - |A|)!(|A| - 1)!}{n!} \big(Bel(A) - Bel(A \setminus \{x_i\})\big)$$

соответствующей функции доверия Bel. Пигнистическая вероятность произвольного множества $B \subseteq X$ будет равна $Bet_F(B) = \sum_A \frac{|A \cap B|}{|A|} m(A)$. Заметим, что $Bet_F \in \mathcal{P}_{Bel}$.

Теория функций доверия рассматривается не только на конечном множестве X, но и, например, на числовой оси (так называемые непрерывные структуры доверия) [21] или в случае нечетких фокальных элементов [22].

В приложениях рассматривают различные частные случаи функций доверия и соответствующих им тел свидетельств, которые отражают простые и наиболее популярные структуры высказываний о принадлежности истинной альтернативы некоторому множеству. В частности, функция доверия (и тело свидетельств) называется:

– категоричной (*categorical*), если она имеет только один фокальный элемент; соответствующее тело свидетельств является простейшим, и будем обозначать его так: $F_A = (A, 1)$;

– бессодержательной (*vacuous*), если единственным фокальным элементом этой функции является все множество X, $F_X = (X, 1)$; такое тело свидетельств не несет никакой информации о принадлежности истинной альтернативы какому-либо подмножеству из множества X (в этом случае $Bel(A) = 0$ и $Pl(A) = 1$ $\forall A \ne \varnothing, X$);

– консонантной (*consonant*), если ее фокальные элементы являются вложенными, т. е. $\forall A, B \in \mathcal{A}$: $A \subseteq B$ или $B \subseteq A$; соответствующее тело свидетельств является «уточняющим»;

– простой (*simple*), если БДН имеет не более двух фокальных элементов и в случае, если их два, то X – один из них; это тело свидетельств состоит из простейшего содержательного высказывания «$x \in A$» с некоторой степенью доверия $m(A)$ и бессодержательного высказывания со степенью доверия $1 - m(A)$;

– догматической (*dogmatic*), если $X \notin \mathcal{A}$ (т. е. тело свидетельств не содержит бессодержательного высказывания: $m(X) = 0$).

Любое тело свидетельства $F = (\mathcal{A}, m)$ можно представить в виде $F = \sum_{A \in \mathcal{A}} m(A) F_A$, т. е. как выпуклую комбинацию категоричных тел свидетельств. Например, тело свидетельств из примера 1 можно записать как $F = 0,2F_{\{b\}} + 0,1F_{\{c\}} + 0,3F_{\{a,b\}} + 0,4F_{\{b,c\}}$. Простое тело свидетельств можно представить в виде $F_A^\omega = (1-\omega)F_A + \omega F_X$, где $\omega \in [0,1]$. В частности, $F_A^0 = F_A$ и $F_A^1 = F_X$. И наоборот, выражение в виде конечной суммы $F = \sum_i \alpha_i F_{A_i}$, $\alpha_i \geq 0 \; \forall i$, $\sum_i \alpha_i = 1$, задает некоторое тело свидетельств.

Количество незнания в информации, содержащейся в теле свидетельств F, можно оценить с помощью так называемых индексов неточности [23], которые принимают тем бо́льшие значения, чем больше фокальных элементов большой мощности и с большей массой содержится в теле свидетельств. Примером такого индекса является обобщенная мера Хартли [24, 25] $H(F) = \sum_{A \in \mathcal{A}} m(A) \log_2 |A|$. Далее будем использовать нормированную обобщенную меру Хартли $H_0(F) = H(F) / \log_2 |X|$, $H_0 : \mathcal{F}(X) \to [0,1]$. Заметим, что $H_0(F) = 1 \Leftrightarrow F = F_X$ и $H_0(F) = 0 \Leftrightarrow F = P$, где $P \in \mathcal{P}(X)$.

Несмотря на свою популярность и востребованность, теория функций доверия подверглась многочисленной критике [26–28], в результате которой был инициирован ряд исследований, нацеленных на уточнение границ применения теории, интерпретации результатов и т. д. В частности, в статье [18] было показано, что многие критические замечания связаны со смешением двух точек зрения на функции доверия: первая рассматривает функцию доверия как обобщение вероятностной меры, а вторая – как способ представления свидетельства.

2. ПРАВИЛА КОМБИНИРОВАНИЯ ТЕЛ СВИДЕТЕЛЬСТВ И ПОНЯТИЕ КОНФЛИКТА

Одним из удобных инструментов в теории свидетельств является возможность комбинирования тел свидетельств, т. е. агрегирования информации, полученной из разных источников. Под правилом комбинирования понимают некоторую операцию $\otimes : \mathcal{F}(X) \times \mathcal{F}(X) \to \mathcal{F}(X)$. Существует несколько общих схем построения правил комбинирования. Наиболее популярной из них является так называемое обобщенное конъюнктивное правило комбинирования $\otimes_\cap$, которое строится по схеме [29]: $F = F_1 \otimes_\cap F_2$, $F = (\mathcal{A}, m_\cap)$, $F_1 = (\mathcal{A}_1, m_1)$ и $F_2 = (\mathcal{A}_2, m_2)$, где

$$m_\cap(A) = \sum_{B \cap C = A} \tilde{m}(B, C),$$

а значения функции множеств $\tilde{m} : 2^X \times 2^X \to [0, 1]$ удовлетворяют условиям согласования с телами свидетельств F_1 и F_2:

$$\begin{gathered} \sum_{C \in 2^X} \tilde{m}(B, C) = m_1(B), \\ \sum_{B \in 2^X} \tilde{m}(B, C) = m_2(C), \\ B, C \in 2^X. \end{gathered} \tag{1}$$

Последняя система может иметь множество решений – в результате получим множество новых тел свидетельств $F = F_1 \otimes_\cap F_2$, которое будем обозначать через $\mathcal{R}_\cap(F_1, F_2)$.

Пример 2. Пусть $X = \{x_1, x_2\}$ и $F_1 = 0,8F_{\{x_1\}} + 0,2F_X$, $F_2 = 0,7F_{\{x_1\}} + 0,3F_{\{x_2\}}$. Найдем множество $\mathcal{R}_\cap(F_1, F_2)$. Для этого решим систему

$$\sum_C \tilde{m}(\{x_1\}, C) = 0,8, \; \sum_C \tilde{m}(X, C) = 0,2,$$
$$\sum_B \tilde{m}(B, \{x_1\}) = 0,7, \; \sum_B \tilde{m}(B, \{x_2\}) = 0,3,$$
$$\tilde{m}(B, C) \in [0, 1] \;\; \forall B, C \in 2^X.$$

Так как $\tilde{m}(\cdot, \varnothing) = \tilde{m}(\varnothing, \cdot) = \tilde{m}(\cdot, X) = \tilde{m}(\{x_2\}, \cdot) = 0$, то имеем систему с четырьмя переменными из четырех уравнений и неравенств. Решением этой системы будут числа $\tilde{m}(\{x_1\}, \{x_1\}) = 0,5 + t$, $\tilde{m}(\{x_1\}, \{x_2\}) = 0,3 - t$, $\tilde{m}(X, \{x_1\}) = 0,2 - t$, $\tilde{m}(X, \{x_2\}) = t$, $t \in [0; 0,2]$. Тогда $\mathcal{R}_\cap(F_1, F_2) = \{F_1 \otimes_\cap F_2 = (0,3 - t)F_\varnothing + 0,7F_{\{x_1\}} + tF_{\{x_2\}} : t \in [0; 0,2]\}$. ♦

В частности, если источники информации независимы, то $\tilde{m}(B, C) = m_1(B) m_2(C)$ $\forall B, C \in 2^X$ и мы получим так называемое ненормализованное правило Демпстера $\otimes_{ND} : m_{ND}(A) = \sum_{B \cap C = A} m_1(B) \times m_2(C)$ $\forall A \in 2^X$. Но в этом случае возможно, что $K = K(F_1, F_2) = m_{ND}(\varnothing) = \sum_{B \cap C = \varnothing} m_1(B) m_2(C) > 0$.

Величина $K \in [0, 1]$ называется **канонической мерой конфликта** и характеризует степень конфликтности источников информации, описываемых телами свидетельств F_1 и F_2: чем больше значение этого параметра, тем более противоречивую информацию предоставляют источники. Если равномерно перераспределить величину конфликта по всем фокальным элементам нового тела свидетельств, то получим классическое правило Демпстера [1] $\otimes_D$: $m_D(A) = \frac{m_{ND}(A)}{1-K}$ $\forall A \in 2^X \setminus \varnothing$.

Если источники информации являются полностью конфликтными, т. е. $B \cap C = \varnothing$ для всех $B \in \mathcal{A}_1$, $C \in \mathcal{A}_2$, то правило комбинирования Демпстера неприменимо, поскольку в этом случае $K = 1$. Если же отнести величину конфликта к массе всего множества $m_{ND}(X)$ (т. е. увеличить массу бессодержательного высказывания $x \in X$ на величину конфликта), то мы получим правило Ягера [30] $\otimes_Y$: $m_Y(A) = m_{ND}(A)$ $\forall A \in 2^X \setminus \{\varnothing, X\}$, $m_Y(X) = = m_{ND}(X) + K$.

Операция комбинированная $\otimes_{ND}$ является ассоциативной и, следовательно, позволяет комбинировать любое конечное число тел свидетельств. Информацию о ряде других правил комбинирования можно найти в работе [31].

В некотором смысле двойственным к правилу Демпстера является дизъюнктивное правило консенсуса $\otimes_{\cup}$ [32, 33] (тело свидетельств, полученное с помощью такого правила, будем обозначать через $F = F_1 \otimes_{\cup} F_2 = (\mathcal{A}, m_{\cup})$):

$$m_{\cup}(A) = \sum_{B \cup C = A} m_1(B) m_2(C),\ A \in 2^X .$$

Для конъюнктивного и дизъюнктивного правил комбинирования справедлив аналог закона де Моргана [32]:

$$\overline{F_1 \otimes_{ND} F} = \overline{F}_1 \otimes_{\cup} \overline{F_2} ,$$

где дополнение $\overline{F} = \left(\overline{\mathcal{A}}, \overline{m}\right)$ тела свидетельств $F = (\mathcal{A}, m)$ определяется как $\overline{\mathcal{A}} = \left\{A^c : A \in \mathcal{A}\right\}$ и $\overline{m}(A) = m\left(A^c\right)$ $\forall A \in \overline{\mathcal{A}}$.

Пример 3. Предположим, что две независимые группы экспертов дают прогноз о перспективности развития трех технологий $X = \{a, b, c\}$. Информация первой группы описывается телом свидетельств $F_1 = 0,2F_{\{b\}} + 0,1F_{\{c\}} + 0,3F_{\{a,b\}} + 0,4F_{\{b,c\}}$ (см. пример 1). Информация второй группы описывается телом свидетельств $F_2 = 0,7F_{\{a,c\}} + 0,3F_{\{a,b,c\}}$. Тогда результаты комбинирования этих тел свидетельств с помощью различных конъюнктивных правил и дизъюнктивного правила консенсуса приведены в табл. 1 (указаны только массы фокальных элементов).

Каноническая мера конфликта для этих тел свидетельств равна $K = m_{DN}(\varnothing) = 0,14$. В последней строке табл. 1 приведены значения индекса неточности H_0 для каждого результата комбинирования. ♦

Замечание 1. Конъюнктивное правило является оптимистичным в следующем смысле. Пусть у нас есть два независимых источника информации. Причем первый источник утверждает, что истинная альтернатива принадлежит множеству A (это задается категоричным телом свидетельств F_A), а второй – множеству B (т. е. имеем категоричное тело свидетельств F_B).

Тогда после конъюнктивного комбинирования этих тел свидетельств получим, что истинная альтернатива принадлежит множеству $A \cap B$. Если же мы применим дизъюнктивное правило консенсуса, то получим, что истинная альтернатива принадлежит множеству $A \cup B$ (см. работу [34]). В этом смысле данное правило является пессимистичным.

Таблица 1

Результаты комбинирования тел свидетельств

A	F_1	F_2	$F_1 \otimes_{ND} F_2$	$F_1 \otimes_D F_2$	$F_1 \otimes_Y F_2$	$F_1 \otimes_{\cup} F_2$
$\varnothing$	–	–	0,14	–	–	–
$\{a\}$	–	–	0,21	0,244	0,21	–
$\{b\}$	0,2	–	0,06	0,07	0,06	–
$\{c\}$	0,1	–	0,38	0,442	0,38	–
$\{a, b\}$	0,3	–	0,09	0,104	0,09	–
$\{a, c\}$	–	0,7	–	–	–	0,07
$\{b, c\}$	0,4	–	0,12	0,14	0,12	–
$\{a, b, c\}$	–	0,3	–	–	0,14	0,93
H_0	0,442	0,742	0,132	0,154	0,272	0,974

Каждому правилу комбинирования и фиксированному телу свидетельств $F = (\mathcal{A}, m)$ можно поставить в соответствие матрицу (так называемую матрицу свидетельств) [35, 36] $R_F^{\otimes} = \{r_F^{\otimes}(A,\ B)\}_{A,B \in 2^X}$

с элементами $r_F^{\otimes}(A,B)=(F\otimes F_B)(A)$ (здесь F_B – категоричное тело свидетельств). В частности, популярны матричные представления для ненормализованного правила Демпстера $\otimes_{ND}$ и дизъюнктивного правила консенсуса $\otimes_{\cup}$ (обозначаются $R_F^{\cap}$ и $R_F^{\cup}$ соответственно), которые (в силу сделанного выше замечания) задают полностью информацию как о самом теле свидетельств F (поскольку $F\otimes_{ND}F_X=F$ и $F\otimes_{\cup}F_{\varnothing}=F$), так и о результатах его комбинирования с другими категоричными телами свидетельств. Эти результаты для разных категоричных тел свидетельств записаны в матрице $R_F^{\otimes}$ по столбцам. Матрицы $R_F^{\cap}$ и $R_F^{\cup}$ называются матрицами специализации и обобщения тела свидетельств F соответственно, поскольку эти матрицы содержат информацию обо всех телах свидетельств вида $F_B^{\cap}=(\mathcal{A}_B^{\cap},m)$ и $F_B^{\cup}=(\mathcal{A}_B^{\cup},m)$ соответственно, где $\mathcal{A}_B^{\cap}=\{A\cap B: A\in\mathcal{A}\}$, $\mathcal{A}_B^{\cup}=\{A\cup B: A\in\mathcal{A}\}$. Нетрудно видеть, что $R^{\cap}_{F_1\otimes_{ND}F_2}=R^{\cap}_{F_1}\cdot R^{\cap}_{F_2}$. В работе [35] (см. также доклад [37]) рассматривались матричные операторы, соответствующие некоторым параметрическим семействам конъюнктивных и дизъюнктивных правил – так называемые операторы α-слияния (α-*junctions*), которые при $\alpha=1$ вырождаются в операторы $R_F^{\cap}$ и $R_F^{\cup}$.

Пример 4. Для тел свидетельств $F_1=0{,}8F_{\{x_1\}}+{}$ $+0{,}2F_X$ и $F_2=0{,}7F_{\{x_1\}}+0{,}3F_{\{x_2\}}$ на множестве $X=\{x_1,\ x_2\}$ из примера 2 имеем (строки и столбцы соответствуют подмножествам $\varnothing$, $\{x_1\}$, $\{x_2\}$, X):

$$R^{\cap}_{F_1}=\begin{pmatrix}1&0&0{,}8&0\\0&1&0&0{,}8\\0&0&0{,}2&0\\0&0&0&0{,}2\end{pmatrix},\ R^{\cap}_{F_2}=\begin{pmatrix}1&0{,}3&0{,}7&0\\0&0{,}7&0&0{,}7\\0&0&0{,}3&0{,}3\\0&0&0&0\end{pmatrix},$$

$$R^{\cup}_{F_1}=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0{,}8&0{,}8&0&0\\0&0&0&0\\0{,}2&0{,}2&1&1\end{pmatrix},\ R^{\cup}_{F_2}=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0{,}7&0{,}7&0&0\\0{,}3&0&0{,}3&0\\0&0{,}3&0{,}7&1\end{pmatrix}.\ \blacklozenge$$

3. ПОНЯТИЕ КОНФЛИКТНЫХ И НЕКОНФЛИКТНЫХ ТЕЛ СВИДЕТЕЛЬСТВ

В общем случае под мерой внешнего конфликта понимают некоторый функционал $Con_{\text{ext}}:\mathcal{F}(X)\times\mathcal{F}(X)\to[0,1]$. Поскольку каждое тело свидетельств определяется множеством фокальных элементов и функцией массы на этих множествах, то и конфликт между телами свидетельств зависит от взаимного расположения между множествами фокальных элементов двух тел свидетельств и значений их функций масс.

Мера конфликта в первую очередь должна отражать экстремальные ситуации конфликтности – быть максимальной в случае полного конфликта двух тел свидетельств и минимальной в случае их неконфликтности.

Естественным условием полной конфликтности является непересечение всех пар фокальных элементов двух тел свидетельств. Точнее, тела свидетельств $F_1=(\mathcal{A}_1,m_1)$ и $F_2=(\mathcal{A}_2,m_2)$ называются полностью конфликтными, если $A\cap B=\varnothing$ $\forall A\in\mathcal{A}_1$, $\forall B\in\mathcal{A}_2$.

Однако возможны различные степени неконфликтности. Так, в работе [38] рассматриваются следующие степени неконфликтности тел свидетельств $F_1=(\mathcal{A}_1,\ m_1)$ и $F_2=(\mathcal{A}_2,\ m_2)$:

– сильная неконфликтность: $\bigcap_{A\in\mathcal{A}_1\cup\mathcal{A}_2}A\neq\varnothing$,

– (простая) неконфликтность: $A\cap B\neq\varnothing$ $\forall A\in\mathcal{A}_1$, $\forall B\in\mathcal{A}_2$,

– слабая неконфликтность: $\mathcal{P}_{Bel_1}\cap\mathcal{P}_{Bel_2}\neq\varnothing$, где Bel_i – функция доверия, соответствующая телу свидетельств F_i, $i=1,2$.

Известно [38], что из сильной неконфликтности следует (простая) неконфликтность, а из неконфликтности следует слабая неконфликность. Для категоричных тел свидетельств F_A и F_B все эти понятия неконфликтности сводятся к непустоте пересечения их фокальных элементов: $A\cap B\neq\varnothing$. Но, например, если $F_1=F_2=\alpha F_A+(1-\alpha)F_B$, где $A\cap B=\varnothing$ и $\alpha\in(0,1)$, то такие одинаковые тела свидетельств будут только слабо неконфликтными, но не будут (просто) неконфликтными, и тем более не будут сильно неконфликтными.

В соответствии с условиями полного конфликта и неконфликтности желательно чтобы мера внешнего конфликта Con_{ext} удовлетворяла условиям [4, 38, 39]:

E1: $Con_{ext}(F_1,F_2)=Con_{ext}(F_2,F_1)$ $\forall F_1,F_2\in$ $\in\mathcal{F}(X)$ (симметричность).

E2: $Con_{ext}(F_1,F_2)=0$, если F_1 и F_2 слабо неконфликтны.

В частности, любое тело свидетельств F будет слабо неконфликтным с самим собой и с бессодержательным телом свидетельств F_X. Поэтому при выполнении условия E2 будут верны утверждения (следствия):

а) $Con_{ext}(F,F)=0\quad \forall F\in\mathcal{F}(X)$ (нильпотентность);

б) $Con_{ext}(F_X,F)=0\quad \forall F\in\mathcal{F}(X)$ (с незнанием нет конфликта).

E3: $Con_{ext}(F_1,F_2)=1$, если $A\cap B=\varnothing\quad \forall A\in\mathcal{A}_1$, $\forall B\in\mathcal{A}_2$ (полный конфликт).

Следующее условие связано с понятием специализации свидетельств [32].

Тело свидетельств $F'=(\mathcal{A}',m')$ называется специализацией тела свидетельств $F''=(\mathcal{A}'',m'')$ (обозначают: $F'\sqsubseteq F''$), если существует разбиение множества $\mathcal{A}'=\mathcal{A}'_1\cup\ldots\cup\mathcal{A}'_k$, $\mathcal{A}'_i\cap\mathcal{A}'_j=\varnothing\quad \forall i\neq j$, $k=|\mathcal{A}''|$: $\bigcup_{A\in\mathcal{A}'_i}A\subseteq B_i$, $\sum_{A\in\mathcal{A}'_i}m'(A)=m''(B_i)$, $\forall B_i\in$ $\in\mathcal{A}''$, $i=1,\ldots,k$.

Другими словами, тело свидетельств F' уточняет (специализирует) тело свидетельств F''. Последнее в этом случае называют обобщением тела свидетельств F'. Заметим, что $F\sqsubseteq F_X$ $\forall F\in\mathcal{F}(X)$.

Если $F'\sqsubseteq F''$, то неточность специализации F' не больше неточности тела свидетельств F'' для любого индекса неточности (например, относительно обобщенной меры Хартли $H(F')\le H(F'')$).

E4: $Con_{ext}(F',F)\ge Con_{ext}(F'',F)\quad \forall F,F',F''\in$ $\in\mathcal{F}(X)$, $F'\sqsubseteq F''$ (антимонотонность по специализации).

Заметим, что каноническая мера конфликта K удовлетворяет всем перечисленным условиям, кроме E2 (в частности, не будет нильпотентной), но будет удовлетворять условию

E2′: $Con_{ext}(F_1,F_2)=0$, если F_1 и F_2 (просто) неконфликтны.

4. АКСИОМАТИКА МЕРЫ ВНЕШНЕГО КОНФЛИКТА

В статье [40] была рассмотрена аксиоматика меры конфликта, основанная на усилении приведенных выше условий E1 – E4:

A1: $Con_{ext}(F_1,F_2)=Con_{ext}(F_2,F_1)\quad \forall F_1,F_2\in$ $\in\mathcal{F}(X)$.

A2: $Con_{ext}(F_1,F_2)=0\Leftrightarrow F_1$ и F_2 слабо неконфликтны.

A3: $Con_{ext}(F_1,F_2)=1\Leftrightarrow A\cap B=\varnothing\quad \forall A\in\mathcal{A}_1$, $\forall B\in\mathcal{A}_2$.

A4: $Con_{ext}(F',F)\ge Con_{ext}(F'',F)\quad \forall F,F',F''\in$ $\in\mathcal{F}(X)$, $F'\sqsubseteq F''$.

Кроме того, рассматривалась аксиома

A5: если $Con_{ext}(F_1,F_2)=a\in[0,1]$, то $\exists F_i^{(k)}\in\mathcal{F}(X)$, $k=1,2$, $i=1,2$: $F_i=(1-a)F_i^{(1)}+$ $+aF_i^{(2)}$, $i=1,2$, $Con_{ext}(F_1^{(1)},F_2^{(1)})=0$, $Con_{ext}(F_1^{(2)},$ $F_2^{(2)})=1$. Эта аксиома предполагает, что источники информации можно линейно разделить на полностью конфликтные и слабо неконфликтные части в пропорции, равной величине конфликта относительно данной меры конфликта. Это довольно сильное требование. В частности, каноническая мера конфликта этой аксиоме не удовлетворяет. В этом нетрудно убедиться на конкретном примере.

Справедлива следующая теорема о мере конфликта.

Теорема 1 [40]. *Если функционал* Con_{ext}: $\mathcal{F}(X)\times\mathcal{F}(X)\to[0,1]$ *удовлетворяет аксиомам* A1 – A5, *то он имеет вид:*

$$Con_{ext}(F_1,F_2)= \\ =\inf\left\{m_\cap(\varnothing):F=(\mathcal{A},m_\cap)\in\mathcal{R}_\cap(F_1,F_2)\right\}. \qquad (2)$$

Пример 5. Для тел свидетельств $F_1=0{,}8F_{\{x_1\}}+0{,}2F_X$ и $F_2=0{,}7F_{\{x_1\}}+0{,}3F_{\{x_2\}}$ на множестве $X=\{x_1,x_2\}$, применяя обобщенное конъюнктивное правило комбинирования $\otimes_\cap$, получим (см. пример 2), что $m_\cap(\varnothing)=0{,}3-t$, $t\in[0;0{,}2]$. Поэтому $Con_{ext}(F_1,F_2)=\min\left\{0{,}3-t:t\in[0;0{,}2]\right\}=0{,}1$. Заметим, что каноническая мера конфликта для этих тел свидетельств $K=0{,}24$. ♦

Кроме того, в статье [40] было показано, что мера (2) может быть найдена по формуле

$$Con_{ext}(F_1,F_2)=\inf\left\{Con_{ext}(P_1,P_2):P_1\in\mathcal{P}_{Bel_1},P_2\in\mathcal{P}_{Bel_2}\right\},$$

где $\mathcal{P}_{Bel_i}$ – кредальные множества, соответствующие телам свидетельств F_i, $i=1,2$, а для вероятностных мер

$$Con_{ext}(P_1,P_2)=1-\sum_{i=1}^{n}\min\{P_1(x_i),P_2(x_i)\}. \qquad (3)$$

Пример 6. Для предыдущего примера имеем: $\mathcal{P}_{Bel_1}=\left\{\alpha F_{\{x_1\}}+(1-\alpha)F_{\{x_2\}}:0{,}8\le\alpha\le1\right\}$, $\mathcal{P}_{Bel_2}=\{F_2\}=\{0{,}7F_{\{x_1\}}+$ $+0{,}3F_{\{x_2\}}\}$. Тогда $Con_{ext}(F_1,F_2)=\inf\{Con_{ext}(P_1,P_2):P_1\in$ $\in\mathcal{P}_{Bel_1},P_2\in\mathcal{P}_{Bel_2}=\inf\limits_{0{,}8\le\alpha\le1}(1-\min\{\alpha;0{,}7\}-\min\{1-\alpha;0{,}3\}),$ $\inf\limits_{0{,}8\le\alpha\le1}\left(1-0{,}7-(1-\alpha)\right)=0{,}1$. ♦

Замечание 2. Для вероятностных мер $P_1, P_2 \in \in \mathcal{P}(X)$ каноническая мера конфликта K будет равна (ср. с формулой (3))

$$K(P_1,P_2) = \sum_{i=1}^{n} P_1(x_i) \sum_{j=1,\, j\neq i}^{n} P_2(x_j) =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} P_1(x_i)\big(1-P_2(x_i)\big) = 1 - \sum_{i=1}^{n} P_1(x_i) P_2(x_i).$$

В частности, отсюда видно, что каноническая мера конфликта не будет в общем случае нильпотентной, так как $K(P,\, P) = 1 - \sum_{i=1}^{n} P^2(x_i)$, $P \in \mathcal{P}(X)$. В частности, для равновероятного дискретного распределения P на X имеем $K(P,\, P) = 1 - \dfrac{1}{|X|}$.

В статье [4] рассматривалась аксиоматика меры внешнего конфликта Con_{ext} на произвольном конечном множестве тел свидетельств $M = \{F_1,..., F_l\}$, $F_i \in \mathcal{F}(X)$, $i = 1,..., l$. Пусть 2^M – множество всех подмножеств из множества M. По определению считаем, что $Con_{ext}(B) = 0$, если $|B| = 1$, $B \in 2^M$ и $Con_{ext}(\varnothing) = 0$. Кроме тех аксиом, которые являются непосредственным обобщением аксиом А1 – А4 на множественный случай, рассматривалась также аксиома монотонности

А6: $Con_{ext}(B) \le Con_{ext}(C)$, если $B \subseteq C$ и $B, C \in 2^M$.

Например, каноническая мера конфликта в силу ассоциативности может быть продолжена на произвольное конечное множество тел свидетельств M. И нетрудно показать, что на этом множестве каноническая мера конфликта будет удовлетворять аксиоме монотонности А6.

5. СПОСОБЫ ОЦЕНИВАНИЯ ВНЕШНЕГО КОНФЛИКТА

Существует несколько подходов к оцениванию конфликтности тел свидетельств. Условно их можно разделить на метрический, структурный, алгебраический, на основе правил комбинирования.

5.1. Метрические способы оценивания конфликта

Метрический подход является одним из наиболее популярных способов оценивания конфликта [41, 42]. Метрики могут вводиться как на самих телах свидетельств, так и на представляющих их функциях множеств или на матричных представлениях тел свидетельств. При этом специфика задания метрик на множестве тел свидетельств $\mathcal{F}(X)$ состоит в том, что учитываются в той или иной степени такие структурные особенности тел свидетельств, как мощность фокальных элементов, степени пересечения фокальных элементов двух тел свидетельств, взаимное расположение фокальных элементов и т. д. Для того чтобы метрику d можно было рассматривать в качестве меры конфликта, ее необходимо нормировать так, чтобы $d: \mathcal{F}(X) \times \mathcal{F}(X) \to [0, 1]$.

Метрика между телами свидетельств на основе обобщенного евклидова расстояния

$$d_Q(F_1,F_2) = \|\mathbf{m}_1 - \mathbf{m}_2\|_Q = \\ = \sqrt{\tfrac{1}{2}(\mathbf{m}_1 - \mathbf{m}_2)^{\mathrm{T}} Q(\mathbf{m}_1 - \mathbf{m}_2)}, \qquad (4)$$

где $\mathbf{m}_i$ – $2^{|X|}$-мерный вектор-столбец, координатами которого являются значения функции масс $m_i(A)$, $A \in 2^X$, $i = 1, 2$, для некоторого упорядочения всех подмножеств из 2^X; $Q = (q_{A,B})_{A,B\in 2^X}$ – матрица мер сходства между фокальными элементами: $q_{A,B} = q_{B,A} \in [0,1]$; $q_{A,A} = 1$, $A \in 2^X \setminus \varnothing$; $q_{A,B} = 0$, если $A \cap B = \varnothing$. Тогда $d_Q \in [0, 1]$. Например, одной из популярных метрик такого типа является метрика [41], в которой в качестве меры сходства выступает индекс Жаккарда (*Jaccard index*) [43]: $J = (jac_{A,B})_{A,B\in 2^X}$, $jac_{A,B} = \frac{|A\cap B|}{|A\cup B|}$, если $A, B \neq \varnothing$ и $d_{\varnothing,\varnothing} = 0$. Положительная определенность матрицы (и, соответственно, то, что d_J является метрикой на множестве $\mathcal{F}(X) \times \mathcal{F}(X)$) доказана в статье [44]. В частности, для категоричных тел свидетельств верно, что $d_J(F_A,\, F_B) = \sqrt{1 - \frac{|A\cap B|}{|A\cup B|}}$. Обобщение метрики (4) с мерой сходства Жаккарда на случай непрерывных структур доверия рассматривалось в работе [45].

Пример 7. Для тел свидетельств $F_1 = 0{,}8F_{\{x_1\}} + 0{,}2F_X$ и $F_2 = 0{,}7F_{\{x_1\}} + 0{,}3F_{\{x_2\}}$ на множестве $X = \{x_1,\, x_2\}$ из примера 2 имеем: $J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{m}_1 = (0{,}8;\, 0;\, 0{,}2)^{\mathrm{T}}$, $\mathbf{m}_2 = (0{,}7;\, 0{,}3;\, 0)^{\mathrm{T}}$ и $d_J(F_1,F_2) = \dfrac{1}{2\sqrt{5}} \approx 0{,}224$. ♦

В качестве других мер сходства в формуле (4) используются [46]: коэффициент Соренсена $sor_{A,B} = \frac{2|A\cap B|}{|A|+|B|}$, коэффициент Симпсона $sim_{A,B} = \frac{|A\cap B|}{\min\{|A|,|B|\}}$ и др. Но в этих случаях соответствующая матрица уже не всегда будет положительно определенной, а функция расстояния не будет (полной) метрикой. В статье [47] была предложена метрика вида (4) в случае, когда X – метрическое пространство, с мерой сходства $q_{A,B}=\dfrac{1}{1+c\cdot d_H(A,B)}$, где $d_H(A,B)$ – метрика Хаусдорфа между множествами A и B метрического пространства X, $c>0$. Но такая мера сходства не удовлетворяет условию $q_{A,B}=0$, если $A\cap B=\varnothing$[2]. Эта метрика в работе [47], в частности, использовалась в задаче агрегирования информации от разных датчиков в том случае, когда погрешность измерения датчиков и характеристики шума точно не известны.

Пример 8. Найдем расстояние между телами двух свидетельств о прогностической стоимости акций некоторой компании $F_1=0{,}5F_{[40,50]}+0{,}3F_{[45,55]}+0{,}2F_X$ и $F_2=0{,}3F_{[30,60]}+0{,}7F_{[40,50]}$ на множестве $X=[20,70]$ с помощью метрики (4), где $q_{A,B}=\dfrac{1}{1+0{,}2d_H(A,B)}$; d_H – метрика Хаусдорфа. Например, согласно телу свидетельств F_1 стоимость акций прогнозируется в промежутке [40, 50] у. е. со степенью доверия 0,5, в промежутке [45, 55] – со степенью доверия 0,3 в промежутке $X=[20,\ 70]$ – со степенью доверия 0,2. Будем рассматривать векторные представления этих тел свидетельств только на множествах $\mathcal{A}_1\cup\mathcal{A}_2=\{[40,\ 50],[45,\ 55],[30,\ 60],[20,\ 70]\}$ (с указанным упорядочиванием). Тогда $\mathbf{m}_1=(0{,}5;\ 0{,}3;\ 0;\ 0{,}2)^{\mathrm{T}}$, $\mathbf{m}_2=(0{,}7;\ 0;\ 0{,}3;\ 0)^{\mathrm{T}}$. Так как мера Хаусдорфа для отрезков равна $d_H([a_1,b_1],[a_2,b_2])=\max\{|a_1-a_2|,|b_1-b_2|\}$, то матрица $Q=\left(q_{[a_i,b_i],[a_j,b_j]}\right)_{i,j=1}^{4}$ будет представлять собой

$$Q=\begin{pmatrix}1 & 1/2 & 1/3 & 1/5\\ 1/2 & 1 & 1/4 & 1/6\\ 1/3 & 1/4 & 1 & 1/3\\ 1/5 & 1/6 & 1/3 & 1\end{pmatrix}$$

и $d_Q(F_1,F_2)=\sqrt{\tfrac{1}{2}(\mathbf{m}_1-\mathbf{m}_2)^{\mathrm{T}}Q(\mathbf{m}_1-\mathbf{m}_2)}\approx 0{,}282$. ♦

Другим примером метрики, вычисляемой непосредственно между телами свидетельств и учитывающей информационную неопределенность, является [11]

$$d(F_1,F_2)=\frac{1}{2|X|-1}\sum_{A\in 2^X}|A||m_1(A)-m_2(A)|.^3$$

Эта метрика использовалась в статье [11] в задаче аппроксимации сложных тел свидетельств более простыми по структуре фокальных множеств телами свидетельств.

Метрика между функциями, взаимно однозначно представляющими тела свидетельств. Среди функций расстояния (метрик, полуметрик, псевдометрик) между взаимно однозначно представляющими тела свидетельств функциями множеств можно выделить метрики Минковского l_p, $1\le p\le\infty$, между функциями доверия или функциями правдоподобия (так как $|Pl_1(A)-Pl_2(A)|=|Bel_1(A^c)-Bel_2(A^c)|\quad\forall A\in 2^X$, то эти метрики равны) (см. работы [11, 48])

$$d_p(F_1,F_2)=c\left(\sum_{A\in 2^X}|Pl_1(A)-Pl_2(A)|^p\right)^{\frac{1}{p}}=c\left(\sum_{A\in 2^X}|Bel_1(A)-Bel_2(A)|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

При $p=\infty$ вместо суммы вычисляется максимум по всем подмножествам $A\in 2^X$. Здесь (и далее) нормирующий множитель $c>0$ выбирается из условия $d\in[0,1]$. Такие метрики часто используют в задачах аппроксимации тел свидетельств.

Метрики между функциями, описывающими (но не представляющими взаимно однозначно) тела свидетельств. Например, метрика Минковского l_p, $1\le p\le\infty$, между пигнистическими вероятностями [49, 50]

$$d_{Bet,p}(F_1,F_2)=c\left(\sum_{A\in 2^X}\left|Bet_{F_1}(A)-Bet_{F_2}(A)\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

или между вероятностями элементов базового множества

$$d_{Bet,p,x}(F_1,F_2)=c\left(\sum_{x\in X}\left|Bet_{F_1}(x)-Bet_{F_2}(x)\right|^p\right)^{\frac{1}{p}},$$

или между так называемыми контурными функциями тел свидетельств [51]

$$d_{Pl,p,x}(F_1,F_2)=c\left(\sum_{x\in X}|Pl_1(x)-Pl_2(x)|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Но эти функции будут только псевдометриками на $\mathcal{F}(X)\times\mathcal{F}(X)$, т. е. вместо аксиомы равенства нулю $d(F_1,F_2)=0\Leftrightarrow F_1=F_2$ будет выполняться только аксиома рефлексивности $d(F,\ F)=0$.

В частности, псевдометрика $d_{Bet,1,x}$ использовалась в работе [14] в задаче обучения классификатора, в котором классы описывались функциями доверия.

[2] Положительная определенность такой матрицы сходства доказана в статье [47] только для частного случая.

[3] В статье [11] рассматривалась ненормированная метрика.

Нормированные полуметрики (т. е. выполняются все аксиомы метрики, кроме неравенства треугольника) **на основе скалярного произведения** векторных представлений тел свидетельств. Примером такой полуметрики служит функция, введенная в работе [42]

$$d(F_1, F_2) = 1 - \frac{\mathbf{Pl}_1^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{Pl}_2}{\|\mathbf{Pl}_1\|\|\mathbf{Pl}_2\|},$$

где $\mathbf{Pl}_i$ – $2^{|X|}$-мерный вектор-столбец, координатами которого являются значения функции правдоподобия $Pl_i(A)$; $A \in 2^X$; $i = 1, 2$; $\|\cdot\|$ – евклидова норма;

Пример 9. Для тел свидетельств $F_1 = 0{,}8F_{\{x_1\}} + 0{,}2F_X$ и $F_2 = 0{,}7F_{\{x_1\}} + 0{,}3F_{\{x_2\}}$ на множестве $X = \{x_1, x_2\}$ из примера 2 имеем: $\mathbf{Pl}_1 = (1;\, 0{,}2;\, 1)^{\mathrm{T}}$, $\mathbf{Pl}_2 = (0{,}7;\, 0{,}3;\, 0)^{\mathrm{T}}$ и $d(F_1, F_2) = 1 - \frac{\mathbf{Pl}_1^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{Pl}_2}{\|\mathbf{Pl}_1\|\|\mathbf{Pl}_2\|} \approx 0{,}301$. ♦

Метрики на основе сравнения интервалов неопределенности $\{[Bel_1(A), Pl_1(A)]\}_{A \in 2^X}$ и $\{[Bel_2(A), Pl_2(A)]\}_{A \in 2^X}$, которые могут быть взаимно однозначно поставлены в соответствие телам свидетельств F_1 и F_2. Тогда метрика на множестве тел свидетельств может быть задана как продолжение метрики на интервалах:

$$d_{I,p}(F_1, F_2) = c \times$$
$$\times \left(\sum_{A \in 2^X} d_I^p \left([Bel_1(A), Pl_1(A)], [Bel_2(A), Pl_2(A)] \right) \right)^{\frac{1}{p}}, \quad (5)$$
$$1 \le p \le \infty,$$

где d_I – метрика на интервалах. Например, в качестве d_I может быть использована метрика Хаусдорфа d_H (см. пример 8). В работе [12] исследовалась и применялась в задаче аппроксимации тел свидетельств метрика вида (5), где в качестве метрики d_I рассматривалась *p*-метрика Вассерштейна $d_{W,p}([a_1, b_1], [a_2, b_2])$ двух равномерных распределений на промежутках $[a_1, b_1]$ и $[a_2, b_2]$. В частности, нетрудно показать, что $d_{W,2}([a_1, b_1], [a_2, b_2]) = \sqrt{(mean_1 - mean_2)^2 + \frac{1}{3}(rad_1 - rad_2)^2}$, где $mean_i$ и rad_i – середина и полудлина соответственно отрезка $[a_i, b_i]$, $i = 1, 2$. В работе [12] показано, что для $p = 2$ нормирующий множитель $c = 2^{-\frac{|X|-1}{2}}$. Эта метрика оценивает расхождение между информационными неопределенностями тел свидетельств.

Пример 10. Для тел свидетельств $F_1 = 0{,}8F_{\{x_1\}} + 0{,}2F_X$ и $F_2 = 0{,}7F_{\{x_1\}} + 0{,}3F_{\{x_2\}}$ на множестве $X = \{x_1, x_2\}$ из примера 2 найдем значения метрик $d_{W,2}(F_1, F_2)$ и $d_{H,2}(F_1, F_2)$. Для $|X| = 2$ и $p = 2$ нормирующий множитель $c = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Вычисления метрик между промежутками неопределенности сведены в табл. 2.

Тогда $d_{W,2}(F_1, F_2) = \frac{1}{10}\sqrt{\frac{13}{3}} \approx 0{,}208$ и $d_{H,2}(F_1, F_2) = 0{,}3$. ♦

Метрика Вассерштейна. В статье [52] показано, что задав метрику d на множестве 2^X, ее можно продолжить до метрики на множестве $\mathcal{F}(X)$ как решение задачи Канторовича

$$d_W(F_1, F_2) = \min_{\tilde{m}} \sum_{A \in 2^X} \sum_{A \in 2^X} \tilde{m}(A, B) d(A, B),$$

где минимум берется по всем функциям множеств, удовлетворяющих условиям согласования (1). Полученную метрику можно рассматривать как 1-метрику Вассерштейна между телами свидетельств. Эта метрика хорошо интерпретируется как решение оптимизационной задачи Канторовича.

Пример 11. Для тел свидетельств $F_1 = 0{,}8F_{\{x_1\}} + 0{,}2F_X$ и $F_2 = 0{,}7F_{\{x_1\}} + 0{,}3F_{\{x_2\}}$ на множестве $X = \{x_1, x_2\}$ из примера 2 имеем: $\tilde{m}(\{x_1\}, \{x_1\}) = 0{,}5 + t$, $\tilde{m}(\{x_1\}, \{x_2\}) = 0{,}3 - t$, $\tilde{m}(X, \{x_1\}) = 0{,}2 - t$, $\tilde{m}(X, \{x_2\}) = t$, $t \in [0;\, 0{,}2]$ и $\tilde{m}(A, B) = 0$ для остальных пар $(A, B) \in 2^X \times 2^X$. Рассмотрим на множестве 2^X метрику $d(A, B) = d_J(F_A, F_B) = \sqrt{1 - \frac{|A \cap B|}{|A \cup B|}}$.

Таблица 2

Значения метрик $d_{W,2}$ и $d_{H,2}$ между промежутками $[Bel_i(A), Pl_i(A)]$, $i = 1, 2$

A	F_1				F_2				$d^2_{W,2}$	$d^2_{H,2}$
	Bel_1	Pl_1	$mean_1$	rad_1	Bel_2	Pl_2	$mean_2$	rad_2		
$\{x_1\}$	0,8	1	0,9	0,1	0,7	0,7	0,7	0	13/300	0,09
$\{x_2\}$	0	0,2	0,1	0,1	0,3	0,3	0,3	0	13/300	0,09
X	1	1	1	0	1	1	1	0	0	–

Тогда метрика Вассерштейна между телами свидетельств F_1 и F_2 будет равна

$$d_W(F_1, F_2) = \min_{0\le t\le 0,2}\left\{(0,3-t)\cdot 1+(0,2-t)\frac{1}{\sqrt{2}}+t\frac{1}{\sqrt{2}}\right\} =$$

$$= \min_{0\le t\le 0,2}\left\{\frac{3+\sqrt{2}}{10}-t\right\} = \frac{1+\sqrt{2}}{10} \approx 0,241. \blacklozenge$$

Метрики между матрицами специализаций (обобщения) тел свидетельств. В статье [53] были введены и исследованы метрики на множестве $\mathcal{F}(X)$ вида

$$d^{\cap}(F_1,F_2) = c_{\cap}\left\|R_{F_1}^{\cap} - R_{F_2}^{\cap}\right\|,$$

$$d^{\cup}(F_1,F_2) = c_{\cup}\left\|R_{F_1}^{\cup} - R_{F_2}^{\cup}\right\|,$$

где $R_{F_i}^{\cap}$ и $R_{F_i}^{\cup}$ – матрицы специализаций и обобщения тела свидетельств F_i соответственно (см. § 3); i = 1, 2; $\|\ \|$ – матричная норма. Нетрудно видеть, что $c_{\cap} = \left(\max_{A,B\in 2^X}\left\|R_{F_A}^{\cap} - R_{F_B}^{\cap}\right\|\right)^{-1}$, $c_{\cup} = \left(\max_{A,B\in 2^X}\left\|R_{F_A}^{\cup} - R_{F_B}^{\cup}\right\|\right)^{-1}$. В работе [54] были исследованы обобщения этих метрик для операторных представлений α-слияний, а также было показано, что $d^{\cap} = d^{\cup}$. Метрики на основе матриц специализаций представляются более робастными к небольшим изменениям тел свидетельств.

Пример 12. Для тел свидетельств $F_1 = 0,8\times$ $\times F_{\{x_1\}} + 0,2F_X$ и $F_2 = 0,7F_{\{x_1\}} + 0,3F_{\{x_2\}}$ на множестве $X = \{x_1, x_2\}$ матрицы специализации $R_{F_1}^{\cap}$, $R_{F_2}^{\cap}$ были найдены в примере 4. Тогда, например, для матричной нормы $\|A\|_1 = \max_j \sum_i |a_{ij}|$ имеем $c_{\cap} = \frac{1}{2}$ и

$$d_1^{\cap}(F_1,F_2) = \frac{1}{2}\left\|R_{F_1}^{\cap} - R_{F_2}^{\cap}\right\|_1 =$$

$$= \frac{1}{2}\left\|\begin{pmatrix} 0 & -0,3 & 0,1 & 0 \\ 0 & 0,3 & 0 & 0,1 \\ 0 & 0 & -0,1 & -0,3 \\ 0 & 0 & 0 & 0,2 \end{pmatrix}\right\|_1 = 0,3. \blacklozenge$$

В ряде работ отмечалось, что использование только одной метрики или функционала для характеризации внешнего конфликта недостаточно. В частности, каноническая мера конфликта будет принимать большие значения для пары одинаковых (т. е. слабо неконфликтных) тел свидетельств, «близких» к равновероятному распределению (см. замечание 2), для которых метрическая составляющая будет равна нулю. С другой стороны, конфликт между телами свидетельств зачастую не сводится к вычислению только метрической составляющей. Действительно, категоричные консонантные тела свидетельств F_A и F_B, где $A \subseteq B$, являются сильно неконфликтными (и $K(F_A, F_B) = 0$), однако метрика (4) с индексом Жаккарда для этих тел свидетельств, равная $d_J(F_A,F_B) = \sqrt{1-\frac{|A|}{|B|}}$, будет принимать большие значения, если $|A| \ll |B|$.

Поэтому в некоторых работах предлагалось использовать не одну, а совокупность меры конфликта и метрики на множестве тел свидетельств $\mathcal{F}(X)$. Так, в статье [50] была рассмотрена пара $\left(K(F_1, F_2), d_{Bet,\infty}(F_1, F_2)\right)$, где $d_{Bet,\infty}(F_1, F_2) =$ $= \max_{A\subseteq X}\left|Bet_{F_1}(A) - Bet_{F_2}(A)\right|$. Большие значения каждой составляющей этой пары гарантируют большой конфликт между телами свидетельств. В частности, большое значение метрики $d_{Bet,\infty}(F_1, F_2)$ означает, что тела свидетельств далеки от вероятностных распределений.

В общем случае каноническую меру конфликта можно представить в виде [55]

$$K(F_1, F_2) = E_Q(\mathbf{m}_1) + E_Q(\mathbf{m}_2) + \\ +\|\mathbf{m}_1 - \mathbf{m}_2\|_Q^2 - \sum_{B,C} r_{B,C} m_1(B) m_2(C), \tag{6}$$

где

$E_Q(\mathbf{m}_i) = \frac{1}{2} - \|\mathbf{m}_i\|_Q^2 = \frac{1}{2}\sum_B m_i(B)\left(1-\sum_C q_{B,C} m_i(C)\right);$

$i = 1, 2;\ r_{B,C} = \begin{cases} 0,\ B\cap C = \varnothing \vee B = C, \\ 1-q_{B,C}, \text{ иначе.} \end{cases}$

Последнее слагаемое в формуле (6) характеризует взаимодействие слабо пересекающихся фокальных элементов. Функционал $E_Q : \mathcal{F}(X) \to$ $\to [0, \frac{1}{2}]$ по своим свойствам близок к энтропийным функционалам и характеризует величину внутреннего конфликта тела свидетельств. В частности, для полностью конфликтных тел свидетельств $K(F_1, F_2) = E_I(\mathbf{m}_1) + E_I(\mathbf{m}_2) + \|\mathbf{m}_1 - \mathbf{m}_2\|_I^2$, где I – единичная матрица. Применение энтропий и дивергенций для оценивания неопределенности тел свидетельств рассматривалось в работе [56].

5.2. Структурные способы оценивания конфликта

В статье [39] рассматривался структурный подход к оцениванию конфликта, в котором учитывалась степень включения фокальных элементов одного тела свидетельств в фокальные элементы другого тела свидетельств. Для этого использовался индекс включения множеств $Inc(A, B) = \begin{cases} 1, A \subseteq B, \\ 0, A \nsubseteq B, \end{cases}$ $A, B \in 2^X$, с помощью которого вычислялась степень включения одного множества фокальных элементов в другое:

$$\delta(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2) = \max\{d(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2), d(\mathcal{A}_2, \mathcal{A}_1)\},$$

$$d(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2) = \frac{1}{|\mathcal{A}_1||\mathcal{A}_2|} \sum_{A_1 \in \mathcal{A}_1} \sum_{A_2 \in \mathcal{A}_2} Inc(A_1, A_2).$$

Тогда мера конфликта определялась по формуле

$$Con_{ext}(F_1, F_2) = (1 - \delta(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2)) d_J(F_1, F_2),$$

где d_J – расстояние (4) с индексом Жаккарда. Эта мера будет удовлетворять условиям E1, E2´, E3, а также следствиям а) и б).

Замечание 3. Индекс включения множеств $Inc(A, B)$ можно рассматривать как значение меры доверия η_A, соответствующей категоричному телу свидетельств F_A, на множестве B. Тогда произвольную функцию доверия Bel, соответствующую телу свидетельств $F = (\mathcal{A}, m)$, можно представить в виде $Bel = \sum_{A \in \mathcal{A}} m(A)\eta_A$.

5.3. Алгебраические способы оценивания конфликта

В докладе [57] был предложен алгебраический подход к построению меры конфликта на основе мер сходства множеств: $Q = (q_{A,B})$, $q_{A,B} = q_{A,B} \in [0, 1]$, $q_{A,A} = 1$, $A \in 2^X \setminus \varnothing$, $q_{A,B} = 0$, если $A \cap B = \varnothing$.

Назовем функционал $Con_Q : \mathcal{F}(X) \times \mathcal{F}(X) \to [0,1]$ билинейным, если $Con_Q(\alpha F_1 + \beta F_2, F) = \alpha Con_Q(F_1, F) + \beta Con_Q(F_2, F)$ для всех $\alpha, \beta \in [0, 1]$, $\alpha + \beta = 1$, $F, F_1, F_2 \in \mathcal{F}(X)$. Вместо условия E4 (антимонотонность по специализации) будем рассматривать его ослабленный вариант

E4´: если $F = (\mathcal{A}_0, m)$, $F' = (\mathcal{A} \cup \{A'\}, m')$, $F'' = (\mathcal{A} \cup \{A''\}, m'')$, $m'(A) = m''(A)$ $\forall A \in \mathcal{A}$, $m'(A') = m''(A'')$ и $q_{A',B} \le q_{A'',B}$ $\forall B \in \mathcal{A}_0$, то $Con_Q(F', F) \ge Con_Q(F'', F)$.

Теорема 2 [57]. *Функционал Con_Q будет билинейной мерой конфликта на множестве $\mathcal{F}(X) \times \mathcal{F}(X)$, удовлетворяющей условиям* E1, E3 *и* E4´, *тогда и только тогда, когда*

$$Con_Q(F_1, F_2) = \sum_{A \in \mathcal{A}_1, B \in \mathcal{A}_2} \gamma(A, B) m_1(A) m_2(B) = K(F_1, F_2) + \sum_{A \cap B \ne \varnothing} \gamma(A, B) m_1(A) m_2(B), \quad (7)$$

где коэффициенты $\gamma(A, B) = Con_Q(F_A, F_B) \in [0, 1]$ *удовлетворяют условиям:* $\gamma(A, B) = \gamma(B, A)$ *и* $\gamma(A', B) \ge \gamma(A'', B)$, *если* $q_{A',B} \le q_{A'',B}$; $\gamma(A, B) = 1$, *если* $A \cap B = \varnothing$.

Из формулы (7) следует, что каноническая мера конфликта $K(F_1, F_2)$ является наименьшей из всех билинейных мер конфликта: $Con_Q(F_1, F_2) \ge K(F_1, F_2)$.

Замечание 4. Коэффициенты $\gamma(A, B) = Con_Q(F_A, F_B) = \psi(q_{A,B})$, $A, B \ne \varnothing$, будут удовлетворять условиям а) – в) теоремы 2, если ψ — невозрастающая функция, $\psi(1) = 0$, $\psi(0) = 1$ и $q_{A,B} = |A \cap B| / \min\{|A|, |B|\}$. В частности, если $q_{A,B} = \begin{cases} 1, A \cap B \ne \varnothing, \\ 0, A \cap B = \varnothing, \end{cases}$ – примитивная мера пересечения, то $Con_Q(F_1, F_2) = K(F_1, F_2)$.

5.4. Оценивание конфликта с помощью правил комбинирования

Каноническая мера конфликта $K(F_1, F_2)$ двух тел свидетельств $F_1 = (\mathcal{A}_1, m_1)$ и $F_2 = (\mathcal{A}_2, m_2)$ численно равна массе пустого множества их комбинирования $F_1 \otimes_{ND} F_2 = (\mathcal{A}_1 \wedge \mathcal{A}_2, m_{ND})$, $\mathcal{A}_1 \wedge \mathcal{A}_2 = \{A \cap B : A \in \mathcal{A}_1, B \in \mathcal{A}_2\}$, с помощью ненормализованного правила Демпстера: $K(F_1, F_2) = m_{DN}(\varnothing) = \sum_{B \cap C = \varnothing} m_1(B) m_2(C)$.

Мера конфликта из теоремы 1 равна инфимуму масс пустых множеств по всем результатам комбинирования с помощью обобщенного конъюнктивного правила $\otimes_\cap$.

Эти примеры показывают, что мера конфликта должна быть согласована с правилами комбинирования тел свидетельств. В частности, этот вопрос обсуждался в работе [55].

Непосредственным обобщением правила комбинирования Демпстера является его весовой аналог: если $F_1 = (\mathcal{A}_1, m_1)$, $F_2 = (\mathcal{A}_2, m_2)$, то $F_Q = (\mathcal{A}, m_Q) = F_1 \otimes_Q F_2$, где $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \wedge \mathcal{A}_2$ и

$$m_Q(C) = \frac{1}{K_Q} \sum_{A \cap B = C} q_{A,B} m_1(A) m_2(B),$$

а $Q = (q_{A,B})$ – мера сходства множеств: $q_{A,B} = q_{A,B} \in [0,1]$, $q_{A,A} = 1$, $A \in 2^X \setminus \varnothing$, $q_{A,B} = 0$, если $A \cap B = \varnothing$. Коэффициент нормировки $K_Q = \sum_C \sum_{A \cap B = C} q_{A,B} m_1(A) m_2(B) = \sum_{A,B} q_{A,B} m_1(A) m_2(B)$.

Такое правило рассматривалось, например, в работе [58].

Тогда мерой конфликта, согласованной с правилом комбинирования $\otimes_Q$, будет мера $Con_Q(F_1, F_2) = 1 - K_Q$ вида (7), в которой $\gamma(A, B) = 1 - q_{A,B}$, $A, B \in \mathcal{A}$.

Мера конфликта (7) учитывает пары не только непересекающихся фокальных элементов, но и пары «слабопересекающихся» фокальных элементов, т. е. такие пары, для которых мощность пересечения мала по сравнению с мощностью каждого из этих множеств.

Пример 13. Для тел свидетельств $F_1 = 0,2F_{\{b\}} + +0,1F_{\{c\}} + 0,3F_{\{a,b\}} + 0,4F_{\{b,c\}}$ и $F_2 = 0,7F_{\{a,c\}} + 0,3F_{\{a,b,c\}}$ на множестве $X = \{a,b,c\}$ из примера 3 для $\gamma(A, B) = = 1 - jac_{A,B} = 1 - \frac{|A\cap B|}{|A\cup B|}$ имеем: $Con_J(F_1, F_2) = 59/120$, но $K(F_1, F_2) = 0,14$. Видно, что учет «слабопересекающихся» пар фокальных элементов значительно увеличил величину конфликта. ♦

Меру конфликта (7) удобно использовать и в том случае, когда фокальные элементы являются подмножествами числовой оси $\mathbb{R}$.

Пример 14. Для двух тел свидетельств о прогностической стоимости акций некоторой компании $F_1 = 0,5F_{[40,50]} + 0,3F_{[45,55]} + 0,2F_X$ и $F_2 = 0,3F_{[30,60]} + +0,7F_{[40,50]}$ на множестве $X = [20, 70]$ (см. пример 8) и $\gamma(A, B) = 1 - jac_{A,B} = 1 - \frac{|A\cap B|}{|A\cup B|}$, где $|A|$ – мера Лебега множества A на числовой оси $\mathbb{R}$. Тогда $Con_J(F_1, F_2) = 0,163$, но $K(F_1, F_2) = 0$. ♦

Также можно меру конфликта (7) применять в случае нечетких фокальных элементов.

Пример 15. Пусть в примере 14 $F_1 = 0,5F_{(35,40,50,55)} + 0,3F_{(40,45,55,60)} + 0,2F_X$ и $F_2 = = 0,3F_{(20,30,60,70)} + 0,7F_{(35,40,50,55)}$, $\tilde{A} = (a_1, a_2, a_3, a_4)$, $a_1 \le \le a_2 \le a_3 \le a_4$ – трапециевидное нечеткое число на множестве $X = [20, 70]$ с функцией принадлежности $\mu_{\tilde{A}}(x) = \max\left\{0, \min\left\{\frac{x - a_1}{a_2 - a_1}, 1, \frac{a_4 - x}{a_4 - a_3}\right\}\right\}$, если $a_1 < < a_2 \le a_3 < a_4$. Заметим, что в этом примере ядра всех нечетких фокальных элементов совпадают с соответствующими неразмытыми фокальными элементами из предыдущего примера: $\mathrm{Ker}\tilde{A} = \mathrm{Ker}(a_1, a_2, a_3, a_4) = = [a_2, a_3]$. Учитывая, что $\gamma(\tilde{A}, \tilde{B}) = 1 - \frac{|\tilde{A}\cap\tilde{B}|}{|\tilde{A}\cup\tilde{B}|} = = 1 - \int_X \min\{\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x)\}dx / \int_X \max\{\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x)\}dx$, получим: $Con_J(F_1, F_2) = 0,365$. ♦

6. РОБАСТНЫЕ ОЦЕНКИ ВНЕШНЕГО КОНФЛИКТА

Некоторые способы вычисления меры конфликта (в частности, каноническая мера конфликта) неустойчивы к «малым» изменениям тел свидетельств. При этом сами тела свидетельств могут формироваться субъективно и зависеть от особенностей источников информации. Например, если один эксперт дает «осторожный» прогноз о стоимости акций некоторой компании в промежутке (30, 40) у. е., а другой эксперт делает «оптимистичный» прогноз – (38, 45) у. е., то можно считать, что у нас есть два категоричных тела свидетельства: F_A и F_B, где $A = (30, 40)$ и $B = (38, 43)$. В этом случае каноническая мера конфликта $K(F_A, F_B) = 0$. На самом деле «осторожный» эксперт при уточнении своего прогноза имел в виду тело свидетельств $F_1 = 0,8F_{(30,38)} + 0,2F_{[38,40)}$, а «оптимистичный» эксперт тоже мог бы уточнить свой прогноз как тело свидетельств $F_2 = 0,2F_{(35,38)} + +0,7F_{[38,42)} + 0,1F_{[42,44)}$. В этом случае получили бы $K(F_1, F_2) = 0,7$.

Одним из подходов к повышению робастности оценивания конфликта является использование процедур специализации-обобщения. Процедура специализации представляет собой разбиение фокальных элементов на более «мелкие» множества с одновременным распределением функции масс по этим множествам. Без ограничения общности можно считать, что для тела свидетельств $F_1 = (\{A_i\}, m_1)$ его специализацией будет тело свидетельств $F_2 = (\{B_{ij}\}, m_2) = S(F_1)$ (обозначение: $F_2 \sqsubseteq F_1$), где $\cup_j B_{ij} = A_i$ и $\sum_j m_2(B_{ij}) = m_1(A_i)$ $\forall i$. А обобщением тела свидетельств $F_1 = (\{A_i\}, m_1)$ будет тело свидетельств $F_3 = (\{C_{ij}\}, m_3) = G(F_1)$ $(F_1 \sqsubseteq F_3)$: $\cap_j C_{ij} = A_i$ и $\sum_j m_3(C_{ij}) = m_1(A_i)$ $\forall i$.

Будем рассматривать только те специализации-обобщения тела свидетельств $F = (\mathcal{A}, m)$, которые достаточно близки к телу свидетельств F. Степень близости будем измерять с помощью индекса неточности $f : \mathcal{F}(X) \to [0, 1]$ [23], примером которого является нормированная обобщенная мера Хартли: $H_0(F) = \frac{1}{\ln|X|}\sum_{A\in\mathcal{A}} m(A)\ln|A|$. При специализации индекс неточности не увеличивается: $f(F_2) \le f(F_1)$, если $F_2 \sqsubseteq F_1$. Аналогично, при обобщении индекс неточности не уменьшается.

Пусть $S_\varepsilon(F) = \{F' \sqsubseteq F : f(F) - f(F') < \varepsilon\}$, $G_\varepsilon(F) = \{F \sqsubseteq F' : f(F') - f(F) < \varepsilon\}$ – множества всех специализаций и обобщений тела свидетельств F соответственно, которые находятся в ε-окрестности тела свидетельств F относительно индекса неточности f, $SG_\varepsilon(F)=S_\varepsilon(F)\cup G_\varepsilon(F)$. Тогда в качестве меры конфликта можно использовать величину $K_\varepsilon(F_1,F_2)=\underset{\tilde F_i\in SG_\varepsilon(F_i),i=1,2}{\mathrm{MEAN}}\left(K(\tilde F_1,\tilde F_2)\right)$, где MEAN – некоторый оператор усреднения. Например, пусть $SG_\varepsilon(F_1)=\{F_{1,j}\}$, $SG_\varepsilon(F_2)=\{F_{2,k}\}$, где $F_{i,s}=F_{i,s}(\boldsymbol\theta)$, $i=1,2$, $\boldsymbol\theta\in[0,1]^N$ – вектор параметров (значений функции масс). Тогда $K(F_{1,j},F_{2,k})=\varphi_{j,k}(\boldsymbol\theta)$, причем $\boldsymbol\theta\in D_{j,k}=\{\boldsymbol\theta:\left|f(F_{1,j}(\boldsymbol\theta))-f(F_1)\right|<\varepsilon,\ \left|f(F_{2,k}(\boldsymbol\theta))-f(F_2)\right|<\varepsilon\}$. В качестве оператора MEAN можно использовать усреднение средних интегральных значений

$$K_\varepsilon(F_1,F_2)=\frac{1}{\left|\{F_{1,j}\}\right|\cdot\left|\{F_{2,k}\}\right|}\sum_{j,k}I_{j,k},$$

где $I_{j,k}=\frac{1}{V(D_{j,k})}\int_{D_{j,k}}\varphi_{j,k}(\boldsymbol\theta)d\boldsymbol\theta$; V – мера Лебега на пространстве параметров. Возможны и другие способы формирования множества $SG_\varepsilon(F)$ специализаций-обобщений тела свидетельств F.

Пример 16 [4]. Пусть $X=\{x_1,x_2,x_3\}$, $F_1=F_{\{x_1,x_2\}}$, $F_2=F_{\{x_3\}}$. Тогда $K_0(F_1,F_2)=1$. Рассмотрим теперь специализации-обобщения тел свидетельств F_1 и F_2. Для оценки неточности будем использовать нормированную обобщенную меру Хартли H_0. Пусть $c=\frac{\ln 2}{\ln 3}$. Тогда $H_0(F_1)=c$, $H_0(F_2)=0$. Для специализаций имеем $S(F_1)=\{F_{1,0},F_{1,1}\}$, где $F_{1,0}=F_1$, $F_{1,1}=\theta F_{\{x_1\}}+(1-\theta)F_{\{x_2\}}$, $H_0(F_{1,1})=0$, $S(F_2)=\{F_{2,0}\}$, $F_{2,0}=F_2$. Обобщениями тел свидетельств F_1 и F_2 будут множества

$$G(F_1)=\{F_{1,0},F_{1,2}\},$$
$$G(F_2)=\{F_{2,0},F_{2,1},\ldots,F_{2,4}\},$$

где $F_{1,2}=\theta F_{\{x_1,x_2\}}+(1-\theta)F_{\{x_1,x_2,x_3\}}$ и $H_0(F_{1,2})=c\theta+1-\theta$;

$$F_{2,1}=\theta F_{\{x_1,x_3\}}+(1-\theta)F_{\{x_3\}}\ \text{и}\ H_0(F_{2,1})=c\theta,$$
$$F_{2,2}=\theta F_{\{x_2,x_3\}}+(1-\theta)F_{\{x_3\}}\ \text{и}\ H_0(F_{2,2})=c\theta,$$
$$F_{2,3}=\theta F_{\{x_1,x_3\}}+(1-\theta)F_{\{x_2,x_3\}}\ \text{и}\ H_0(F_{2,3})=c,$$
$$F_{2,4}=\theta F_{\{x_1,x_2,x_3\}}+(1-\theta)F_{\{x_3\}}\ \text{и}\ H_0(F_{2,4})=\theta.$$

Тогда $SG(F_1)=\{F_{1,0},F_{1,1},F_{1,2}\}$, $SG(F_2)==\{F_{2,0},F_{2,1},\ldots,F_{2,4}\}$.

Пусть $\varepsilon<1-c$. Тогда $SG_\varepsilon(F_1)=\{F_{1,0},F_{1,2}\}$ и $SG_\varepsilon(F_2)=\{F_{2,0},F_{2,1},F_{2,2},F_{2,4}\}$. Теперь имеем $K(F_{1,0},F_{2,0})=1$, $K(F_{1,0},F_{2,1})=K(F_{1,0},F_{2,2})=1-\theta$ при $0<c\theta<\varepsilon$,, $K(F_{1,0},F_{2,4})=1-\theta$ при $0<\theta<\varepsilon$, $K(F_{1,2},F_{2,0})=\theta$ при $0<(1-\theta)(1-c)<\varepsilon$, $K(F_{1,2},F_{2,1})==K(F_{1,2},F_{2,2})=\theta_1(1-\theta_2)$ при $0<(1-\theta_1)(1-c)<\varepsilon$ и $0<c\theta_2<\varepsilon$, $K(F_{1,2},F_{2,4})=\theta_1(1-\theta_2)$ при $0<(1-\theta_1)\times\times(1-c)<\varepsilon$ и $0<\theta_2<\varepsilon$.

Теперь $K_\varepsilon(F_1,F_2)=\frac{1}{2\cdot 4}\sum_{j,k}I_{j,k}$, где $I_{j,k}=\frac{1}{V(D_{j,k})}\times\times\int_{D_{j,k}}\varphi_{j,k}(\boldsymbol\theta)d\boldsymbol\theta$, т. е. $I_{0,0}=1$, $I_{0,1}=I_{0,2}=\frac{c}{\varepsilon}\int_0^{\frac{\varepsilon}{c}}(1-\theta)d\theta==1-\frac{1}{2c}\varepsilon$, $I_{0,4}=\frac{1}{\varepsilon}\int_0^{\varepsilon}(1-\theta)d\theta=1-\frac{1}{2}\varepsilon$, $I_{2,0}=\frac{1-c}{\varepsilon}\int_{1-\frac{\varepsilon}{1-c}}^{1}\theta d\theta==1-\frac{1}{2(1-c)}\varepsilon$, $I_{2,1}=I_{2,2}=\frac{1-c}{\varepsilon}\cdot\frac{c}{\varepsilon}\int_{1-\frac{\varepsilon}{1-c}}^{1}\int_0^{\frac{\varepsilon}{c}}\theta_1(1-\theta_2)d\theta_1d\theta_2==\left(1-\frac{1}{2(1-c)}\varepsilon\right)\left(1-\frac{1}{2c}\varepsilon\right)$, $I_{2,4}=\frac{1-c}{\varepsilon}\cdot\frac{1}{\varepsilon}\int_{1-\frac{\varepsilon}{1-c}}^{1}\int_0^{\varepsilon}\theta_1(1-\theta_2)d\theta_1d\theta_2==\left(1-\frac{1}{2(1-c)}\varepsilon\right)\left(1-\frac{1}{2}\varepsilon\right)$.

Таким образом, $K_\varepsilon(F_1,F_2)=1-\varepsilon\frac{(2-c)(c+1)}{8c(1-c)}+\varepsilon^2\frac{(2+c)}{4c(1-c)}$ при $\varepsilon<1-c$. ♦

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе дан аналитический обзор современного состояния исследований по анализу противоречивости (конфликтности) информации, полученной из нескольких источников в рамках теории функций доверия. В частности, можно выделить следующие моменты текущего состояния исследований по анализу противоречивости информации:

- в настоящее время в научном сообществе сформировались определенные требования к мере внешнего конфликта, важнейшими из которых являются:
  – мера конфликта должна отражать различные степени градации конфликтности тел свидетельств: от полной неконфликтности до той или иной степени конфликтности (слабая, простая, сильная);
  – мера конфликта должна быть антимонотонной по специализации;
- эти требования положены в основу аксиоматики меры внешнего конфликта; найден общий вид меры внешнего конфликта, удовлетворяющий некоторой системе аксиом;
- существует несколько способов оценивания внешнего конфликта, среди которых условно можно выделить метрический, структурный, алгебраический, на основе правил комбинирования;
- вместе с мерой конфликта в теории функций доверия рассматривается и понятие расстояния между телами свидетельств, но мера конфликта не сводится к вычислению расстояния;
- робастное вычисление меры конфликта достигается с помощью процедуры обобщения-специализации.

Вместе с тем, в исследовании анализа противоречивости информации в рамках теории функций доверия остается и ряд открытых проблем. Среди них можно выделить:

- построение мер внешнего конфликта, полнее отражающих различные степени конфликтности тел свидетельств и их структурные особенности;
- исследование согласованности правил комбинирования и мер конфликта в задаче принятия решения о выборе тел свидетельств для комбинирования;
- исследование взаимосвязи логической цепочки понятий «противоречивость» – «согласованность» – «взаимовлияние» источников информации;
- нахождение общего вида меры конфликта для других систем аксиом;
- исследование мер конфликта для тел свидетельств, определенных на пространстве с мерой.

И конечно, актуальными являются прикладные задачи, связанные с анализом конфликтности источников информации, управления конфликтом и т. д.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Dempster, A.P*. Upper and Lower Probabilities Induced by a Multivalued Mapping // Annals of Mathematical Statistics. – 1967. – Vol. 38. – P. 325–339.
2. *Shafer, G*. A Mathematical Theory of Evidence. – Princeton, N.J.: Princeton University Press, 1976.
3. *Lefevre, E., Colot, O., Vannoorenberghe, P*. Belief Function Combination and Conflict Management // Inf. Fusion. – 2002. – Vol. 3, no. 2. – P. 149–162.
4. *Bronevich, A., Lepskiy, A., Penikas, H*. The Application of Conflict Measure to Estimating Incoherence of Analyst's Forecasts about the Cost of Shares of Russian Companies // Procedia Computer Science. – 2015. – Vol. 55. – P. 1113–1122.
5. *Kutynina, E., Lepskiy, A*. Aggregation of Forecasts and Recommendations of Financial Analysts in the Framework of Evidence Theory // In: Kacprzyk, J., Szmidt, E., Zadrożny, S., Atanassov, K., Krawczak, M. (eds). Advances in Intelligent Systems and Computing. – Vol. 642. – Springer, Cham, 2018. – P. 370–381.
6. *Bronevich, A.G., Spiridenkova, N.S*. Measuring Uncertainty for Interval Belief Structures and Its Application for Analyzing Weather Forecasts // In: Kacprzyk, J., Szmidt, E., Zadroźny, S., Atanassov, K., Krawczak, M. (Eds.) Advances in Fuzzy Logic and Technology 2017, Advances in Intelligent Systems and Computing. – Vol. 641. – Springer, Cham, 2018. – P. 273–285.
7. *Lepskiy, A., Smolev, V*. Application of Non-additive Measures and Integrals for Analysis of the Importance of Party Positions for Voting // In: Atlantis Studies in Uncertainty Modelling: Conference of the International Fuzzy Systems Association and the European Society for Fuzzy Logic and Technology (EUSFLAT 2019). – Atlantis Press, 2019. – Vol. 1. – P. 321–327.
8. *Lepskiy, A., Suevalov, A*. Application of the Belief Function Theory to the Development of Trading Strategies // Procedia Computer Science. – 2019. – Vol. 162. – P. 235–242.
9. *Rominger, C., Martin, A*. Using the Conflict: An Application to Sonar Image Registration // In: Workshop on the Theory of Belief Functions. – Brest, France, 2010. – P. 1–6.
10. *Harmanec, D*. Faithful Approximations of Belief Functions // In: Laskey, K.B., Prade, H. (Eds.), Uncertainty in Artificial Intelligence 15 (UAI99). – Stockholm, Sweden, 1999.
11. *Denœux, T*. Inner and Outer Approximation of Belief Structures Using a Hierarchical Clustering Approach // International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems. – 2001. – Vol. 9. – P. 437–460.
12. *Han, D., Dezert, J., Yang, Y*. Belief Interval-Based Distance Measures in the Theory of Belief Functions // IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics: Systems, IEEE. – 2016. – Vol. 48, no. 6. – P. 833–850.
13. *Bronevich, A., Lepskiy, A*. Measures of Conflict, Basic Axioms and Their Application to the Clusterization of a Body of Evidence // Fuzzy Sets and Systems. – 2021. – https://doi.org/10.1016/j.fss.2021.04.016)
14. *Denœux, T*. A Neural Network Classifier Based on Dempster–Shafer Theory // IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics. – 2000. – Vol. 30. – P. 131–150.
15. *Ye, Q., Wu, X., Chen, Z*. An Approach for Evidence Clustering Using Generalized Distance// Journal of Electronics. – 2009. – Vol. 26. – P. 18–23.
16. *Smets, P., Kennes, R*. The Transferable Belief Model // Artificial Intelligence. – 1994. – Vol. 66. – P. 191–234.
17. *Nguyen, H.T*. On Random Sets and Belief Functions // J. Math. Anal. Appl. – 1978. – Vol. 65. – P. 531–542.
18. *Halpern, J.Y, Fagin, R*. Two Views of Belief: Belief as Generalized Probability and Belief as Evidence // Artificial Intelligence. – 1992. – Vol. 54, no. 3. – P. 275–317.
19. *Smets, P*. Decision Making in TBM: The Necessity of the Pignistic Transformation // International Journal of Approximate Reasoning. – 2005. – Vol. 38. – P. 133–147.
20. *Shapley, L*. A Value for N-person Games // Contributions to the Theory of Games. II (28) in Annals of Mathematics Studies, Princeton University Press, 1953. – P. 307–317.
21. *Smets, P*. Belief Functions on Real Numbers // International Journal of Approximate Reasoning. – 2005. – Vol. 40, no. 3. – P. 181–223.
22. *Yen, J*. Generalizing the Dempster-Shafer Theory to Fuzzy Sets // IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics. – 1990. – Vol. 20, no. 3. – P. 559–570.
23. *Bronevich, A., Lepskiy, A*. Imprecision Indices: Axiomatic, Properties and Applications // Int. J. of General Systems. – 2015. – Vol. 44, no. 7-8. – P. 812–832.
24. *Higashi, M., Klir, G.J*. Measures of Uncertainty and Information Based on Possibility Distributions // Int. J. General Systems. – 1983. – No. 9. – P. 43–58.
25. *Dubois, D., Prade, H*. A Note on Measures of Specificity for Fuzzy Sets // Int. J. of General Systems. – 1985. – No. 10. – P. 279–283.
26. *Diaconis, P., Zabell, S.L*. Updating Subjective Probability // Journal of the American Statistical Society. – 1982. – Vol. 77, no. 380. – P. 822–830.
27. *Hunter, D*. Dempster-Shafer vs. Probabilistic Logic // In PTOC. Third AAAI Uncertainty in Artificial Intelligence Workshop, 1987. – P. 22–29.
28. *Pearl, J*. Reasoning with Belief Functions: An Analysis of Compatibility // International Journal of Approximate Reasoning. – 1990. – Vol. 4, no. 5. – P. 363–389.

29. *Cattaneo, M.* Combining Belief Functions Issued from Dependent Sources // In: Proc. Third International Symposium on Imprecise Probabilities and Their Application (ISIPTA'03). – Lugano, Switzerland, 2003. – P. 133–147.
30. *Yager, R.R.* On the Dempster-Shafer Framework and New Combination Rules // Information Sciences. – 1987. – Vol. 41. – P. 93–138.
31. *Sentz, K., Ferson, S.* Combination of Evidence in Dempster-Shafer Theory // In: Report SAND 2002-0835, Sandia National Laboratories, 2002.
32. *Dubois, D., Prade, H.* A Set-Theoretic View on Belief Functions: Logical Operations and Approximations by Fuzzy Sets // Int. J. of General Systems. – 1986. – No. 12. – P. 193–226.
33. Dubois, D. and Prade, H., On the Combination of Evidence in Various Mathematical Frameworks, in *Reliability Data Collection and Analysis*. *Eurocourses (Reliability and Risk Analysis)*, Flamm, J., Luisi, T., vol. 3, Dordrecht: Springer, 1992, pp. 213–241.
34. *Lepskiy, A.* General Schemes of Combining Rules and the Quality Characteristics of Combining // F. Cuzzolin (Ed.): BELIEF 2014, LNAI 8764. – Springer-Verlag, 2014. – P. 29–38.
35. *Smets, P.* The Alpha-Junctions: Combination Operators Applicable to Belief Functions // In First Int. Joint Conference on Qualitative and Quantitative Practical Reasoning (ECSQUARU-FAPR'97), 1997. – Lecture Notes in Computer Sciences, Vol. 1244. – Bad Honef, Germany: Springer International Publishing, 1997. – P. 131–153.
36. *Smets, P.* The Application of the Matrix Calculus to Belief Functions // International Journal of Approximate Reasoning. – 2002. – Vol. 31, no. 1-2. – P.1–30.
37. *Pichon, F., Denœux, T.* Interpretation and Computation of *A*-junctions for Combining Belief Functions // In 6th Int. Symposium on Imprecise Probability: Theories and Applications (ISIPTA '09). – Durham, U.K., 2009.
38. *Destercke, S., Burger, T.* Toward an Axiomatic Definition of Conflict between Belief Functions // IEEE Transactions on Cybernetics. – 2013. – Vol. 43, no. 2. – P. 585–596.
39. *Martin, A.* About Conflict in the Theory of Belief Functions // Belief Functions: Theory and Applications, Advances in Intelligent and Soft Computing. – 2012. – Vol. 164. – P. 161–168.
40. *Bronevich, A., Rozenberg, I.* The Contradiction Between Belief Functions: Its Description, Measurement, and Correction Based on Generalized Credal Sets // International Journal of Approximate Reasoning. – 2019. – Vol. 112. – P. 119–139.
41. *Jousselme, A.-L., Grenier, D., Bossé, E.* A New Distance between Two Bodies of Evidence // Information Fusion. – 2001. – No. 2. – P. 91–101.
42. *Jousselme, A.-L., Maupin, P.* Distances in Evidence Theory: Comprehensive Survey and Generalizations // International Journal of Approximate Reasoning. – 2012. – Vol. 53. – P. 118–145.
43. *Deza, M.M., Deza, E.* Encyclopedia of Distances // Springer, Berlin Heidelberg, 2009.
44. *Bouchard, M., Jousselme, A.-L., Doré, P.-E.* A Proof for the Positive Definiteness of the Jaccard Index Matrix // International Journal of Approximate Reasoning. – 2013. – Vol. 54. – P. 615–626.
45. *Attiaoui, D., Doré, P.-E., Martin, A., Ben Yaghlane, B.* A Distance between Continuous Belief Functions // In Proc. of the Scalable Uncertainty Management (SUM) Conference, LNAI, Vol. 7520. – Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2012. – P. 194–205,
46. *Diaz, J., Rifqi, M., Bouchon-Meunier, B.* A Similarity Measure between Basic Belief Assignments // In: Proceedings of the 9th International Conference Information Fusion. – Firenze, Italy, 2006.
47. *Sunberg, Z., Rogers, J.* A Belief Function Distance Metric for Orderable Sets // Information Fusion. – 2013. – Vol. 14. – P. 361–373.
48. *Cuzzolin, F.* Consistent Approximations of Belief Functions // In: 6th International Symposium on Imprecise Probability: Theories and Applications. – Durham, United Kingdom, 2009.
49. *Tessem, B.* Approximations for Efficient Computation in the Theory of Evidence // Artificial Intelligence. – 1993. – Vol. 61. – P. 315–329.
50. *Liu, W.* Analysing the Degree of Conflict among Belief Functions // Artificial Intelligence. – 2006. – Vol. 170. – P. 909–924.
51. *Mercier, D., Quost, B., Denœux, T.* Refined Modeling of Sensor Reliability in the Belief Function Framework Using Contextual Discounting // Information Fusion. – 2008. – No. 9. – P. 246–258.
52. *Bronevich, A., Rozenberg, I.* The Measurement of Relations on Belief Functions Based on the Kantorovich Problem and the Wasserstein Metric // International Journal of Approximate Reasoning. – 2021. – Vol. 131. – P. 108–135.
53. *Loudahi, M., Klein, J., Vannobel, J-M., Colot, O.* New Distances between Bodies of Evidence Based on Dempsterian Specialization Matrices and Their Consistency with the Conjunctive Combination Rule // International Journal of Approximate Reasoning. – 2014. – Vol. 55, no. 5. – P. 1093–1112.
54. *Loudahi, M., Klein, J., Vannobel, J-M., Colot, O.* Evidential Matrix Metrics as Distances between Meta-data Dependent Bodies of Evidence // IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics. – 2016. – Vol. 46, no. 1. – P. 109–122.
55. *Lepskiy, A.* On the Conflict Measures Agreed with the Combining Rules // In: Destercke ,S., Denoeux, T., Cuzzolin, F., Martin, A. (eds) Belief Functions: Theory and Applications. BELIEF 2018. Lecture Notes in Computer Science. – Vol. 11069. – Springer, Cham, 2018 – P. 172–180.
56. *Bronevich, A.G., Rozenberg, I.N.* Metrical Approach to Measuring Uncertainty // In: Lesot, M.J. et al. (eds) Information Processing and Management of Uncertainty in Knowledge-Based Systems. IPMU 2020. Communications in Computer and Information Science, Vol. 1238. – Springer, Cham, 2020.
57. *Lepskiy, A.* About Relation between the Measure of Conflict and Decreasing of Ignorance in Theory of Evidence // Proceedings of the 8th Conference of the European Society for Fuzzy Logic and Technology (EUSFLAT-13). – Amsterdam – Beijing – Paris: Atlantis Press, 2013. – P. 355–362.
58. *Zhang, L.* Representation, Independence and Combination of Evidence in the Dempster-Shafer Theory // In: Yager, R.R., Kacprzyk, J., Fedrizzi, M. (eds.) Advances in the Dempster-Shafer Theory of Evidence. – John Wiley & Sons, New York, 1994. – P. 51–69.

Статья представлена к публикации членом редколлегии П.Ю. Чеботаревым.

Поступила в редакцию 19.07.2021,
после доработки 27.08.2021.
Принята к публикации 31.08.2021

Лепский Александр Евгеньевич – д-р физ.-мат. наук, Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», Москва, ✉ alex.lepskiy@gmail.com.

ANALYSIS OF INFORMATION INCONSISTENCY IN BELIEF FUNCTION THEORY. PART I: EXTERNAL CONFLICT

A.E. Lepskiy

National Research University Higher School of Economics, Moscow, Russia

✉ alex.lepskiy@gmail.com

Abstract. The analysis results of information inconsistency within belief function theory (the Dempster–Shafer theory of evidence) are reviewed. This theory has been intensively developing over the past 10–15 years. Part I of the survey considers the measure of external conflict between bodies of evidence. The concepts of conflict and non-conflict bodies of evidence and the basic requirements applied to measures of external conflict are discussed. Different axioms of the measure of external conflict are analyzed. The general forms of measures of external conflict that satisfy the system of axioms are given. Different methods for constructing measures of external conflict (metric, algebraic, and structural approaches; evaluation by combining rules) are presented. The robust estimation of external conflict, the relationship between its measure and the metric on the set of bodies of evidence, and the consistency of combining rules and measures of external conflict are discussed. Many illustrative examples are provided.

Keywords: theory of belief functions, combining rules, inconsistency of bodies of evidence, measure of external conflict.

Funding. This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research, project no. 20-11-50077.