УДК 517.93;517.937

# К РЕАЛИЗАЦИИ НЕПРЕРЫВНЫХ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ С АВТОНОМНЫМИ ОПЕРАТОРАМИ В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ[1]

А.В. Лакеев, В.А. Русанов, В.А. Козырев

Для непрерывной нелинейной бесконечномерной динамической системы, определенной на языке ее поведения типа «вход — выход» (модель «черного ящика»), предложены различные функционально-аналитические критерии реализации данной системы в сепарабельном гильбертовом пространстве в классе квазилинейных стационарных дифференциальных моделей с программно-позиционным управлением.

**Ключевые слова:** нелинейная дифференциальная реализация, автономная $(A, B, B^{\#})_2$-модель, $M_2$-продолжимость.

## ВВЕДЕНИЕ

Основная цель теоретического естествознания — объяснение связанной совокупности наблюдаемых физических процессов при помощи минимального набора постулируемых понятий и выражаемых через них законов. Данная работа выполнена в русле именно этого методологического подхода с дифферентом в математические проблемы [1—11] реализации апостериорных процессов динамических систем ($D$-систем). Для этого в статье развит качественный подход, позволивший увидеть задачи непрерывной реализации поведения $D$-системы в новом «стационарно-квазилинейном» свете, отделить вопросы существования дифференциальных реализаций от процедур их вычисления [10], понять, что было недоделано в стационарной постановке [5, 9] и что еще оставалось сделать в нестационарных моделях [8], в частности, какие требуется внести коррективы в теорию $M_2$-продолжимости, что, по мнению авторов, позволит несколько по-новому взглянуть на уже известные положения нестационарной дифференциальной квазилинейной реализации и более глубоко и всесторонне в них разобраться.

Задача реализации в ее наиболее общем виде [1, *с. 21*]: «это просто абстрактная формулировка научного подхода к построению моделей», поэтому далее все дифференциальные модели будут рассматриваться лишь в смысле соответствия (или несоответствия) некоторому абстрактному набору экспериментальных данных, представленных семейством вектор-функций «*траектория*, *программное управление*, *позиционное управление*» — экзогенное поведение динамической системы ($D$-системы «вход — выход» — определение 1 [6]); все остальные возможные свойства этих моделей остаются в стороне. При этом современное состояние теории дифференциальной реализации таково, что не будет преувеличением сказать: сколько-нибудь исчерпывающее изложение основных ее разделов в рамках вводной части любой работы представляет совершенно неразрешимую задачу. Однако отметим, если смотреть на реализацию непрерывных систем так, как ее формулировал Калман [1, *с. 353*], то данная проблема по существу представляет задачу *представления*: отображение «вход — выход», заданное в виде свертки, требуется промоделировать системой типа «вход — состояние — выход» минимального динамического порядка. Исследование же данной работы по существу формулируется в «бихевиористической» постановке Виллемса [2] и методологически относится к теории *структурной* идентификации непрерывных $D$-систем в пространстве состояний:

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Программы фундаментальных исследований № 15 ОЭММПУ РАН (проект № 2.5).

исходя из произвольного наблюдаемого пучка управляемых траекторий попытаться *точно* смоделировать этот пучок дифференциальной системой с пространством состояний. При таком методологическом подходе, следуя логике «причинно-следственных» связей, «вход» — *программное управление*, а «выход» — *траектория* и *позиционное управление*. Данная постановка апостериорного математического моделирования не исключает методологического положения, когда аналитическое представление *a priori* нелинейного закона позиционного управления в структуре *D*-системы детерминируется не связью вида «state feedbac*k*», а характеризует существенную нелинейную компоненту уравнений динамики моделируемой *a posteriori* дифференциальной модели исследуемого физического объекта в классе квазилинейных систем.

Основной поток публикаций по качественной теории реализации развивает математическую парадигму линейных моделей (непрерывных или дискретных); это объясняется не только возможностью воспользоваться богатым аппаратом линейной математики, но и тем, что подобные модели необходимы для локального изучения уравнений динамики нелинейных объектов. И вряд ли вызывает удивление тот факт, что для нелинейных систем апостериорный анализ моделей вне локальной постановки оказываются более ограничительным; даже если речь идет о достаточных условиях реализации модели, на что, например, указывалось в статье [12]. Ситуация оказывается еще более тонкой (сильная и слабая измеримость при нестационарности, неограниченные операторы и т. п.), если апостериорно моделировать *бесконечномерные* нелинейные *D*-системы с разрывными управлениями из банаховых функциональных пространств. Поэтому данная работа нацелена, прежде всего, на преодоление методологических препятствий при «бесконечномерном» подходе реализации нелинейных непрерывных *D*-систем с гильбертовыми пространствами состояний и управлений.

Постановка данной работы была обозначена в выводах исследований [8, 13] и представляет собой идейное развитие результатов из публикации [9]. В методологическом плане мотивирующую предпосылку проводимых далее изысканий, в контексте теории структурной идентификации *D*-систем [6], по существу формулирует альтернатива для структуры автономности операторов уравнений моделируемой динамики системы [1, *с. 47*]: «в произвольной нестационарной системе наблюдения за прошлым поведением системы могут ничего не говорить о ее будущем». В соответствии с общим теоретико-системным направлением данного подхода основное внимание в статье обращено на геометрическое содержание аналитических положений теории с попыткой представить все результаты в терминах анализа функциональных свойств оператора Релея—Ритца [6—9]. Данный путь изысканий представляется весьма привлекательным, поскольку предлагаемый анализ создает впечатление теоретической глубины, в частности, чтобы прочувствовать бихевиористические различия между стационарной и нестационарной моделями дифференциальной динамики исследуемой *a posteriori* управляемой бесконечномерной нелинейной непрерывной *D*-системы.

Результаты статьи могут служить указанием на то, в каких практических ситуациях возможно, хотя бы в принципе, рассчитывать на конструктивное решение в классе квазилинейных автономных структур в сепарабельном гильбертовом пространстве задачи дифференциального моделирования поведения «вход — выход» *D*-системы с программно-позиционным управлением. Конечно, понятие «*существование модели реализации*» является в большей степени чисто качественной характеристикой, которая, как правило, не несет информацию о том, насколько хорошо обусловлены расчеты прикладного характера. Поэтому еще раз отметим, что значение результатов работы нужно видеть и расценивать именно в свете означенной выше возможности моделирования, которая появляется, по крайней мере, тогда, когда удовлетворены аналитические условия существования математической модели квазилинейной дифференциальной реализации.

## 1. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ПРЕДПОСЫЛКИ. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ РЕАЛИЗАЦИИ

Везде далее $(X, \|\cdot\|_X)$, $(Y, \|\cdot\|_Y)$, $(Z, \|\cdot\|_Z)$ — вещественные сепарабельные гильбертовы пространства (структуру предгильбертовости [14, *с. 64*] определяют нормы $\|\cdot\|_X$, $\|\cdot\|_Y$, $\|\cdot\|_Z$), $L(Y, X)$ — банахово пространство с операторной нормой $\|\cdot\|_{L(Y,\ X)}$ всех линейных непрерывных операторов из $Y$ в $X$ (аналогично $(L(X, X), \|\cdot\|_{L(X,\ X)})$, $(L(Z, X), \|\cdot\|_{L(Z,\ X)})$), $T := [t_0, t_1]$ — отрезок числовой прямой $R$ с мерой Лебега $\mu$ и $\nu$ — положительная мера, абсолютно непрерывная относительно $\mu$ и определенная на $\sigma$-алгебре $\wp_\nu$ всех $\nu$-измеримых (лебеговски пополненных) подмножеств интервала $T$. В дальнейшем будем часто рассматривать различные $\mu$-отношения на $T$, введем для них символы : $\cdot\!=\!\cdot$ — для равенства $\mu$-почти всюду, $\cdot\!\le\!\cdot$ — для упорядочения $\mu$-почти всюду, запись $S \cdot\!\subset\!\cdot\, Q$ для множеств $S, Q \in \wp_\mu$ означает $\mu(S \backslash Q) = 0$.

Пусть $(B, \|\cdot\|)$ — банахово пространство, $£_p(T, \nu, B)$ — пространство всех интегрируемых по Бохнеру [14, *с. 189*] отображений $f: T \to B$ с нормой $\int\limits_T \|f(\tau)\|^p \nu(d\tau))^{1/p}$, $p \in [1, \infty)$. Как обычно, через $\mathrm{L}_p(T, \nu, B)$ обозначим банахово фактор-пространство классов ν-эквивалентности в $£_p(T, \nu, B)$, при этом $AC(T, B) \subset £_1(T, \mu, B)$ — линейное множество всех абсолютно непрерывных функций (относительно меры μ).

Выделим к рассмотрению дифференциальные модели класса

$$dx(t)/dt \cdot\!=\!\cdot Ax(t) + Bu(t) + B^{\#}u^{\#}(x(t)), \qquad (1)$$

где $x(\cdot) \in AC(T, X)$ — решение Каратеодори ($K$-решение), $u(\cdot) \in \mathrm{L}_2(T, \mu, Y)$ и $u^{\#}(x(\cdot)) \in \mathrm{L}_2(T, \mu, Z)$ — программное и позиционное (возможно, нелинейное) управления, $(A, B, B^{\#}) \in L(X, X) \times L(Y, X) \times L(Z, X)$; для удобства тройку вектор-функций $(x, u, u^{\#}(x))$ из уравнения (1) тоже назовем $K$-решением, а упорядоченную тройку операторов $(A, B, B^{\#})$, согласно терминологии из работы [8], — автономной $(A, B, B^{\#})_2$-моделью.

Нетрудно видеть, что декартово произведение

$$\mathbf{L}_2 := \mathrm{L}_2(T, \mu, L(X, X)) \times \mathrm{L}_2(T, \mu, L(Y, X)) \times \times \mathrm{L}_2(T, \mu, L(Z, X))$$

образует банахово пространство классов μ-эквивалентности всех (автономные + нестационарные) $(A, B, B^{\#})_2$-моделей $t \mapsto (A(t), B(t), B^{\#}(t))$ с нормой

$$\|(A, B, B^{\#})\|_{\mathbf{L}} := \left( \int\limits_T (\|A(\tau)\|^2_{L(X, X)} + \|B(\tau)\|^2_{L(Y, X)} + \|B^{\#}(\tau)\|^2_{L(Z, X)})\mu(d\tau) \right)^{1/2}.$$

Далее, через $H_2$ обозначим $\mathrm{L}_2(T, \mu, X) \times \mathrm{L}_2(T, \mu, Y) \times \mathrm{L}_2(T, \mu, Z)$ с нормой

$$\|(g, w, q)\|_H := \left( \int\limits_T (\|g(\tau)\|^2_X + \|w(\tau)\|^2_Y + \|q(\tau)\|^2_Z)\mu(d\tau) \right)^{1/2}, \quad (g, w, q) \in H_2,$$

частное следствие [14, *с. 64*] конструкции $\|\cdot\|_H$: $H_2$ — гильбертово пространство. Наконец, через $L(H_2, X)$ обозначим банахово пространство с операторной нормой всех линейных непрерывных операторов, действующих из $H_2$ в $X$.

Пусть $(A, B, B^{\#}) \in \mathbf{L}_2$. Рассмотрим оператор $\xi$: $H_2 \to X$, имеющий представление

$$\xi(g, w, q) := \int\limits_T (A(\tau)g(\tau) + B(\tau)w(\tau) + B^{\#}(\tau)q(\tau))\mu(d\tau), \quad (g, w, q) \in H_2; \qquad (2)$$

согласно терминологии из [8] интегральный оператор $\xi$ определяет некоторую $\xi_2$-модель. Ясно, что $\xi \in L(H_2, X)$. Верно и обратное утверждение (лемма 2 [13]): «$\zeta \in L(H_2, X) \Rightarrow$ *оператор* $\zeta$ *имеет представление в виде* $\xi_2$*-модели*» или, иными словами, нет неразрешимых различий между $(A, B, B^{\#})_2$- и $\xi_2$-моделями. В этой парадигме автономность (инвариантность во времени) $(A, B, B^{\#})_2$-модели в терминах $\xi_2$-модели имеет простое, но принципиальное, предложение:

$$(A, B, B^{\#}) \in L(X, X) \times L(Y, X) \times L(Z, X) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \xi(g, w, q) = \int\limits_T (Ag(\tau) + Bw(\tau) + B^{\#}q(\tau))\mu(d\tau) =$$
$$= A\int\limits_T g(\tau)\mu(d\tau) + B\int\limits_T w(\tau)\mu(d\tau) + B^{\#}\int\limits_T q(\tau)\mu(d\tau),$$
$$\forall (g, w, q) \in H_2. \qquad (2')$$

Предложение (2′) вытекает из следствия 2 [14, *с. 191*].

*Постановка задачи* разрешимости дифференциальной реализации с автономной $(A, B, B^{\#})_2$-моделью: пусть $u^{\#}$: $AC(T, X) \to \mathrm{L}_2(T, \mu, Z)$, $\Pi_{u^{\#}} := \{(x, u, q) \in AC(T, X) \times \mathrm{L}_2(T, \mu, Y) \times \mathrm{L}_2(T, \mu, Z)$: $(x, u, q) = (x, u, u^{\#}(x))\}$, $N \subset \Pi_{u^{\#}}$ — некоторое фиксированное поведение «вход — выход» $D$-системы с позиционным законом $x \mapsto u^{\#}(x)$. Определить в аналитических конструкциях от семейства процессов $N$ необходимые и достаточные условия, при которых $N$ представляет $K$-решения некоторого дифференциального уравнения (1); в общем случае ограничений на Card $N$ (мощность семейства $N$) не накладываем (например, Card $N \geq \aleph_0$ — алеф-нуль).

## 2. СУЩЕСТВОВАНИЕ И ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕАЛИЗАЦИИ С АВТОНОМНОЙ $(A, B, B^{\#})_2$-МОДЕЛЬЮ В ВАРИАНТЕ Card $N$ = 1

Для поведения $(x, u, u^{\#}(x)) \in \Pi_{u^{\#}}$, отражающего процесс «вход — выход» в исследуемой $D$-системе, выпишем две μ-непрерывные меры (с учетом [15, *с. 107*] любая функция $x(\cdot) \in AC(T, X)$ обладает производной $dx(\cdot)/dt$ класса $\mathrm{L}_1(T, \mu, X)$):

$$\nu(S) := \int\limits_S (\|x(\tau)\|^2_X + \|u(\tau)\|^2_Y + \|u^{\#}(x(\tau))\|^2_Z)\mu(d\tau),$$
$$S \in \wp_\mu, \qquad (3)$$

$$\nu\_(S) := \int\limits_S \|dx(\tau)/d\tau\|_X \mu(d\tau), \quad S \in \wp_\mu.$$

Далее считаем, что означенные меры лебеговски расширены на σ-алгебры $\wp_\nu$ и $\wp_{\nu\_}$. В терминах данных мер рассмотрим пространства $L_2(T, \nu, R)$ и $L_1(T, \nu\_, R)$, после чего введем $æ$: $L_2(T, \nu, R) \to H_2$ и $\zeta$: $L_1(T, \nu\_, R) \to X$ — линейные непрерывные операторы, действующие согласно следующим правилам:

$$æ(\lambda) := \lambda\cdot(x, u, u^{\#}(x)), \quad \lambda \in L_2(T, \nu, R), \qquad (4)$$

$$\zeta(\eta) := \int_T (\eta(\tau)dx(\tau)/d\tau)\mu(d\tau), \quad \eta \in L_1(T, \nu\_, R);$$

в теоретико-множественной модели [16] идентификации систем (1) операторы $æ$ и $\zeta$ — «конструкторы» пространств «входных» и «выходных» сигналов.

Нет такой информации о $(A, B, B^{\#})_2$-модели, которую нельзя было бы извлечь из конструкции соответствующей ей $\xi_2$-модели (лемма 2 [13]). Поэтому в аксиоматическом построении [16] теоретико-множественной интерпретации идентификационного процесса для дифференциальной системы (1) в качестве математической модели выступает не форма оператора Коши (прототип определения 1.1 [1, *с. 13*]), а ее представление в терминах интегральной $\xi_2$-модели (реминисценция определения 1.3 [17, *с. 22*]). При этом в данной интерпретации (см. статью [16]) идентификационный базис задает область определения $\xi_2$-модели. Есть и другие веские доводы исследовать геометрию идентификационных базисов, но далее понадобится только результат леммы 1, доказательство которой опускаем (несложная модификация теоремы 7 и следствия 4 из статьи [16]).

**Лемма 1.** *Пусть* $(x, u, u^{\#}(x)) \in \Pi_{u^{\#}}$, $\nu$ — *мера из* (3), $æ$ — *оператор из выражения* (4) *и пусть* $\Omega$ — *полный образ в* $H_2$ *оператора* $æ$. *Тогда* $\Omega$ — *замкнутое подпространство в* $H_2$, *при этом оператор* $æ$: $L_2(T, \nu, R) \to \Omega$ — *линейная изометрия.*

**Замечание 1.** Норма $\|(x, y, z)\|_U := (\|x\|^2_X + \|y\|^2_Y + \|z\|^2_Z)^{1/2}$ в произведении $X \times Y \times Z =: U$ наделяет последнее гильбертовой структурой. Следовательно, пространства $H_2$ и $L_2(T, \mu, U)$ равны с точностью до изоморфизма, осуществляющего естественное вложение $H_2$ в $L_2(T, \mu, U)$, поэтому резонно считать $\Omega \subset L_2(T, \mu, U)$. ♦

С учетом замечания 1 введем на $\Omega$ конструкцию интеграла Бохнера [14], что позволяет выделить в подпространстве $\Omega$ замкнутое нуль-многообразие вида

$$W := \left\{h \in \Omega\colon \int_T h(\tau)\mu(d\tau) = 0 \in U\right\}; \qquad (5)$$

в силу леммы 1 функциональное многообразие $W$ замкнуто в $L_2(T, \mu, U)$ (и в $H_2$).

**Лемма 2.** $D := \{d \in U\colon d = \int_T h(\tau)\mu(d\tau),\ h \in \Omega\}$ — *множество второй категории в себе* (*с топологией, индуцированной из* $U$).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Достаточно установить (согласно теореме Бэра — Хаусдорфа о категории [14, *с. 24*]), что $D$ — полное метрическое пространство. С этой целью построим «топологическую копию» множества $D$. Перейдем к деталям.

Так как $\left\{d \in U\colon d = \int_T h(\tau)\mu(d\tau),\ h \in L_2(T, \mu, U)\right\} = U$, то к оператору

$$J(h) := \int_T h(\tau)\mu(d\tau),\ h \in L_2(T, \mu, U),$$

применима теорема Банаха об открытости отображения [14, *с. 112*]. Таким образом, сужение $J|\Omega$ — открытое отображение на образ Im $J|\Omega$ (т. е. на $D$), откуда в силу теоремы 8 [18, *с. 133*] топология в $D$ совпадает с фактор-топологией, задаваемой $J|\Omega$, что приводит к положению: фактор-пространство $G := \Omega/W$ и линейное многообразие $D$ обладают линейным гомеоморфизмом $J^*$: $G \to D$, таким что $J|\Omega = J^*\circ\pi$, где $\pi$ — фактор-отображение подпространства $\Omega$ на $G$. С другой стороны, опираясь на лемму 1, представление (5) и пункт (d) теоремы 1.41 [19, *с. 39*], заключаем: фактор-пространство $G$ — банахово.

**Следствие 1.** *Линейное многообразие $D$ замкнуто в $U$. Оператор $J|\Omega$ — открытое отображение подпространства $\Omega$ на $D$.* ♦

Условимся обозначать фактор-пространство классов $\mu$-эквивалентности всех вещественных и $\mu$-измеримых на интервале времени $T$ функций через $L(T, \mu, R)$, и пусть $\Psi$: $AC(T, X) \times L_2(T, \mu, Y) \times L_2(T, \mu, Z) \to L(T, \mu, R)$ оператор Релея—Ритца [13]:

$$\Psi(g, w, q)(t) :=$$
$$:= \begin{cases} \|dg(t)/dt\|_X / \|g(t), w(t), q(t)\|_U, \\ \text{если } \|(g(t), w(t), q(t))\|_U \ne 0; \\ 0 \in R, \text{ если } \|(g(t), w(t), q(t))\|_U = 0, \end{cases} \qquad (6)$$

где $g \in AC(T, X)$, $w \in L_2(T, \mu, Y)$, $q \in L_2(T, \mu, Z)$.

Оператор $\Psi$ не стеснен рамками своих конструкций из выражения (6), более того, во второй строке он фактически «не обнуляет» информацию о динамических процессах $(x(\cdot), u(\cdot), u^{\#}(x(\cdot)))$ из $\Pi_{u^{\#}}$, поскольку имеют место следующие положения:

— каждая функция $x \in AC(T, X)$ μ-почти всюду дифференцируема на интервале $T$ и имеет (лемма 1 [13]) аналитическое представление в форме

$$x(t) = x(t_0) + \int_{[t_0,\, t]} dx(\tau)/d\tau\mu(d\tau), \quad t \in T;$$

— в силу леммы 3 [13] справедливо включение (по mod μ)

$$\{t \in T: \|(x(t),\, u(t),\, u^{\#}(x(t)))\|_U = 0\} \cdot\!\!\subset\!\cdot \{t \in T: dx(t)/dt = 0\}, \qquad (7)$$

следовательно (в задаче реализации), на множестве моментов времени

$$\{t \in T: \|(x(t),\, u(t),\, u^{\#}(x(t)))\|_U = 0\}$$

функция $t \mapsto \Psi(x, u, u^{\#}(x))(t)$ согласно первой строке выражения (6) «не теряет информацию» о поведении $(x(\cdot), u(\cdot), u^{\#}(x(\cdot))) \in \Pi_{u^{\#}}$ (вне зависимости от факта наличия или отсутствия дифференциальной реализации (1) данного динамического процесса).

В формулировке следующей теоремы (в известном смысле она является пропедевтической к теореме 4, см. далее) выписаны наиболее компактные (на взгляд авторов) соотношения между понятиями, с одной стороны, поведения *D*-системы как апостериорного динамического процесса «вход — выход», а с другой, как *K*-решения некоторого дифференциального уравнения (1); см. далее также замечание 5.

**Теорема 1.** $(x, u, u^{\#}(x)) \in \Pi_{u^{\#}}$ — *K-решение некоторого уравнения* (1) *в том и только в том случае, если для соотношений* (3)—(6), *индуцированных* $(x, u, u^{\#}(x))$, *выполняется* $æ^{-1}(W) \subset \mathrm{Ker}\,\zeta$ *совместно с одним* (*любым*) *из двух условий:*

*а*) $\exists\, c \in (0, \infty)$: $\nu\_(S) \le c\,(\mu(S))^{1/2}(\nu(S))^{1/2}$, $\forall S \in \wp_\mu$;

*б*) $\exists\, c \in (0, \infty)$: $\Psi(x, u, u^{\#}(x))(t) \cdot\!\le\!\cdot\, c$.

**Замечание 2.** Подтверждение одного из условий *а*) или *б*) обеспечивает (см. замечание 1 [8]) *непрерывное* [20, *с. 322*] вложение $£_2(T, \nu, R) \subset £_1(T, \nu\_, R)$, что делает корректным (см. (4)) анализ операции $æ^{-1}(W) \subset \mathrm{Ker}\,\zeta$ на классах μ-эквивалентности из $L_2(T, \nu, R)$; во избежание недоразумений следует иметь в виду, что $£_2(T, \nu, R) \subset £_1(T, \nu\_, R)$ еще не обеспечивает факт $L_2(T, \nu, R) \subset L_1(T, \nu\_, R)$ (следствие 1 [13]). Уместно также отметить, что в отличие от задачи дифференциальной реализации в редакции нестационарной $(A, B, B^{\#})_2$-модели (см. п. *в*) замечания 1 [8]), реализация (1) процесса $(x, u, u^{\#}(x))$ не гарантирует, но (см. следствие 2) и не отвергает *единственность* представления автономной $(A, B, B^{\#})_2$-модели.

Доказательство теоремы 1. Приняв временно на веру перечисленные в формулировке теоремы 1 факты, покажем, что позиции *а*) и *б*) эквивалентны.

- (*а*) ⇒ *б*)). Пусть существует такое $c \in (0, \infty)$, что $\nu\_(S) \le c\,(\mu(S))^{1/2}(\nu(S))^{1/2}$, $\forall S \in \wp_\mu$. Рассмотрим на интервале $T$ три абсолютно непрерывные функции:

$$t \mapsto \gamma(t) := \int_{[t_0,\, t]} \|dx(\tau)/d\tau\|_X\,\mu(d\tau), \quad t \mapsto \alpha(t) := c^2 \int_{[t_0,\, t]} \mu(d\tau),$$

$$t \mapsto \beta(t) := \int_{[t_0,\, t]} (\|x(\tau)\|_X^2 + \|u(\tau)\|_Y^2 + \|u^{\#}(x(\tau))\|_Z^2)\mu(d\tau).$$

Функции γ, α и β дифференцируемы μ-почти всюду: $d\gamma(t)/dt = \|dx(t)/dt\|_X$, $d\alpha(t)/dt = c^2$, $d\beta(t)/dt = (\|x(t)\|_X^2 + \|u(t)\|_Y^2 + \|u^{\#}(x(t))\|_Z^2)$. Поэтому, приняв $S_t := [t, t + \Delta t]$, $\Delta t > 0$, из факта $\nu\_(S_t) \le c(\mu(S_t))^{1/2}(\nu(S_t))^{1/2}$ согласно (3) приходим к

$$\Delta t^{-1}(\gamma(t + \Delta t) - \gamma(t)) = \Delta t^{-1} \int_{[t,\, t+\Delta t]} \|dx(\tau)/d\tau\|_X\mu(d\tau) \le$$
$$\le c\left(\Delta t^{-1} \int_{[t,\, t+\Delta t]} \mu(d\tau)\right)^{1/2}\left(\Delta t^{-1} \int_{[t,\, t+\Delta t]} (\|x(\tau)\|_X^2 + \|u(\tau)\|_Y^2 + \|u^{\#}(x(\tau))\|_Z^2)\mu(d\tau)\right)^{1/2} =$$
$$= (\Delta t^{-1}(\alpha(t + \Delta t) - \alpha(t)))^{1/2}(\Delta t^{-1}(\beta(t + \Delta t) - \beta(t)))^{1/2}$$

и, переходя к пределу при $\Delta t \to 0$, получаем неравенство

$$d\gamma(t)/dt = \|dx(t)/dt\|_X \le (d\alpha(t)/dt)^{1/2}(d\beta(t)/dt)^{1/2} = c\|(x(t),\, u(t),\, u^{\#}(x(t)))\|_U.$$

Следовательно (в силу (6) и (7)), справедливо положение $\Psi(x, u, u^{\#}(x))(t) \cdot\!\le\!\cdot\, c$.

- (*б*) ⇒ *а*)). Пусть найдется такое число $c > 0$, что выполнимо $\Psi(x, u, u^{\#}(x))(t) \cdot\!\le\!\cdot\, c$. Тогда, очевидно, $\|dx(t)/dt\|_X \cdot\!\le\!\cdot\, c\,(\|x(t)\|_X^2 + \|u(t)\|_Y^2 + \|u^{\#}(x(t))\|_Z^2)^{1/2}$ и, следовательно, в силу интегрального неравенства Коши—Буняковского для любого подмножества $S \in \wp_\mu$ имеет место $\nu\_(S) \le c\,(\mu(S))^{1/2}(\nu(S))^{1/2}$.

Теперь, после краткого отступления, вызванного подтверждением *а*) ⇔ *б*)), возвращаемся к основной линии доказательства теоремы 1; разобьем его на две части — «*только в том случае*, ⇒» и «*в том случае*, ⇐».

- (*только в том случае*, ⇒). Пусть $(x, u, u^{\#}(x))$ — *K*-решение некоторого уравнения (1) и $(A, B, B^{\#}) \in L(X, X) \times L(Y, X) \times L(Z, X)$ — его автономная $(A, B, B^{\#})_2$-модель. Тогда (теорема 1 [13]) имеет место непрерывное вложение $£_2(T, \nu, R) \subset £_1(T, \nu\_, R)$, и справедлив комментарий замечания 2. Используя представление (3),

$$
\begin{tikzcd}
\operatorname{Ker} æ \arrow[r, "\mathrm{id}_{\operatorname{Ker} æ}"] \arrow[d, phantom, "\cap"] & L_2(T, \nu, R) \arrow[r, "æ"] \arrow[d, phantom, "\|"] & \Omega \arrow[r, "\omega"] \arrow[d, "\xi|\Omega"] & D \arrow[r, "\mathrm{id}_D"] \arrow[d, "C"] & U \arrow[d, "(A,B,B^{\#})"] \\
\operatorname{Ker} \zeta \arrow[r, "\mathrm{id}_{\operatorname{Ker} \zeta}"] & L_2(T, \nu, R) \arrow[r, "\zeta"] & X \arrow[r, "\mathrm{id}_X"] & X \arrow[r, "\mathrm{id}_X"] & X
\end{tikzcd}
$$

**Рис. 1. Диаграмма (к доказательству теоремы 1)**

автономную $\xi_2$-модель (формула (2′)) и уравнение (1), обнаруживаем, что

$$\int_T (\lambda(\tau)dx(\tau)/d\tau)\mu(d\tau) = A\int_T \lambda(\tau)x(\tau)\mu(d\tau) + $$
$$+ B\int_T \lambda(\tau)u(\tau)\mu(d\tau) + B^{\#}\int_T \lambda(\tau)u^{\#}(x(\tau))\mu(d\tau),$$
$$\forall\lambda \in L_2(T, \nu, R).$$

Откуда, принимая во внимание (лемма 1), что оператор $æ$: $L_2(T, \nu, R) \to \Omega$ обратим (т. е. $\operatorname{Ker} æ = 0 \in L_2(T, \nu, R)$) и $(A, B, B^{\#})$: $U \to X$, получаем вложение $æ^{-1}(W) \subset \operatorname{Ker}\zeta$.

Осталось подтвердить *а*) или *б*). Выбираем свойство *б*), его наличие содержит следующая цепь импликаций (с учетом неравенства Коши — Буняковского и (7)):

$$dx(t)/dt \mathrel{\cdot{=}\cdot} Ax(t) + Bu(t) + B^{\#}u^{\#}(x(t)) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \|dx(t)/dt\|_X \mathrel{\cdot{\le}\cdot} \|A\|_{L(X,\,X)}\|x(t)\|_X + \|B\|_{L(Y,\,X)}\|u(t)\|_Y +$$
$$+ \|B^{\#}\|_{L(Z,\,X)}\|u^{\#}(x(t))\|_Z \Rightarrow \Psi(x, u, u^{\#}(x))(t) \mathrel{\cdot{\le}\cdot} (\|A\|^2_{L(X,\,X)} +$$
$$+ \|B\|^2_{L(Y,\,X)} + \|B^{\#}\|^2_{L(Z,\,X)})^{1/2} =: c \in (0, \infty).$$

- (*в том случае*, $\Leftarrow$). Пусть $æ^{-1}(W) \subset \operatorname{Ker}\zeta$ и, кроме того, отыщется такое положительное число $c$, что можно утверждать: $\Psi(x, u, u^{\#}(x))(t) \mathrel{\cdot{\le}\cdot} c$; это неравенство обеспечивает (теорема 1 [13]) вложение $£_2(T, \nu, R) \subset £_1(T, \nu\_, R)$, поэтому в (4) область определения оператора $\zeta$ позволительно сузить до $L_2(T, \nu, R)$. Покажем, что оператор $\zeta$: $L_2(T, \nu, R) \to X$ непрерывен. Позиция *б*) влечет связь

$$\|\lambda(t)dx(t)/dt\|_X \mathrel{\cdot{\le}\cdot} c(\lambda^2(t)(\|x(t)\|^2_X + \|u(t)\|^2_Y +$$
$$+ \|u^{\#}(x(t))\|^2_Z))^{1/2},\ \lambda \in L_2(T, \nu, R) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \left\| \int_T (\lambda(\tau)dx(\tau)/d\tau)\mu(d\tau)\right\|_X \le \int_T \|\lambda(\tau)dx(\tau)/d\tau\|_X\,\mu(d\tau) \le$$
$$\le c\left(\int_T (\lambda^2(\tau)(\|x(\tau)\|^2_X + \|u(\tau)\|^2_Y + \|u^{\#}(x(\tau))\|^2_Z))^{1/2}\mu(d\tau)\right) \le$$
$$\le c(\mu(T))^{1/2}\left(\int_T \lambda^2(\tau)(\|x(\tau)\|^2_X + \|u(\tau)\|^2_Y +\right.$$
$$\left. + \|u^{\#}(x(\tau))\|^2_Z)\mu(d\tau)\right)^{1/2} = c(\mu(T))^{1/2}\|\lambda\|_{L_2},$$

$\|\cdot\|_{L_2}$, — норма в $L_2(T, \nu, R)$. Таким образом, установили непрерывность $\zeta$, что по существу равносильно существованию некоторой $\xi_2$-модели (2), необязательно с автономной $(A, B, B^{\#})_2$-моделью; см. далее диаграмму и в ней сужение $\xi|\Omega$.

Для снятия возможных затруднений, а также облегчения и наглядности дальнейших рассуждений, рассмотрим коммутативную диаграмму, представленную на рис. 1.

Здесь $\mathrm{id}_{...}$ — тождественное отображение (индекс — область определения/значений), $\xi$ — оператор $\xi_2$-модели (2), $\omega$ — оператор интегрирования на функциональном многообразии $\Omega$; с учетом (5) ясно, что имеет место $\omega = J|\Omega$ и $\operatorname{Ker}\omega = W$.

Теперь построим линейный оператор $C$, фигурирующий в диаграмме. Для этого каждому $\eta \in D$ сопоставим такое значение $C(\eta) \in X$, чтобы в целом не нарушалось свойство коммутативности диаграммы, а поскольку располагаем отношением $æ^{-1}(W) = æ^{-1}(\operatorname{Ker}\omega) \subset \operatorname{Ker}\zeta$, то примем $C(\eta) = \zeta(æ^{-1}(\omega^{-1}(\eta)))$.

Не теряя терпения, изменим несколько вопрос: обладает ли оператор $C$: $D \to X$ свойством непрерывности? (Подразумевается, что топология в $D$ индуцирована метрической топологией из $U$). Оказывается, что ответ положительный.

В самом деле, если $E$ — открытая область в $X$, то ее прообраз $\zeta^{-1}(E)$ открыт в $L_2(T, \nu, R)$ поскольку (как показано выше) оператор $\zeta$ непрерывен. Далее (см. диаграмму), множество $æ(\zeta^{-1}(E))$, как утверждает лемма 1, открыто в $\Omega$, следовательно $\omega(æ(\zeta^{-1}(E)))$ — открытая область в $D$ (в силу следствия 1). С другой стороны, как несложно установить (учитывая, что $æ^{-1}(W) = æ^{-1}(\operatorname{Ker}\omega) \subset \operatorname{Ker}\zeta$), имеет место $\omega(æ(\zeta^{-1}(E))) = C^{-1}(E)$, что и подтверждает непрерывность оператора $C$.

Наконец, структура пространства $U$ позволяет (см. теорему 8.4.2 [21, *с. 213*]) осуществить линейное непрерывное распространение оператора $C$ до некоторой автономной $(A, B, B^{\#})_2$-модели $(A, B, B^{\#})$: $U \to X$ такой, что

$$\zeta(æ^{-1}(\omega^{-1}(\eta))) = (A, B, B^{\#})(\eta) = C(\eta), \quad \forall\eta \in D.$$

В свою очередь, это означает (согласно (4)) не что иное, как

$$\int_T (\lambda(\tau)dx(\tau)/d\tau)\mu(d\tau) = A\int_T \lambda(\tau)x(\tau)\mu(d\tau) + $$
$$+ B\int_T \lambda(\tau)u(\tau)\mu(d\tau) + B^{\#}\int_T \lambda(\tau)u^{\#}(x(\tau))\mu(d\tau),$$
$$\forall\lambda \in L_2(T, \nu, R).$$

Последнее равенство справедливо и для характеристических функций $\chi_t$ от подинтервалов $[t_0, t] \subset T$, что в силу (2′) приводит к представлению «смещенной на вектор $x(t_0)$» траектории изучаемого динамического процесса:

$$\zeta(\chi_t(x, u, u^{\#}(x)))(t) = x(t) - x(t_0) =$$
$$= \int_{[t_0, t]} (Ax(\tau) + Bu(\tau) + B^{\#}u^{\#}(x(\tau)))\mu(d\tau), \quad t \in T.$$

Дифференцирование траектории $t \mapsto x(t)$ позволяет заключить, что $(x, u, u^{\#}(x))$ — $K$-решение уравнения (1) с операторами $A \in L(X, X)$, $B \in L(Y, X)$, $B^{\#} \in L(Z, X)$. ♦

Теорема 1 определяет «единичные» процессы в $\Pi_{u^{\#}}$, обладающие *автономной* $(A, B, B^{\#})_2$-моделью реализации, при этом ход доказательства показал: свойства *а*) и *б*) эквивалентны; слабое место теоремы — необходимо добиться легкости в исчислениях, подтверждающих или опровергающих вложение $æ^{-1}(W) \subset \operatorname{Ker} \zeta$. В этой связи пункт (ii) следствия 2 — первый шаг в направлении констатации, что конструктивность данных исчислений может достигаться (например, теорема 1 [10], утверждение 1 [22] и т. п.) в классе конечномерных систем (1).

**Следствие 2.** (i) *Реализация* (1) *процесса* $(x, u, u^{\#}(x)) \in \Pi_{u^{\#}}$ *обладает единственной автономной* $(A, B, B^{\#})_2$*-моделью тогда и только тогда, когда* $D = U$.

(ii) *Если* $\dim D < \infty$, *то условия а) и б) в теореме 1 можно опустить.*

## 3. ОСНОВНЫЕ ПРИНЦИПЫ $M_2$-ПРОДОЛЖИМОСТИ

Определения и конструкции, употребляемые при построении теории реализации, можно получить из небольшого числа общих понятий, поэтому дальнейшее изложение основывается на изучении пространства $\mathbf{L}_2$, что ставит задачу определения остальных понятий через конструкцию $(A, B, B^{\#})_2$-модели, в частности, это относится к понятиям $M_2$-продолжимости [8]. В связи с этим далее вкратце излагаются, с некоторой опорой на интуицию в части решения задачи реализации, формальные определения и некоторые важные положения об общих свойствах распространения $M_2$-операторов; естественно собрать немногие нужные понятия вместе.

**Определение 1.** Пусть $(A, B, B^{\#}) \in \mathbf{L}_2$. Назовем $M_2$-оператором линейный оператор $M$: $H_2 \to \mathrm{L}_1(T, \mu, X)$, имеющий аналитическое представление вида

$$M(g, w, q) := Ag + Bw + B^{\#}q, \quad (g, w, q) \in H_2.$$

**Предложение 1** [8]. *$M_2$-оператор непрерывен в топологиях от* $\|\cdot\|_H$ *и* $\|\cdot\|_{\mathrm{L}_1}$; *здесь* $\|\cdot\|_{\mathrm{L}_1}$ *— норма в* $\mathrm{L}_1(T, \mu, X)$.

**Определение 2.** Пусть $V \subset H_2$. Линейный оператор $M^{\#}$: Span $V \to \mathrm{L}_1(T, \mu, X)$ назовем $M_2$-продолжимым, если и только если $M^{\#}$ допускает распространение до некоторого $M_2$-оператора $M$: $H_2 \to \mathrm{L}_1(T, \mu, X)$, т. е. $M(y) = M^{\#}(y)$, $\forall y \in \operatorname{Span} V$. ♦

Не стремясь на данный момент к формулировке исчерпывающего результата по характеризации свойства $M_2$-продолжимости, приведем ее конструкцию в семействе всех *линейных непрерывных* операторов, действующих из пространства $H_2$ в $\mathrm{L}_1(T, \mu, X)$ (ее очевидная мотивация — предложение 1); впоследствии эта конструкция пригодится (для доказательства предложения 3).

Пусть $S \in \wp_\mu$ и $P_{S,\mathrm{L}}$: $\mathrm{L}_1(T, \mu, X) \to \mathrm{L}_1(T, \mu, X)$ — оператор вида: $P_{S,\mathrm{L}}(y)(t) := y(t)$, если $t \in S$ и $P_{S,\mathrm{L}}(y)(t) := 0 \in X$ при $t \in T \backslash S$ [20, *с. 13*]. Оператор $P_{S,\mathrm{L}}$ — линейный проектор $P^2_{S,\mathrm{L}} = P_{S,\mathrm{L}}$ и пространство $\mathrm{L}_2(T, \mu, X) \subset \mathrm{L}_1(T, \mu, X)$ инвариантно относительно $P_{S,\mathrm{L}}$, что делает корректным рассмотрение аналогичного оператора $P_{S,H}$: $H_2 \to H_2$.

**Предложение 2** [8]. *Пусть $E \subset H_2$ — линейное многообразие, инвариантное относительно семейства проекторов $\{P_{S,H}: S \in \wp_\mu\}$ и $M^*$: $E \to \mathrm{L}_1(T, \mu, X)$ — линейный непрерывный оператор. Тогда существует $M_2$-оператор $M$: $H_2 \to \mathrm{L}_1(T, \mu, X)$, продолжающий $M^*$ (т. е. $M(y) = M^*(y)$, $\forall y \in E$), в том и только в том случае, если*

$$M^* \circ P_{S,H}(y) = P_{S,\mathrm{L}} \circ M^*(y), \ \forall S \in \wp_\mu, \ \forall y \in E, \quad (8)$$

*что означает коммутативность следующей диаграммы* (рис. 2).

**Следствие 3** [8]. *Непрерывный линейный оператор $M$: $H_2 \to \mathrm{L}_1(T, \mu, X)$ является $M_2$-оператором тогда и только тогда, когда для любого $S \in \wp_\mu$ справедливо*

$$M \circ P_{S,H}(\cdot) = P_{S,\mathrm{L}} \circ M(\cdot). \ ♦$$

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{M^*} & \mathrm{L}_1(T, \mu, X) \\ \downarrow P_{S,H} & & \downarrow P_{S,\mathrm{L}} \\ E & \xrightarrow{M^*} & \mathrm{L}_1(T, \mu, X) \end{array}$$

**Рис. 2. Диаграмма (к предложению 2)**

Пусть $V \subset H_2$ и $M^{\#}$: Span $V \to L_1(T, \mu, X)$ — некоторый линейный оператор. Чтобы получить с помощью предложения 2 действенный критерий продолжимости $M^{\#}$ до $M_2$-оператора, необходимо последовательно:

— расширить линейную оболочку Span $V$ до линейного многообразия $E \subset H_2$, инвариантного относительно семейства проекторов $\{P_{S,\ H}\colon S \in \wp_\mu\}$;

— построить для оператора $M^{\#}$ его линейное расширение $M^*$ на образованное линейное многообразие $E$;

— показать непрерывность оператора $M^*$;

— проверить для линейного расширения $M^*$ выполнение условия (8).

Решение трех последних из перечисленных задач содержит предложение 3, тогда как первая из них — это предмет анализа следующей леммы.

**Лемма 3.** *Пусть* $V \subset H_2$ *и* $E :=$ Span$\{P_{S,\ H}(y)\colon S \in \wp_\mu,\ y \in$ Span $V\}$. *Тогда:*

*а) $E$ — наименьшее линейное множество в $H_2$, содержащее* Span $V$ *и инвариантное относительно семейства проекторов* $\{P_{S,\ H}\colon S \in \wp_\mu\}$;

*б) если $y \in E$, то найдется натуральное $k$ такое, что существуют $y_1, \ldots, y_k \subset$* Span $V$ *и $S_1, \ldots, S_k \in \wp_\mu$ такие, что* $y = \sum_{1 \le i \le k} P_{Si,\ H}(y_i)$, $S_i \cap S_j = \varnothing$, $i \ne j$ $(i, j = 1, \ldots, k)$.

**Замечание 3.** В геометрическом разложении $y = \sum_{1 \le i \le k} P_{Si,\ H}(y_i)$ можно считать, что $\bigcup_{1 \le i \le k} S_i$ исчерпывает весь интервал $T$, поскольку если $\bigcup_{1 \le i \le k} S_i$ — собственное подмножество интервала $T$, то, обозначив через $S_{i+1}$ множество $T \setminus \bigcup_{1 \le i \le k} S_i$, и приняв $y_{i+1} \equiv 0$, получаем разложение вектор-функции $y = \sum_{1 \le i \le k+1} P_{S_i,\ H}\ (y_i)$, $\bigcup_{1 \le i \le k+1} S_i = T$. Таким образом, далее примем, что в представлении $y = \sum_{1 \le i \le k} P_{S_i,\ H}\ (y_i)$ подмножества $S_1, \ldots, S_k \in \wp_\mu$ образуют дизъюнктное разбиение временного интервала $T$.

Доказательство леммы 3. (*а*) Инвариантность (и минимальность) линейного множества $E$ следует из вполне прозрачного соотношения $P_{S^*,\ H} \circ P_{S^{**},\ H} = P_{S^* \cap S^{**},\ H}$.

(*б*) Доказательство этого утверждения проведем индукцией по числу $k$ в следующем представлении: $y \in E$, $y = \sum_{1 \le i \le k} P_{S_i,\ H}(y_i)$, $S_i \in \wp_\mu$, $y_i \in$ Span $V$, $i = 1, \ldots, k$.

*Индуктивный шаг.* Рассмотрим сумму $\sum_{1 \le i \le k} P_{S_i,\ H}(y_i) + P_{S^*,\ H}(y^*)$, где $S_i \cap S_j = \varnothing$, $i \ne j$, $y_i$, $y^* \in$ Span $V$, $i, j = 1, \ldots, k$. Положим $S_i' := S^* \cap S_i$, $S_i'' := S_i \setminus S^*$, $S''' := S^* \setminus \bigcup_{1 \le i \le k} S_i$. Тогда подмножества $S_i'$, $S_i''$ и $S'''$ попарно дизъюнктны и, кроме того, $S_i = S_i' \cup S_i''$, $S^* = S''' \cup (\bigcup_{1 \le i \le k} S_i')$, поэтому

$$P_{S_i,\ H}(y_i) = P_{S_i',\ H}(y_i) + P_{S_i'',\ H}(y_i), \quad 1 \le i \le k,$$

$$P_{S^*,\ H}(y^*) = \sum_{1 \le i \le k} P_{S_i',\ H}(y^*) + P_{S''',\ H}(y^*).$$

Последние соотношения позволяют завершить доказательство:

$$\sum_{1 \le i \le k} P_{S_i,\ H}(y_i) + P_{S^*,\ H}(y^*) =$$
$$= \sum_{1 \le i \le k} (P_{S_i',\ H}(y_i) + P_{S_i'',\ H}(y_i) + P_{S_i',\ H}(y^*)) + P_{S''',\ H}(y^*) =$$
$$= \sum_{1 \le i \le k} (P_{S_i',\ H}(y_i + y^*) + P_{S_i'',\ H}(y_i)) + P_{S''',\ H}(y^*). \ \blacklozenge$$

Легко видеть, что доказательство леммы 3 опиралось исключительно на структуру линейной оболочки, натянутой на множество $\{P_{S,\ H}(y)\colon S \in \wp_\mu,\ y \in$ Span $V\}$, которое по факту нелинейно. Это любопытно хотя и не очень важно, важно другое — предшествующая лемма вкупе с предложением 2 позволяют дать следующую компактную формулировку аналитического результата по $M_2$-продолжимости.

**Предложение 3.** *Пусть* $V \subset H_2$ *и* $M^{\#}$: Span $V \to L_1(T, \mu, X)$ — *линейный оператор. Тогда для $M_2$-продолжимости оператора $M^{\#}$ необходимо и достаточно, чтобы в* $L_2(T, \mu, R)$ *нашлась такая функция* $t \mapsto \varphi(t) \cdot\ge\cdot 0$, *что*

$$\|M^{\#}(y)(t)\|_X \cdot\le\cdot \varphi(t)\|y(t)\|_U, \quad \forall\ y \in \text{Span } V. \qquad (9)$$

Доказательство. (*Необходимо*, $\Rightarrow$). Если $M(g, w, q) := Ag + Bw + B^{\#}q$ — некоторый $M_2$-оператор, продолжающий $M^{\#}$, то, разумеется, имеет место

$$\|M^{\#}(y)(t)\|_X \cdot=\cdot \|M(t)y(t)\|_X \cdot\le\cdot \varphi(t)\|y(t)\|_U, \quad \forall\ y \in \text{Span } V,$$

$$\varphi(t) = (\|A(t)\|^2_{L(X,X)} + \|B(t)\|^2_{L(Y,X)} + \|B^{\#}(t)\|^2_{L(Z,X)})^{1/2};$$

из сказанного следует, что функция $\varphi$ принадлежит классу $L_2(T, \mu, R)$.

(*Достаточно*, $\Leftarrow$). Пусть $E \subset H_2$ — линейное многообразие из формулировки леммы 3. Рассмотрим линейный оператор $M^*\colon E \to L_1(T, \mu, X)$, действующий согласно установки $M^*(y) := \sum_{1 \le i \le k} P_{S_i,\ L} \circ M^{\#}(y_i)$, где $y$, $y_i \in E$, $S_i \in \wp_\mu$, $1 \le i \le k$, в силу леммы 3 и замечания 3 связаны следующими конструкциями:

$$y = \sum_{1 \le i \le k} P_{S_i,\ H}(y_i), \quad y_i \in \text{Span } V, \quad S_i \cap S_j = \varnothing, \quad i \ne j,$$
$$\bigcup_{1 \le i \le k} S_i = T, \quad i, j = 1, \ldots, k.$$

Покажем, что оператор $M^*$ определен корректно, т. е. его значение от любой вектор-функции $y \in E$ не зависит от представления $y = \sum_{1 \le i \le k} P_{S_i, H}(y_i)$.

Пусть $y \in E$ и $y = \sum_{1 \le i \le k} P_{S_i, H}(y_i) = \sum_{1 \le j \le r} P_{S_j, H}(y_j)$, где $\{S_i\}_{i = 1, ..., k}$ и $\{S_j\}_{j = 1, ..., r}$ — некоторые фиксированные дизъюнктные разбиения интервала $T$, а $y_i$, $y_j \in \mathrm{Span}\, V$, $1 \le i \le k$, $1 \le j \le r$. Тогда семейство подмножеств $\{S_{ij}: S_{ij} = S_i \cap S_j, 1 \le i \le k, 1 \le j \le r\}$ также образует разбиение отрезка $T$. Далее, положим $y_{ij} := y_i - y_j$. Так как $y(t) \cdot\!=\!\cdot\, y_i(t) \cdot\!=\!\cdot\, y_j(t)$ в $T$, то $y_{ij}(t) \cdot\!=\!\cdot\, 0$ на каждом $S_{ij}$, поэтому в силу (9) $\|M^\#(y_{ij})(t)\|_X \cdot\!\le\!\cdot\, \varphi(t)\|y_{ij}(t)\|_U \cdot\!=\!\cdot\, 0$ при $t \in S_{ij}$ и, таким образом, $M^\#(y_{ij})(t) \cdot\!=\!\cdot\, 0$ в $S_{ij}$. Следовательно, $M^\#(y_i)(t) \cdot\!=\!\cdot\, M^\#(y_j)(t)$, $t \in S_{ij}$. Но в этом случае, обозначив через $z'(t) := \sum_{1 \le i \le k} P_{S_i, \mathrm{L}} \circ M^\#(y_i)$ и $z''(t) := \sum_{1 \le j \le r} P_{S_j, \mathrm{L}} \circ M^\#(y_j)$, для этих функций получаем цепь равенств $z'(t) = M^\#(y_i)(t) \cdot\!=\!\cdot\, M^\#(y_j)(t) = z''(t)$, $t \in S_{ij}$. Учитывая, что система подмножеств $\{S_{ij}\}_{1 \le i \le k, 1 \le j \le r}$ образует дизъюнктное разбиение интервала $T$, приходим к заключению, что имеет место соответствие $z'(t) \cdot\!=\!\cdot\, z''(t)$ для точек из $T$, и значит линейный оператор $M^*$ определен корректно.

Для доказательства непрерывности отображения $M^*$, очевидно, достаточно проверить, что для $M^*$ справедливо соотношение (9) (в этом случае непрерывность оператора $M^*$ следует из интегрального неравенства Гельдера). Пусть (как и прежде) $y = \sum_{1 \le i \le k} P_{S_i, H}(y_i)$, $y_i \in \mathrm{Span}\, V$, где $\{S_i\}_{i = 1, ..., k}$ — разбиение отрезка $T$. Тогда из $M^*(y) = \sum_{1 \le i \le k} P_{S_i, \mathrm{L}} \circ M^\#(y_i)$ следует, что $M^*(y)(t) = M^\#(y_i)(t)$, $t \in S_i$, откуда в силу (9) для $y_i$ будет $\|M^*(y)(t)\|_X = \|M^\#(y_i)(t)\|_X \le \varphi(t)\|y_i(t)\|_U \le \varphi(t)\|y(t)\|_U$ μ-почти всюду в $S_i$, а значит и для μ-почти всех точек интервала $T$. Для завершения доказательства остается подтвердить для оператора $M^*$ свойство (8).

Пусть $y \in E$, $y = \sum_{1 \le i \le k} P_{S_i, H}(y_i)$, $y_i \in \mathrm{Span}\, V$, $S_i \cap S_j = \varnothing$, $i \ne j$, $\bigcup_{1 \le i \le k} S_i = T$, $i, j = 1, ..., k$ и $S \subset T$. Тогда $P_{S, H}(y) = \sum_{1 \le i \le k} P_{S, H} \circ P_{S_i, H}(y_i) = \sum_{1 \le i \le k} P_{S \cap S_i, H}(y_i)$, откуда в силу конструкции оператора $M^*$, введенной выше,

$$M^* \circ P_{S, H}(y) = \sum_{1 \le i \le k} P_{S \cap S_i, \mathrm{L}} \circ M^\#(y_i) =$$
$$= \sum_{1 \le i \le k} P_{S, L} \circ P_{S_i, \mathrm{L}} \circ M^\#(y_i) =$$
$$= P_{S, \mathrm{L}} \circ \sum_{1 \le i \le k} P_{S_i, \mathrm{L}} \circ M^\#(y_i) = P_{S, \mathrm{L}} \circ M^*(y). \ \blacklozenge$$

Пусть $V \subset H_2$. Линейному оператору $M^\#$: $\mathrm{Span}\, V \to \mathrm{L}_1(T, \mu, X)$ из формулировки предложения 3 сопоставим[2] нелинейный оператор Φ: $\mathrm{Span}\, V \to \mathrm{L}(T, \mu, R)$ вида

$$\Phi(g, w, q)(t) :=$$
$$:= \begin{cases} \|M^\#(y)(t)\|_X / \|y(t)\|_U, & \text{если } \|y(t)\|_U \ne 0; \\ 0, & \text{если } \|y(t)\|_U = 0. \end{cases}$$

Далее в геометрии поглощающего множества следуем [14, *с. 42*]: множество $Q$ в векторном пространстве $L$ является *поглощающим*, если для любого $y \in L$ можно указать такое $\alpha \in (0, \infty)$, что $\alpha y \in Q$; если $L$ — нормированное пространство, то не только каждая ограниченная окрестность нуля (п. (а) теоремы 1.15 [19, *с. 19*]), но и ее граница с нулем — поглощающее множество. Через $\mathrm{supp}\phi := \{t \in T: \phi(t) \cdot\!\ne\!\cdot\, 0\}$ обозначим носитель функции $\phi \in \mathrm{L}(T, \mu, R)$; в такой постановке каждый носитель определяется с точностью до множества меры нуль.

**Следствие 4.** *Пусть* $V \subset H_2$, $M^\#$: $\mathrm{Span}\, V \to \mathrm{L}_1(T, \mu, X)$ *— линейный оператор и* $Q$ *— некоторое поглощающее множество в* $\mathrm{Span}\, V$. *Тогда* $M_2$*-продолжимость оператора* $M^\#$ *эквивалентна совместному выполнению условий:*

$$\mathrm{supp}\|M^\#(y)\|_X \cdot\!\subset\!\cdot\, \mathrm{supp}\|(y)\|_U, \quad \forall y \in Q;$$
$$\exists \varphi \in \mathrm{L}_2(T, \mu, R): \Phi(y)(t) \cdot\!\le\!\cdot\, \varphi(t), \quad \forall y \in Q.$$

**Замечание 4.** В контексте использования оператора Релея—Ритца первое условие конструктивно: пусть $M^\#(y) := dg/dt$, $y := (g, w, q) \in AC(T, X) \times \mathrm{L}_2(T, \mu, Y) \times \mathrm{L}_2(T, \mu, Z)$, тогда $\mathrm{supp}\|dg/dt\|_X \cdot\!\subset\!\cdot\, \mathrm{supp}\|(g, w, q)\|_U$ — прямое следствие (7).

## 4. РАЗРЕШИМОСТЬ КВАЗИЛИНЕЙНОЙ РЕАЛИЗАЦИИ ДЛЯ ПУЧКА ПРОЦЕССОВ В ПОСТАНОВКЕ Card $N \le \infty$

Следствие 4 и замечание 4 наводят на мысль, что метод оператора Релея—Ритца может быть продуктивным в анализе существования реализаций как нестационарных, так и автономных $(A, B, B^\#)_2$-моделей в обстоятельствах Card $N \le \infty$; поэтому сейчас подробно исследуем соответствующее построение.

Начнем с небольшого уточнения порядковых свойств пространства $\mathrm{L}(T, \mu, R)$. Пусть $\le_{\mathrm{L}}$ — квазиупорядочение в $\mathrm{L}(T, \mu, R)$ такое, что $\phi_1 \le_{\mathrm{L}} \phi_2$ для $\phi_1, \phi_2 \in \mathrm{L}(T, \mu, R)$ тогда и только тогда, когда

[2] Часто бывает полезно охарактеризовать сложный объект, определяемый многими переменными и параметрами, с помощью скалярной функции. Оператор Φ — пример такого рода. Без особой натяжки его можно назвать *обобщенным оператором Релея—Ритца*; в его конструкции нетрудно угадать, как прототип, оператор (6).

$\phi_1(t) \cdot\le\cdot \phi_2(t)$. Наименьшую верхнюю грань функционального подмножества $F \subset \mathrm{L}(T, \mu, R)$ обозначим $\sup_{\mathrm{L}} F$, если эта грань существует для $F$ в структуре квазиупорядочения $\le_{\mathrm{L}}$.

Следующая теорема опирается на следствие 4, находясь в тесной связи с замечанием 4, так как использует представление оператора $M^{\#}$ в виде $M^{\#}(g, w, q) = dg/dt$, $(g, w, q) \in \mathrm{Span}\ N$, $N \subset \Pi_{u^{\#}}$; доказательство теоремы не приводим, оно — прямая компиляция отмеченных только что положений и теоремы 2 [13].

**Теорема 2.** *Пусть* $N \subset \Pi_{u^{\#}}$, *$Q$ — некоторое поглощающее множество в* Span $N$ *и* $\Psi$ — *оператор Релея—Ритца. Тогда задача реализации разрешима в постановке*

$$\exists\ (A, B, B^{\#}) \in \mathbf{L}_2\text{: } dx/dt = Ax + Bu + B^{\#}u^{\#}(x),$$
$$\forall (x, u, u^{\#}(x)) \in N,$$

*в том и только в том случае, если имеет место одно (любое) из условий*

$$\exists\ \varphi \in \mathrm{L}_2(T, \mu, R)\text{: } \Psi(g, w, q) \le_{\mathrm{L}} \varphi,\ \forall (g, w, q) \in Q;$$
$$\exists \sup\nolimits_{\mathrm{L}}\Psi(Q)\ \&\ \exists\ \varphi \in \mathrm{L}_2(T, \mu, R)\text{: } \sup\nolimits_{\mathrm{L}}\Psi(Q) \le_{\mathrm{L}} \varphi.$$

**Замечание 5.** Существует — см. п. *б*) теоремы 17 [23, *с. 68*] — счетное подмножество $Q^* \subset Q$, такое, что для второго условия теоремы 2 функцию $\phi := \sup_{\mathrm{L}}\Psi(Q)$ определяет следующая sup-конструкция

$$t \mapsto \phi(t) = \sup\{\Psi(g, w, q)(t) \in R\text{: } (g, w, q) \in Q^*\}.$$

Заметим, что даже $1 < \mathrm{Card}\ N < \infty$ влечет Card $Q$ — мощность континуума; это положение отличает теорему 1 (когда Card $N = 1$) от теорем 2—4 и дополнительно мотивирует задачу инвариантного расширения реализации из [13]. ♦

Модель $(A, B, B^{\#}) \in \mathbf{L}_2$ из теоремы 2 не обязана быть автономной, поэтому ниже соединим представление функции $\varphi$ с поиском ответа на вопрос: какой вид имеет верхняя оценка $\sup_{\mathrm{L}}\Psi(Q)$, если $(A, B, B^{\#})_2$-модель в реализации $N$ автономная?

Представление функции $\varphi$, связанное с ответом на поставленный вопрос, едва ли не очевидно из свойства *б*) в формулировке теоремы 1.

**Теорема 3.** *Пусть* $N \subset \Pi_u\#$ — *поведение D-системы, $Q$ — поглощающее множество в* Span $N$, $\Psi$ — *оператор Релея—Ритца и* $\chi_T$ — *характеристическая функция интервала $T$. Тогда задача дифференциальной реализации в постановке*

$$\exists\ (A, B, B^{\#}) \in L(X, X) \times L(Y, X) \times L(Z, X)\text{:}$$
$$dx/dt = Ax + Bu + B^{\#}u^{\#}(x),\ \forall (x, u, u^{\#}(x)) \in N$$

*имеет решение только в том случае, если отыщется такое число* $c > 0$, *что*

$$\Psi(g, w, q) \le_{\mathrm{L}} c\chi_T,\ \forall (g, w, q) \in Q.$$

Доказательство. Если $(A, B, B^{\#})$ — некоторая автономная $(A, B, B^{\#})_2$-модель, для которой $K$-решения уравнения (1) содержат семейство процессов $N$, то

$$dg(t)/dt \cdot=\cdot Ag(t) + Bw(t) + B^{\#}q(t),\ \forall (g, w, q) \in Q \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \|dg(t)/dt\|_X \cdot\le\cdot \|A\|_{L(X, X)}\|g(t)\|_X + \|B\|_{L(Y, X)}\|w(t)\|_Y +$$
$$+ \|B^{\#}\|_{L(Z, X)}\|q(t)\|_Z,\ \forall (g, w, q) \in Q \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \Psi(g, w, q)(t) \cdot\le\cdot (\|A\|^2_{L(X, X)} + \|B\|^2_{L(Y, X)} +$$
$$+ \|B^{\#}\|^2_{L(Z, X)})^{1/2} =: c \in (0, \infty),\quad \forall (g, w, q) \in Q.\ ♦$$

Теорема 3 не имеет обращения и таким образом дает паллиативное решение задачи реализации в классе уравнений (1). Поэтому выясним, какие требуется внести коррективы с целью полной разрешимости данной задачи реализации.

Следуя утверждению леммы 3, минимальное линейное многообразие $E_N$, содержащее $N$ и инвариантное относительно семейства проекторов $\{P_{S, H}\text{: } S \in \wp_\mu\}$, имеет представление $E_N := \mathrm{Span}\{P_{S, H}(y)\text{: } S \in \wp_\mu,\ y \in \mathrm{Span}\ N\}$; удобное совпадение: замыкание $[E_N]$ множества $E_N$ в $H_2$ линейно (пункт (c) теоремы 1.13 [19, *с. 18*]) и инвариантно относительно проекторов из $\{P_{S, H}\text{: } S \in \wp_\mu\}$. Далее, пусть $\omega_N := J|E_N$, $\varpi_N := J|[E_N]$, $D_N := \mathrm{Im}\ \varpi_N$ (образ оператора $\varpi_N$). Следующая лемма обобщает лемму 2 и следствие 1 (доказательство аналогично выводу леммы 2).

**Лемма 4.** *$D_N$ — множество второй категории в себе (с топологией, индуцированной из $U$). Оператор* $\varpi_N\text{: } [E_N] \to D_N$ — *открытое отображение.* ♦

Разберем теперь, как действует сужение $\xi_2$-модели $\xi_N\text{: } E_N \to X$ в предположении, что $\xi_2$-модель существует в контексте общего решения задачи реализации семейства $N \subset \Pi_{u^{\#}}$ (термин «общего» означает, что $(A, B, B^{\#})_2$-модель реализации не обязана быть автономной). С этой целью введем в рассмотрение линейный оператор $\zeta_N\text{: } E_N \to X$, являющийся алгебраическим расширением с $\{P_{S, H}(y)\text{: } S \in \wp_\mu,\ y \in \mathrm{Span}\ N\}$ на $E_N \subset H_2$ оператора, осуществляющего $P_{S, H}(y) \mapsto \int_S (dg(\tau)/d\tau)\mu(d\tau)$, где $y = (g, w, q) \in \mathrm{Span}\ N$, $S \in \wp_\mu$. В общем случае не факт, что оператор $\zeta_N$ является непрерывным[3], более того, непрерывность $\zeta_N$ — эквивалент существования $\xi_N$, поскольку в этом случае формула (8) — это эквивалент равенства $\zeta_N(y) = \xi_N(y)$, $y \in E_N$ (следствие свойства (3) [14, *с. 32*]). Теперь самое

[3] Подчеркнем, что топологическая структура линейного многообразия $E_N$ индуцирована из $H_2$.

время подвести итог: оператор $\zeta_N$ непрерывен всякий раз, когда предъявленное семейство процессов $N$ таково, что существует интегральный оператор $\xi_N$. В такой постановке через $\eta_N$ обозначим линейное непрерывное распространение $\zeta_N$ на $[E_N]$ (теорема 8.4.1 [21, *с. 211*]). Следующая теорема перекрывает теоремы 1, 3; конструкции $Q$ и $\Psi$ прежние.

**Теорема 4.** *Семейство процессов* $N \subset \Pi_{u^\#}$ *характеризуется K-решениями некоторого уравнения* (1) *в том и только в том случае, если*

$$\mathrm{Ker}\ \omega_N \subset \mathrm{Ker}\ \zeta_N$$

*и, кроме того, найдется такое вещественное* $c > 0$, *что справедливо условие а*):

$$\Psi(g,\ w,\ q) \le_{\mathrm{L}} c\chi_T,\ \forall (g,\ w,\ q) \in Q,$$

*или, что равносильно, условие б*):

$$\nu\_(S) \le c(\mu(S))^{1/2}(\nu(S))^{1/2},$$

$$\nu(S) := \int_S (\|g(\tau)\|_X^2 + \|w(\tau)\|_Y^2 + \|q(\tau)\|_Z^2)\mu(d\tau),$$

$$\nu\_(S) := \int_S \|dg(\tau)/d\tau\|_X\,\mu(d\tau),$$

$$\forall S \in \wp_\mu,\ \forall (g,\ w,\ q) \in Q.$$

*При этом дифференциальная реализация* (1) *динамических процессов N будет единственной тогда и только тогда, когда* $\mathrm{Im}\ \varpi_N = U$.

**Замечание 6.** Каждое из свойств *а*) или *б*) в действительности эквивалентно существованию квазилинейной (возможно нестационарной) реализации семейства процессов $N$, и для каждого из них есть различные методологические основания именно его принять за аналитическую основу в зависимости от контекста решаемой задачи моделирования. При этом необходимо оговориться, что теорема 4 не сводится к «механическому» расширению теоремы 3 по той простой причине, что автономность «в чистом виде», т. е. без свойства ограниченности операторов $A$, $B$, $B^\#$ в структуре $(A, B, B^\#)$-модели дифференциальной реализации (1), характеризует вложение $\mathrm{Ker}\ \omega_N \subset \mathrm{Ker}\ \zeta_N$, тогда как свойство *а*) (равносильно *б*)) характеризует признак ограниченности данных операторов; в силу этого положения в конечномерных $D$-системах позиции *а*) и *б*) можно опустить.

Доказательство теоремы 4. Не будет преувеличением сказать, что доказательством уже по существу располагаем; его наиболее прозрачный способ доставляет прямая (и от того вполне рутинная) модификация вывода теоремы 1 с заменой в выкладках множества $D$ на $D_N$, а подпространства $\Omega$ на $[E_N]$, соответственно, оператора $\varkappa$ на $\varpi_N$, а $\zeta$ на $\eta_N$. Все возможные затруднения при трансформировании вывода теоремы 1 к доказательству теоремы 4 снимаются, как только замечаем, что, во-первых, осуществляется *а*) $\Leftrightarrow$ *б*) (см. начало доказательства теоремы 1), во-вторых, установление теоремы 4 сводится, ступая почти «след в след» выводу теоремы 1, к подтверждению коммутативности диаграммы (с учетом поправок из доказательства идентичной теоремы 1), представленной на рис. 3.

$$\begin{array}{ccccccc}
\mathrm{Ker}\ \varpi_N & \xrightarrow{\mathrm{id}_{\mathrm{Ker}\ \varpi N}} & [E_N] & \xrightarrow{\varpi_N} & D_N & \xrightarrow{\mathrm{id}_{DN}} & U \\
\cap & & \| & & \downarrow C & & \downarrow (A, B, B^\#) \\
\mathrm{Ker}\ \eta_N & \xrightarrow{\mathrm{id}_{\mathrm{Ker}\ \eta N}} & [E_N] & \xrightarrow{\eta_N} & X & \xrightarrow{\mathrm{id}_X} & X
\end{array}$$

**Рис. 3. Диаграмма (к доказательству теоремы 4)**

Таким образом, все, что нам нужно — это установить эквивалентность двух включений (вызванных переходом от многообразия $E_N$ к его замыканию $[E_N]$):

$$\mathrm{Ker}\ \omega_N \subset \mathrm{Ker}\ \zeta_N \Leftrightarrow \mathrm{Ker}\ \varpi_N \subset \mathrm{Ker}\ \eta_N.$$

С учетом сделанных ранее построений $\mathrm{Ker}\ \varpi_N \subset \mathrm{Ker}\ \eta_N \Rightarrow \mathrm{Ker}\ \omega_N \subset \mathrm{Ker}\ \zeta_N$ — результат положения, что операторы $\varpi_N$ и $\eta_N$ суть линейные расширения $\omega_N$ и $\zeta_N$. Наоборот, $\mathrm{Ker}\ \omega_N \subset \mathrm{Ker}\ \zeta_N \Rightarrow \mathrm{Ker}\ \varpi_N \subset \mathrm{Ker}\ \eta_N$ — прямое следствие непрерывности отображений $\omega_N$ и $\zeta_N$ (для $\zeta_N$ это следствие выполнение условия *а*) или *б*)). ♦

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В истории естествознания проблемы «оптимизации адекватности» математических моделей, описывающих наблюдаемые физические процессы, всегда были центральными[4]. В этом контексте любая область науки, связанная с математическим моделированием, старается выработать соответствующий аналитический аппарат, в частности, концепция адаптивного управления [1, *с. 64*] привела к постановкам реализации/идентификации систем, в которых первым шагом исследования является задача *существования* апостериорной математической модели исследуемого объекта в заданном классе уравнений [1, *с. 356*]. Поэтому в работе не ставились вопросы построения конкретных процедур дифференциальной реализации; важность данных вопросов не подвергается сомнению, так, например, в работе [10] специализированы результаты структурно-параметрической идентификации на случай нелинейного позиционного управления при неполном измерении вектора состояния, в работе [5] — на случай идентификации части спектра эллиптического оператора волнового динамического процесса нормально-гиперболического типа.

Изложенные в статье идеи можно развить в нескольких направлениях теоретических изысканий

[4] Достаточно упомянуть «Альмагест» Птолемея и законы Кеплера.

по качественному анализу вопросов существования дифференциальных реализаций непрерывных квазилинейных систем:

— системы с неограниченным интервалом времени $T$ [24];

— гиперболические системы [20, *с. 456*] (эта задача естественно появляется в связи со многими вопросами прикладной теории реализации [5, 22]);

— $M_p$-продолжимость и дифференциальные системы с $(A, B, B^{\#})_p$-моделями из $\mathbf{L}_p$, $p \in (1, \infty)$, включая квазилинейные системы с запаздываниями $\tau_1, \tau_2, ..., \tau_k$ при представлении в уравнении (1) соответствующего закона $u^{\#}(x(t - \tau_1), x(t - \tau_2), ..., x(t - \tau_k))$;

— квазилинейные дифференциальные включения [25] в банаховом пространстве $X$, когда $u^{\#}(x(t)) \subset Z$ или $u^{\#}(t, x(t)) \subset Z$ — непустые, не обязательно выпуклые, компактные множества при каждых $(t, x(t)) \in T \times X$;

— парадигмы апостериорного математического моделирования (структурно-параметрической идентификации) нелинейных позиционных законов $u^{\#}(x)$ в контексте выполнения теорем 2 и 4 с приложением к задачам восстановления внутренних источников/стоков эллиптико-псевдопараболических систем [26] на базе их нелинейной дифференциальной аппроксимации [27, *с. 392*].

## ЛИТЕРАТУРА


1. *Калман Р.*, *Фалб П.*, *Арбиб М.* Очерки по математической теории систем. — М.: Мир, 1971. — 400 с.
2. *Polderman J.W.*, *Willems J.C.* Introduction to mathematical systems theory: A behavioral approach. — N.-Y.: Springer-Verlag, 1998. — 424 p.
3. *Данеев А.В.*, *Русанов В.А.* Об одной теореме существования сильной модели // Автоматика и телемеханика. — 1995. — № 8. — С. 64—73.
4. *Данеев А.В.*, *Русанов В.А.* Геометрические характеристики свойств существования конечномерных ($A$, $B$)-моделей в задачах структурно-параметрической идентификации // Там же. — 1999. — № 1. — С. 3—8.
5. *Данеев А.В.*, *Русанов В.А.*, *Русанов М.В.* От реализации Калмана—Месаровича к линейной модели нормально-гиперболического типа // Кибернетика и системный анализ. — 2005. — № 6. — С. 137—157.
6. *Данеев А.В.*, *Русанов В.А.*, *Шарпинский Д.Ю.* Принцип максимума энтропии в структурной идентификации динамических систем. Аналитический подход // Изв. вузов. Математика. — 2005. — № 11. — С. 16—24.
7. *Данеев А.В.*, *Лакеев А.В.*, *Русанов В.А.* К теории реализации сильных дифференциальных моделей. II // Сибирский журнал индустриальной математики. — 2005. — Т. VIII, № 2. — С. 46—56.
8. *Русанов В.А.*, *Козырев В.А.*, *Шарпинский Д.Ю.* К теории реализации квазилинейных систем, описываемых дифференциальными уравнениями в гильбертовом пространстве // Кибернетика и системный анализ. — 2008. — № 5. — С. 82—95.
9. *Русанов В.А.* К качественной теории реализации квазилинейных систем в гильбертовом пространстве // Доклады РАН. — 2008. — Т. 421, № 3. — С. 326—328.
10. *Русанов В.А.*, *Шарпинский Д.Ю.* К теории структурной идентификации нелинейных многомерных систем // Прикладная математика и механика. — 2010. — Т. 74, вып. 1. — С. 119—132.
11. *Heij C.*, *Ran A.C.M.*, *van Schagen F.* Introduction to Mathematical Systems Theory: Linear Systems, Identification and Control. — Berlin: Springer-Verlag, 2006. — 166 p.
12. *Van der Schaft A.J.* On realization of nonlinear systems described by higher-order differential equations // Mathematical Systems Theory. — 1987. — Vol. 19, N 3. — P. 239—275. См. русс. перевод: *Ван дер Шафт А.* К теории реализации нелинейных систем, описываемых дифференциальными уравнениями высшего порядка // Теория систем. Математические методы и моделирование / Под ред. А.Н. Колмогорова, С.П. Новикова. — М.: Мир, 1989. — С. 192—237.
13. *Русанов В.А.*, *Антонова Л.В.*, *Данеев В.А.* К обратным задачам нелинейного системного анализа. Бихевиористический подход // Проблемы управления. — 2011. — № 5. — С. 14—21.
14. *Иосида К.* Функциональный анализ. — М.: Мир, 1967. — 624 с.
15. *Массера Х.Л.*, *Шеффер Х.Х.* Линейные дифференциальные уравнения и функциональные пространства. — М.: Мир, 1970. — 456 с.
16. *Данеев А.В.*, *Русанов В.А.* Геометрический подход к решению некоторых обратных задач системного анализа // Изв. вузов. Математика. — 2001. — № 10. — С. 18—28.
17. *Месарович М.*, *Такахара Я.* Общая теория систем: математические основы. — М.: Мир, 1978. — 312 с.
18. *Келли Дж.* Общая топология. — М.: Наука, 1981. — 432 с.
19. *Рудин У.* Функциональный анализ. — М.: Мир, 1975. — 448 с.
20. *Красносельский М.А.*, *Забрейко П.П.*, *Пустыльник Е.И.*, *Соболевский П.Е.* Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций. — М.: Наука, 1966. — 500 с.
21. *Вулих Б.З.* Введение в функциональный анализ. — М.: Наука, 1967. — 416 с.
22. *Русанов В.А.*, *Шарпинский Д.Ю.*, *Козырев В.А.* Инструментальный программный комплекс разработки и моделирования алгоритмов идентификации дифференциальных уравнений динамики больших стержневых систем // Приборы и системы. Управление, контроль, диагностика. — 2010. — № 9. — С. 13—17.
23. *Канторович Л.В.*, *Акилов Г.П.* Функциональный анализ. — М.: Наука, 1977. — 742 с.
24. *Колмогоров А.Н.* Кривые в гильбертовом пространстве, инвариантные по отношению к однопараметрической группе движений / А.Н. Колмогоров. Избр. тр.: т. 1. Математика и механика. — М.: Наука, 2005. — С. 296—300.
25. *Толстоногов А.А.* Дифференциальные включения в банаховом пространстве. — Новосибирск: Наука, 1986. — 296 с.
26. *Сергиенко И.В.*, *Дейнека В.С.* Идентификация параметров эллиптико-псевдопараболических распределенных систем // Кибернетика и системный анализ. — 2011. — № 4. — С. 28—50.
27. *Эйкхофф П.* Основы идентификации систем управления. — М.: Мир, 1975. — 687 с.


*Статья представлена к публикации членом редколлегии академиком РАН С.Н. Васильевым.*

**Анатолий Валентинович Лакеев** — д-р физ.-мат. наук,
вед. науч. сотрудник, Институт динамики систем
и теории управления СО РАН, г. Иркутск,
☎ (3952) 45-30-21, ✉ lakeyev@icc.ru,

**Вячеслав Анатольевич Русанов** — д-р физ.-мат. наук,
гл. науч. сотрудник, Институт динамики систем
и теории управления СО РАН, г. Иркутск,
☎ (3952) 36-50-93, ✉ V.Rusanov@mail.ru,

**Владимир Александрович Козырев** — аспирант,
Иркутский государственный университет путей сообщения.