

ВЕРХНИЕ ОЦЕНКИ ОТКЛОНЕНИЙ ТРАЕКТОРИЙ В ЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ С ОГРАНИЧЕННЫМИ ВНЕШНИМИ ВОЗМУЩЕНИЯМИ¹

Я.И. Квинто, М.В. Хлебников

Аннотация. Исследован практически важный эффект всплеска в линейных динамических системах при ненулевых начальных условиях. Рассмотрена линейная динамическая система, подверженная воздействию произвольных ограниченных внешних возмущений. На основе техники линейных матричных неравенств и концепции инвариантных эллипсоидов установлены оценки максимального отклонения траекторий и предложен подход к синтезу обратной связи, минимизирующей отклонение. Эффективность рассмотренного подхода продемонстрирована на численных примерах. Результаты численного моделирования показали низкую степень консерватизма полученных оценок.

Ключевые слова: линейная динамическая система, отклонения траекторий, ограниченные внешние возмущения, линейные матричные неравенства, инвариантный эллипсоид.

ВВЕДЕНИЕ

Статья продолжает серию работ, посвященных исследованию эффекта больших отклонений в линейных динамических системах. Так, в работе [1] был исследован эффект больших отклонений для линейных систем без неопределенностей и получены верхние оценки отклонений. В работах [2, 3] с помощью техники линейных матричных неравенств и концепции инвариантных эллипсоидов [4–6] были получены оценки отклонений для линейных систем в непрерывном и дискретном времени, содержащих структурированную матричную неопределенность. При этом техника линейных матричных неравенств оказалась весьма эффективным инструментом, позволяющим синтезировать управление, минимизирующее размер отклонения траекторий, а получаемые оценки отклонений обладают низкой степенью консерватизма.

В настоящей работе рассматривается линейная динамическая система, подверженная воздействию произвольных ограниченных внешних возмущений. Для нее установлены оценки максимального отклонения траекторий (§ 1) и предложен

подход к синтезу обратной связи, минимизирующей размер отклонения (§ 2). В § 3 и 4 эффективность рассматриваемого подхода демонстрируется численными примерами.

Идейно близкая задача о подавлении внешних возмущений с помощью метода инвариантных эллипсоидов и техники линейных матричных неравенств рассматривалась в работах [7–9]. Отметим, что в данной работе все матричные неравенства понимаются в смысле знакоопределенности матриц.

1. ЗАДАЧА АНАЛИЗА

Рассмотрим линейную непрерывную динамическую систему

$$\dot{x} = Ax + Dw, \quad x(0) = x_0, \quad (1)$$

где $A \in R^{n \times n}$ и $D \in R^{n \times m}$ — заданные матрицы, матрица A устойчива (гурвицева), пара (A, D) управляема; $x(t) \in R^n$ — фазовое состояние, $w(t) \in R^m$ — внешнее возмущение, ограниченное в каждый момент времени:

$$|w(t)| \leq 1 \text{ для всех } t \geq 0, \quad (2)$$

где $|\cdot|$ — евклидова норма. Никаких иных ограничений на возмущение $w(t)$ не налагается: оно не предполагается ни случайным, ни гармоническим.

¹ Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (проект № 18-08-00140).



Напомним [1], что для непрерывной линейной динамической системы максимальное отклонение траектории от нуля в переходном режиме дается выражением

$$\xi \doteq \max_{t \geq 0} \frac{|x(t)|}{|x(0)|}. \quad (3)$$

Рассмотрим семейство эллипсоидов

$$E_p = \{x \in R^n: x^T P^{-1} x \leq 0\}$$

с матрицами $P > 0$, удовлетворяющими линейному матричному неравенству

$$AP + PA^T + \alpha P + \frac{1}{\alpha} DD^T \leq 0 \quad (4)$$

при некотором значении параметра $\alpha > 0$.

Согласно работе [5], если начальное условие $x(0)$ лежит в эллипсоиде E_p , то траектория системы (1) будет оставаться в этом эллипсоиде для всех моментов времени при всех допустимых внешних возмущениях (2). Эллипсоид E_p называется *инвариантным эллипсоидом* для системы (1), (2).

Заметим, что по лемме Шура матричное неравенство (4) представимо в эквивалентном виде

$$\begin{pmatrix} AP + PA^T + \alpha P & D \\ D^T & -\alpha I \end{pmatrix} \leq 0. \quad (5)$$

Рассмотрим задачу $\min \|P\|_2$ при ограничениях

(5) и $P > 0$. Ее решение \hat{P} определяет минимальный инвариантный эллипсоид $E_{\hat{P}}$, содержащий множество достижимости системы (1), (2). Поэтому, если начальное условие $x(0)$ принадлежит этому эллипсоиду, мы получаем простую оценку максимального отклонения траектории системы от нуля:

$$|x(t)| \leq \lambda_{\max}(P) = \sqrt{\|\hat{P}\|_2}.$$

Итак, приходим к следующему утверждению.

Лемма 1. Пусть \hat{P} — решение задачи выпуклой оптимизации $\min \|P\|_2$ при ограничениях

$$\begin{pmatrix} AP + PA^T + \alpha P & D \\ D^T & -\alpha I \end{pmatrix} \leq 0, \\ P > 0,$$

где оптимизация проводится по матричной переменной $P = P^T \in R^{n \times n}$ и параметру $\alpha > 0$.

Тогда для решений системы (1) с начальным условием $x_0 \in E_{\hat{P}}$ справедлива оценка отклонения

$$\hat{\xi} \leq \sqrt{\|\hat{P}\|_2}$$

при всех допустимых внешних возмущениях (2). ♦

Полученный результат легко обобщается на случай произвольных начальных условий. В частности, рассмотрим траектории системы (1), (2) с начальными условиями на границе единичного шара

$$B = \{x \in R^n: |x| \leq 1\}.$$

Из выражения (3) следует, что

$$\xi = \max_{t \geq 0} \max_{|x(0)|=1} |x(t)|,$$

поэтому для получения оценки $\hat{\xi}$ максимального отклонения будем искать инвариантный эллипсоид, удовлетворяющий дополнительному условию $B \subseteq E_p$. Это условие записывается в виде эквивалентного линейного матричного неравенства $P \geq I$; его выполнение гарантирует, что для любого начального условия из шара B траектория системы не покинет эллипсоид E_p , и в каждый момент времени будет верна оценка

$$|x(t)| \leq \sqrt{\|\hat{P}\|_2}.$$

Итак, получен следующий результат.

Лемма 2. Пусть \hat{P} — решение задачи выпуклой оптимизации $\min \|P\|_2$ при ограничениях

$$\begin{pmatrix} AP + PA^T + \alpha P & D \\ D^T & -\alpha I \end{pmatrix} \leq 0, \\ P \geq I,$$

где оптимизация проводится по матричной переменной $P = P^T \in R^{n \times n}$ и параметру $\alpha > 0$.

Тогда для решений системы (1) с начальными условиями $|x_0| \leq 1$ справедлива оценка отклонения

$$\hat{\xi} \leq \sqrt{\|\hat{P}\|_2}$$

при всех допустимых внешних возмущениях (2). ♦

Наконец, для построения инвариантного эллипсоида, содержащего заданную начальную точку $x_0 \neq 0$, необходимо потребовать выполнение условия $x_0^T P^{-1} x_0 \leq 1$, которое представимо в виде эквивалентного линейного матричного неравенства

$$\begin{pmatrix} 1 & x_0^T \\ x_0 & P \end{pmatrix} \geq 0.$$

Остается сформулировать соответствующее утверждение.

Лемма 3. Пусть \hat{P} — решение задачи выпуклой оптимизации $\min \|P\|_2$ при ограничениях

$$\begin{pmatrix} AP + PA^T + \alpha P & D \\ D^T & -\alpha I \end{pmatrix} \leq 0,$$

$$\begin{pmatrix} 1 & x_0^T \\ x_0 & P \end{pmatrix} \geq 0, \quad P > 0,$$

где оптимизация проводится по матричной переменной $P = P^T \in R^{n \times n}$ и параметру $\alpha > 0$.

Тогда для решений системы (1) с заданным начальным условием $x_0 \neq 0$ справедлива оценка отклонения

$$\hat{\xi} \leq \sqrt{\|\hat{P}\|_2}$$

при всех допустимых внешних возмущениях (2).

Замечание. Оптимизационные задачи, сформулированные в леммах 1–3, очевидным образом сводятся к решению задачи полуопределенного программирования (SDP) при фиксированном значении положительного параметра α ; при этом (см. работу [5]) получающиеся задачи оказываются выпуклыми по параметру α .

2. ЗАДАЧА СИНТЕЗА

Перейдем к задаче синтеза и рассмотрим систему управления

$$\dot{x} = Ax + Bu + Dw, \quad x(0) = x_0, \quad (6)$$

где $A \in R^{n \times n}$, $B \in R^{n \times m}$, $D \in R^{n \times m}$ — заданные матрицы, пара (A, B) управляема; $x(t) \in R^n$ — фазовое состояние, $u(t) \in R^m$ — управление, $w(t) \in R^m$ — внешнее возмущение, удовлетворяющее условию (2).

Будем искать стабилизирующую статическую линейную обратную связь по состоянию

$$u = Kx, \quad K \in R^{m \times n}, \quad (7)$$

минимизирующую отклонение траекторий замкнутой системы.

Система (6), замкнутая регулятором (7), имеет вид

$$\dot{x} = (A + BK)x + Dw.$$

Для получения оценки $\hat{\xi}$ максимального отклонения траекторий замкнутой системы (8) при

заданной начальной точке $x_0 \neq 0$ воспользуемся леммой 3 из § 2. При этом первое ограничение соответствующей оптимизационной задачи принимает вид

$$\begin{pmatrix} (A + BK)P + P(A + BK)^T & D \\ D^T & -\alpha I \end{pmatrix} \leq 0.$$

Введя вспомогательную матричную переменную $Y = KP$ и исключая K , сформулируем следующий результат.

Теорема 1. Пусть \hat{P} , \hat{Y} — решение задачи выпуклой оптимизации $\min \|P\|_2$ при ограничениях

$$\begin{pmatrix} AP + PA^T + BY + Y^T B^T + \alpha P & D \\ D^T & -\alpha I \end{pmatrix} \leq 0,$$

$$\begin{pmatrix} 1 & x_0^T \\ x_0 & P \end{pmatrix} \geq 0, \quad P > 0,$$

где оптимизация проводится по матричным переменным $P = P^T \in R^{n \times n}$, $Y \in R^{m \times n}$ и параметру $\alpha > 0$.

Тогда для решений системы (6), замкнутой регулятором $\hat{K} = \hat{Y}P^{-1}$, справедлива оценка отклонения

$$\hat{\xi} \leq \sqrt{\|\hat{P}\|_2}$$

при всех допустимых внешних возмущениях (2).

3. ПРИМЕР 1

Рассмотрим задачу о движении двойного пружинно-маятника в вязкой среде [5] (рис. 1).

Пусть x_1, v_1, m_1 — соответственно координата, скорость и масса левого тела, x_2, v_2, m_2 — правого тела, k_1, k_2 — коэффициенты жесткости левой и правой пружин, γ — коэффициент сопротивления среды. Обозначим вектор состояния

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}.$$

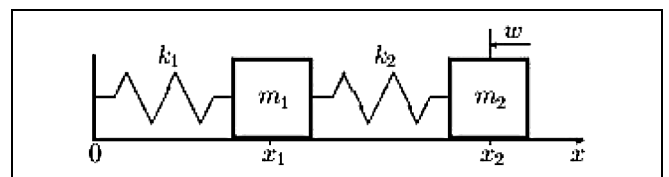


Рис. 1. Отклонения траекторий в системе из примера 1

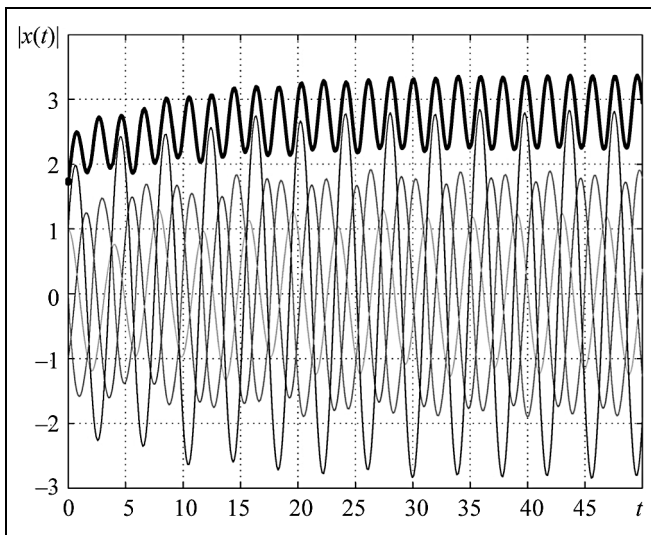


Рис. 2. Отклонения траекторий в системе из примера 1

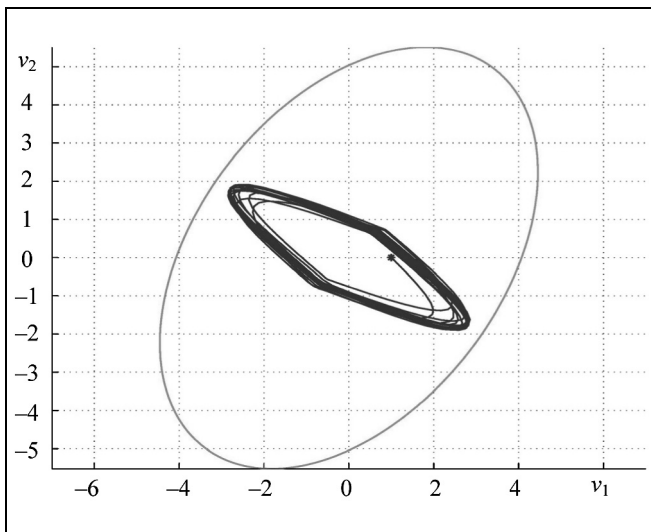


Рис. 3. Проекция инвариантного эллипсоида и траектории системы из примера 1

Полагая, что на правое тело действует ограниченное внешнее возмущение $|w| \leq 1$, приходим к устойчивой системе вида (1) с матрицами

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{k_1+k_2}{m_1} & \frac{k_2}{m_1} & -\gamma & 0 \\ \frac{k_2}{m_2} & -\frac{k_2}{m_2} & 0 & -\gamma \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{m_2} \end{pmatrix}.$$

Приняв значения

$$m_1 = m_2 = 1, \quad k_1 = k_2 = 1, \quad \gamma = 0,2,$$

воспользуемся леммой 3 при начальном условии

$$x_0 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

В качестве внешнего возмущения выберем так называемое «наихудшее» внешнее возмущение [7]

$$\tilde{w}(t) = \text{sign}(D^T P^{-1}x).$$

Решение соответствующей оптимизационной задачи дает матрицу

$$\hat{P} = \begin{pmatrix} 30,3772 & 40,7626 & -1,5189 & -4,0145 \\ 40,7626 & 71,5351 & -0,0617 & -3,5768 \\ -1,5189 & -0,0617 & 19,8400 & 9,9839 \\ -4,0145 & -3,5768 & 9,9839 & 30,4148 \end{pmatrix}$$

инвариантного эллипсоида и верхнюю оценку отклонения $\hat{\xi} = 9,8515$.

На рис. 2 показана динамика величины $|x(t)|$ (жирная сплошная линия), а также траектории фазовых координат (тонкие линии) системы при «наихудшем» внешнем возмущении. На рис. 3 на плоскости фазовых переменных (v_1, v_2) показана траектория системы, а также проекция соответствующего инвариантного эллипсоида.

4. ПРИМЕР 2

Рассмотрим систему вида (6) с матрицами

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{k_1+k_2}{m_1} & \frac{k_2}{m_1} & 0 & 0 \\ \frac{k_2}{m_2} & -\frac{k_2}{m_2} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{m_2} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Фактически, в системе из примера 1 мы положили $\gamma = 0$; при этом система стала неустойчивой. Будем стремиться стабилизировать ее с помощью линейной обратной связи (7) и при этом минимизировать размер всплеска.

Воспользовавшись теоремой 1, для прежней начальной точки x_0 получим матрицу

$$\hat{P} = \begin{pmatrix} 14,3139 & 1,7928 & -0,1646 & -23,6297 \\ 1,7928 & 23,6592 & 23,5884 & -0,2721 \\ -0,1646 & 23,5884 & 39,6395 & 0,8232 \\ -23,6297 & -0,2721 & 0,8232 & 43,3120 \end{pmatrix}$$

инвариантного эллипсоида, матрицу

$$\hat{K} = (-32,1438 \quad 6,8441 \quad -5,5424 \quad -18,3717)$$

регулятора и соответствующую верхнюю оценку отклонения траекторий замкнутой системы $\hat{\xi} = 7,5216$.

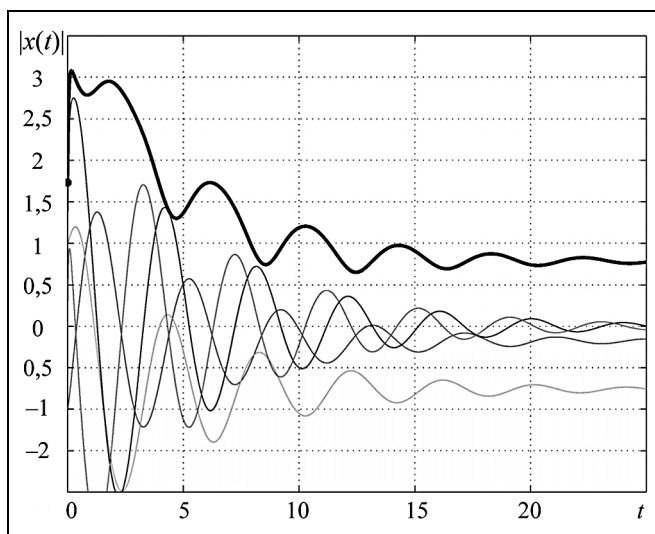


Рис. 4. Отклонения траекторий в замкнутой системе из примера 2

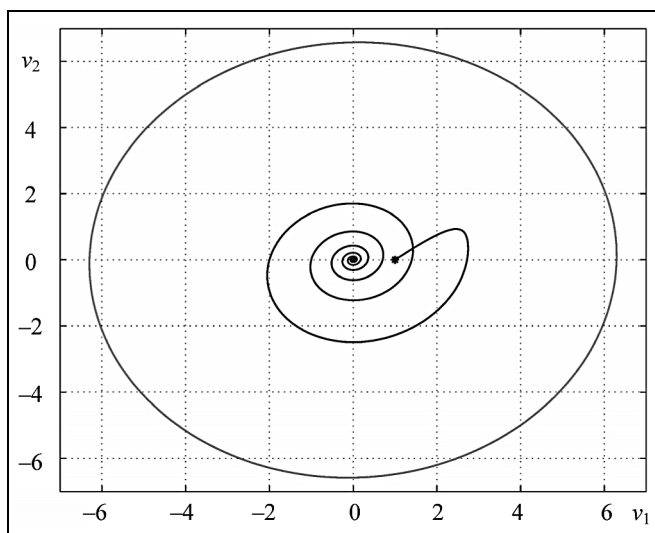


Рис. 5. Проекция инвариантного эллипсоида и траектории замкнутой системы из примера 2

На рис. 4 показана динамика величины $|x(t)|$ для замкнутой системы (жирная сплошная линия), а также траектории фазовых координат (тонкие линии) системы при «наихудшем» внешнем возмущении.

На рис. 5 на плоскости фазовых переменных (v_1, v_2) показана проекция траектории замкнутой системы, а также соответствующего инвариантного эллипсоида.

Численное моделирование проводилось в среде Matlab с помощью программного пакета *svx* [10].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В дальнейшем авторы планируют обобщить полученные результаты на задачи минимизации раз-

мера уклонений с помощью статической линейной обратной связи по выходу системы, а также на различные робастные постановки задач.

ЛИТЕРАТУРА

1. Поляк Б.Т., Тремба А.А., Хлебников М.В. и др. Большие отклонения в линейных системах при ненулевых начальных условиях // Автоматика и телемеханика. — 2015. — № 6. — С. 18—41. [Polyak, B.T., Tremba, A.A., Khlebnikov, M.V., et al. Large Deviations in Linear Control Systems with Nonzero Initial Conditions // Automation and Remote Control. — 2015. — Vol. 76, No. 6. — P. 957—976.]
2. Квинто Я.И., Хлебников М.В. Верхние оценки больших отклонений в линейных системах при наличии неопределенности // Проблемы управления. — 2018. — № 3. — С. 2—7. [Kvinto, Ya.I., Khlebnikov, M.V. Upper Estimate of Large Deviations in Linear Systems in Presence of Uncertainty // Control Sciences. — 2018. — No. 3. — P. 2—7. (In Russian)]
3. Квинто Я.И., Хлебников М.В. Верхние границы максимального отклонения траектории в линейных дискретных системах: робастная постановка // Управление большими системами. — 2019. — Вып. 77. — С. 59—79. [Kvinto, Ya. I., Khlebnikov, M.V. Upper Bounds of Large Deviations in Linear Discrete-Time Systems: The Robust Statement // Large-Scale Systems Control. — 2019. — Iss. 77. — P. 59—79. (In Russian)]
4. Баландин Д.В., Коган М.М. Синтез законов управления на основе линейных матричных неравенств. — М.: Физматлит, 2007. — 280 с. [Balandin, D.V., Kogan, M.M. Sintez zakonov upravleniya na osnove lineinykh matrichnykh neravenstv (LMI-based Control System Design). — Moscow: Fizmatlit, 2007. — 280 s. (In Russian)]
5. Поляк Б.Т., Хлебников М.В., Щербаков П.С. Управление линейными системами при внешних возмущениях: Техника линейных матричных неравенств. — М.: ЛЕНАНД, 2014. — 560 с. [Polyak, B.T., Khlebnikov, M.V., Shcherbakov, P.S. Control of Linear Systems Subjected to Exogenous Disturbances: An LMI Approach. — Moscow: LENAND, 2014. — 260 s. (In Russian)]
6. Boyd, S., El Ghaoui, L., Feron, E., Balakrishnan, V. Linear Matrix Inequalities in Systems and Control Theory. — Philadelphia: SIAM, 1994.
7. Назин С.А., Поляк Б.Т., Топунов М.В. Подавление ограниченных внешних возмущений с помощью метода инвариантных эллипсоидов // Автоматика и телемеханика. — 2007. — № 3. — С. 106—125. [Nazin, S.A., Polyak, B.T., Topunov, M.V. Rejection of Bounded Exogenous Disturbances by the Method of Invariant Ellipsoids // Automation and Remote Control. — 2007. — Vol. 68, No. 3. — P. 467—486.]
8. Поляк Б.Т., Топунов М.В., Щербаков П.С. Идеология инвариантных эллипсоидов в задаче о робастном подавлении ограниченных внешних возмущений // Стохастическая оптимизация в информатике. — 2007. — Т. 3, № 1-1. — С. 51—84. [Polyak, B.T., Topunov, M.V., Shcherbakov, P.S. The Invariant Ellipsoid Ideology in Robust Rejection of Exogenous Bounded Disturbances // Stochastic Optimization in Informatics. — 2007. — Vol. 3, No. 1-1. — P. 51—84. (In Russian)]
9. Хлебников М.В., Поляк Б.Т., Кунцевич В.М. Оптимизация линейных систем при ограниченных внешних возмущениях (техника инвариантных эллипсоидов) // Автоматика и телемеханика. — 2011. — № 11. — С. 9—59. [Khlebnikov, M.V., Polyak, B.T., Kuntsevich, V.M. Optimization of Linear Systems

Subject to Bounded Exogenous Disturbances: The Invariant Ellipsoid Technique // Automation and Remote Control. — 2011. — Vol. 72, No. 11. — P. 2227—2275.]

10. Grant, M., Boyd, S. CVX: Matlab Software for Disciplined Convex Programming, Version 2. 1. — URL: <http://cvxr.com/cvx/>.

Статья представлена к публикации членом редколлегии Л.П. Боровских.

Квинто Яна Игоревна — канд. техн. наук, ✉ yanakvinto@mail.ru,

Хлебников Михаил Владимирович — д-р физ.-мат. наук, ✉ khlebnik@ipu.ru,

Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, г. Москва.

Поступила в редакцию 27.01.2019.

Принята к публикации 4.04.2019.

UPPER BOUNDS OF THE DEVIATIONS IN LINEAR DYNAMICAL SYSTEM WITH BOUNDED DISTURBANCES

Ya.I. Kvinto[#], M.V. Khlebnikov

V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, Russia

[#] ✉ yanakvinto@mail.ru

Abstract. A practically significant effect of a surge occurrences in linear dynamical systems under nonzero initial conditions is explored. The linear dynamical system subjected to unknown-but-bounded exogenous disturbances is considered. Using the apparatus of linear matrix inequalities and the invariant ellipsoids concept, the estimations of the upper bounds of the trajectories deviations are obtained, and an approach is suggested to the feedback design that minimizes the deviations. The efficacy of the approach proposed is illustrated on numerical examples.

Keywords: linear dynamical system, trajectories deviations, bounded exogenous disturbances, LMIs, invariant ellipsoids.

Funding. The work is performed with financial support of Russian Foundation of Basic Research (grant No. 18-08-00140).



Читайте в ближайших номерах

- ✓ **Бабушкина Н.А., Кузина Е.А., Лоос А.А., Беяева Е.В.** Математическое моделирование управления противоопухолевой вакцинотерапией
- ✓ **Васильюк Н.Н.** Слабое комплексирование инерциальных и спутниковых измерений при помощи расширенного фильтра Калмана с кватернионным представлением ориентации
- ✓ **Егорова Л.Г., Мячин А.Л.** Структура российского сообщества экономистов и его отношение к российским экономическим журналам. Ч. 2.
- ✓ **Логиновский О.В., Гельруд Я.Д., Голлай А.В.** Применение детерминированных и стохастических моделей для замены оборудования промышленных предприятий
- ✓ **Митришкин Ю.В., Карцев Н.М., Коньков А.Е., Патров М.И.** Управление плазмой в токамаках. Ч. 3.2.
- ✓ **Новиков Д.А.** Классификации систем управления

