УДК 519.7

DOI: https://doi.org/10.25728/pu.2018.3.1

ВЕРХНИЕ ОЦЕНКИ БОЛЬШИХ ОТКЛОНЕНИЙ В ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМАХ ПРИ НАЛИЧИИ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ[1]

Я.И. Квинто, М.В. Хлебников

Рассмотрена линейная динамическая система при наличии неопределенности в ее матрице. На основе техники линейных матричных неравенств получены верхние оценки отклонений в линейных динамических системах, а также исследована задача минимизации отклонений в линейных системах управления при помощи статической линейной обратной связи по состоянию. Результаты численного моделирования продемонстрировали низкую степень консерватизма полученных оценок.

Ключевые слова: линейная динамическая система, неопределенность, линейные матричные неравенства, всплеск, функция Ляпунова.

ВВЕДЕНИЕ

Как хорошо известно, большой практический интерес представляет поведение траектории $x(t)$ устойчивой линейной системы

$$\dot{x} = Ax, \quad x(t) \in \mathbb{R}^n, \tag{1}$$

с ненулевым начальным условием. В частности, очень важна величина

$$\xi(x(0)) = \max_{t \geq 0} \frac{|x(t)|}{|x(0)|},$$

представляющая собой максимальное отклонение траектории системы от нуля в переходном режиме; $|\cdot|$ — некоторая векторная норма.

Эффект отклонений решений линейных обыкновенных дифференциальных уравнений при ненулевых начальных условиях хорошо известен и в вычислительной математике. Поскольку решение системы (1) имеет вид

$$x(t) = e^{At}x(0),$$

то

$$\xi \doteq \max_{t \geq 0} \max_{|x(0)| = 1} |x(t)| = \max_{t \geq 0} \|e^{At}\|,$$

и значения отклонения непосредственно связано с оценкой матричной экспоненты; $\|\cdot\|$ — соответствующая подчиненная матричная норма.

В недавней публикации [1] были обобщены исследования больших отклонений и всплесков в линейных системах. В частности, установлены верхние оценки отклонений и предложен метод синтеза систем, гарантирующий по возможности малые отклонения.

В настоящей работе рассматриваются линейные системы при наличии неопределенности в матрице системы. На основе техники линейных матричных неравенств [2, 3] будут получены простые верхние оценки отклонений в линейных динамических системах, обладающие, как показывают результаты численного моделирования, низкой степенью консерватизма.

В § 1 путем построения общей квадратичной функции Ляпунова получены верхние оценки отклонений в линейной системе с неопределенностью (задача анализа). В § 2 будет рассмотрена задача минимизации отклонений в системах управления при помощи статической линейной обратной связи по состоянию (задача синтеза). Наконец, в § 3

[1] Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 18-08-00140).

приведен пример, иллюстрирующий предлагаемый подход.

В дальнейшем изложении все матричные неравенства понимаются в смысле знакоопределенности матриц.

1. АНАЛИЗ

Рассмотрим линейную динамическую систему

$$\dot{x} = (A + F\Delta H)x, \tag{2}$$

где $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $F \in \mathbb{R}^{n\times p}$, $H \in \mathbb{R}^{q\times n}$, с фазовым состоянием $x(t) \in \mathbb{R}^n$, ненулевым начальным условием $x(0)$ и матричной неопределенностью

$$\Delta \in \mathbb{R}^{p\times q} : \|\Delta\|_2 \le \gamma. \tag{3}$$

Матрица A предполагается гурвицевой — все ее собственные значения имеют отрицательные вещественные части.

Замечание 1. Обратим внимание на то, что матричная неопределенность Δ не предполагается фиксированной; единственное требование — ее ограниченность по норме. Таким образом, устанавливаемые далее результаты справедливы в том числе и для нестационарной неопределенности $\Delta(t)$: $\|\Delta(t)\|_2 \le \gamma$.

В этом разделе на основе техники линейных матричных неравенств путем построения общей квадратичной функции Ляпунова будут получены верхние оценки отклонения

$$\hat{\xi} = \max_{\|\Delta\|_2 \le \gamma} \xi(\Delta) = \max_{\|\Delta\|_2 \le \gamma} \max_{t \ge 0} \max_{|x(0)|_2 = 1} |x(t)|_2 = \\ = \max_{\|\Delta\|_2 \le \gamma} \max_{t \ge 0} \|e^{(A + F\Delta H)t}\|_2.$$

Воспользуемся простым и легко проверяемым достаточным условием *робастной квадратичной устойчивости*, состоящем в наличии общей квадратичной функции Ляпунова для семейства (2). А именно, выполнение неравенства Ляпунова

$$(A + F\Delta H)P + P(A + F\Delta H)^T \prec 0 \tag{4}$$

с некоторой матрицей $P \succ 0$ при всех допустимых значениях неопределенности Δ означает, что у семейства (2) есть общая квадратичная функция Ляпунова

$$V(x) = x^T Px.$$

Далее нам понадобится вспомогательный результат, известный под названием *лемма Петерсена* [4], который эффективно применяется в разнообразных робастных постановках задач стабилизации и управления. Приведем его в следующей формулировке.

Лемма 1 (I.R. Petersen). *Пусть* $G = G^T \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $M \in \mathbb{R}^{n\times p}$, $N \in \mathbb{R}^{q\times n}$. *Матричное неравенство*

$$G + M\Delta N + N^T\Delta^T M^T \prec 0$$

справедливо для всех $\Delta \in \mathbb{R}^{p\times q}$: $\|\Delta\|_2 \le 1$ *тогда и только тогда, когда существует число* ε *такое, что*

$$\begin{pmatrix} G + \varepsilon MM^T & N^T \\ N & -\varepsilon I \end{pmatrix} \prec 0. \ \blacklozenge$$

Таким образом, лемма Питерсена сводит проверку знакоопределенности матричного семейства

$$G + M\Delta N + N^T\Delta^T M^T$$

с матричной неопределенностью Δ к гораздо более простой задаче разрешимости линейного матричного неравенства относительно одной скалярной переменной ε.

Воспользовавшись леммой Питерсена, представим матричное неравенство (4) в виде эквивалентного ему линейного матричного неравенства относительно скалярной переменной ε и матричной переменной $P \succ 0$:

$$\begin{pmatrix} AP + PA^T + \varepsilon\gamma^2 FF^T & PH^T \\ HP & -\varepsilon I \end{pmatrix} \prec 0. \tag{5}$$

Если неравенство (5) разрешимо, то семейство (2) робастно квадратично устойчиво, и наоборот.

Заметим, что в рамках рассматриваемого подхода нетрудно вычислить радиус квадратичной устойчивости семейства (2):

$$\gamma_{\max} = \sup\{\gamma : (A + F\Delta H)P + P(A + F\Delta H)^T \prec 0 \\ \text{при некотором } P \text{ и всех } \Delta : \|\Delta\| \le \gamma\},$$

т. е. максимальный размах $\gamma_{\max}$ неопределенности Δ такой, что при всех $\gamma < \gamma_{\max}$ у семейства (2) имеется общая квадратичная функция Ляпунова. Приведем соответствующий результат.

Лемма 2 [3]. *Пусть* $\hat{\rho}$ *— решение задачи полуопределеного программирования*

$$\max \rho \ \textit{при ограничениях}$$

$$\begin{pmatrix} AP + PA^T + \rho FF^T & PH^T \\ HP & -I \end{pmatrix} \prec 0, \ P \succ 0,$$

относительно матричной переменной $P = P^T \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *и скалярной переменной* ρ. *Тогда радиус квадратичной устойчивости семейства* (2)

$$\gamma_{\max} = \sqrt{\hat{\rho}}\,.\ \blacklozenge$$

Вернемся к задаче оценивания сверху отклонения ξ и рассмотрим эллипсоид

$$\mathcal{E} = \{x \in \mathbb{R}^n : x^T P^{-1} x \le 1\}$$

с матрицей P, удовлетворяющей неравенству (5). Если начальное условие $x(0)$ системы (2) лежит в этом эллипсоиде, ее траектория будет оставаться в нем для всех моментов времени; это следует из того, что квадратичная форма $x^T P^{-1} x$ является функцией Ляпунова для данной системы. Следовательно, если эллипсоид $\mathcal{E}$ содержит единичный шар

$$\mathcal{B} = \{x \in \mathbb{R}^n : |x|_2 \le 1\},$$

то *для любого* начального условия из шара $\mathcal{B}$ траектория системы не покинет эллипсоид $\mathcal{E}$, и в каждый момент времени для ее 2-нормы верна оценка

$$|x(t)|_2 \le \lambda_{\max}(P) = \sqrt{\|P\|_2}\,.$$

Поскольку условие $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{E}$ эквивалентно требованию $P \succcurlyeq I$, приходим к задаче

$$\min\|P\|_2 \text{ при ограничениях}$$

$$\begin{pmatrix} AP + PA^T + \varepsilon\gamma^2 FF^T & PH^T \\ HP & -\varepsilon I \end{pmatrix} \prec 0, \quad P \succcurlyeq I,$$

где переменными являются матрица $P = P^T \in \mathbb{R}^{n\times n}$ и скаляр ε.

Итак, установлен следующий результат.

Теорема 1. *Пусть* $\hat{P}$ *— решение задачи выпуклой оптимизации* $\min\|P\|_2$ *при ограничениях*

$$\begin{pmatrix} AP + PA^T + \varepsilon\gamma^2 FF^T & PH^T \\ HP & -\varepsilon I \end{pmatrix} \prec 0, \quad P \succcurlyeq I,$$

относительно матричной переменной $P = P^T \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *и скалярной переменной* ε.

Тогда для решений системы (2) *при всех допустимых неопределенностях* Δ *справедлива оценка отклонения*

$$\hat{\xi} \le \sqrt{\|\hat{P}\|_2}\,.\ \blacklozenge$$

Пример 1. Рассмотрим систему вида (2) с фробениусовой матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -4 & -6 & -4 \end{pmatrix},$$

обладающей собственными значениями

$$\lambda_1 = -2, \quad \lambda_{2,3} = -1 \pm j,$$

с неопределенностью

$$\Delta = (\delta_1\ \delta_2\ \delta_3), \quad \|\Delta\| \le 1,$$

и «обрамляющими» матрицами

$$F = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad H = I.$$

Таким образом, возмущению подвержены элементы последней строки номинальной матрицы A.

Решение задачи из теоремы 1 дает верхнюю оценку

$$\hat{\xi} = 2{,}3008,$$

тогда как результат численной оптимизации

$$\max_{\|\Delta\|_2 \le 1} \max_{t \ge 0} \|e^{(A + F\Delta H)t}\|_2$$

дает истинную величину отклонения $\xi = 1{,}9247$. Таким образом, полученная оценка завышена всего лишь на 16 %.

Динамика изменения величины $\max\limits_{\|\Delta\|_2 \le 1} \max\limits_{|x(0)|_2 = 1} |x(t)|_2 = \max\limits_{\|\Delta\|_2 \le 1} \|e^{(A + F\Delta H)t}\|_2$ показана на рис. 1 сплошной лини-

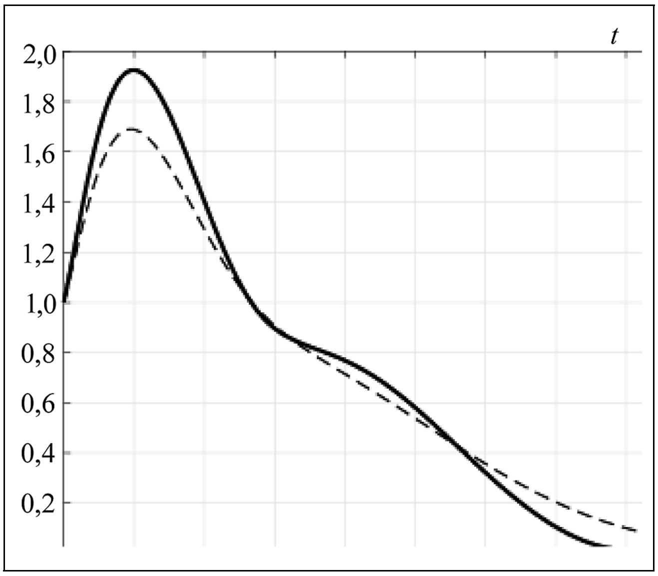

Рис. 1. График функции $\max\limits_{\|\Delta\|_2 \le 1} \|e^{(A + F\Delta H)t}\|_2$ **для системы из примера 1**

ей. Для сравнения пунктиром показан график функции $\|e^{At}\|_2$, соответствующей системе без неопределенностей.

Численное моделирование проводилось в среде Matlab с помощью программного пакета cvx [5]. ♦

Оказывается, что для матриц, находящихся близко к границе устойчивости, предложенная оценка может быть сколь угодно точна.

2. СИНТЕЗ

Перейдем к задаче синтеза и рассмотрим систему управления

$$\dot{x} = (A + F\Delta H)x + Bu, \tag{6}$$

где $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $F \in \mathbb{R}^{n\times p}$, $H \in \mathbb{R}^{q\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$, с фазовым состоянием $x(t) \in \mathbb{R}^n$, ненулевым начальным условием $x(0)$, управлением $u(t) \in \mathbb{R}^n$ и матричной неопределенностью Δ, удовлетворяющей условию (3); пара (A, B) управляема.

Будем искать стабилизирующую линейную обратную связь по состоянию

$$u = Kx \tag{7}$$

и квадратичную функцию Ляпунова для замкнутой системы такую, что ее матрица минимальна по спектральной норме. Иными словами, в соответствии с теоремой 1 будем минимизировать оценку отклонения $\hat{\xi}$ траекторий замкнутой системы.

Замкнув систему (6) управлением (7), приходим к замкнутой системе

$$\dot{x} = (A + BK + F\Delta H)x.$$

Воспользовавшись результатами § 1, приходим к задаче $\min\|P\|_2$ при ограничениях

$$\begin{pmatrix} (A+BK)P + P(A+BK)^T + \varepsilon\gamma^2 FF^T & PH^T \\ HP & -\varepsilon I \end{pmatrix} \prec 0,$$

$$P \succcurlyeq I.$$

Введем вспомогательную матричную переменную $Y = KP$, тогда первое из ограничений примет линейный вид

$$\begin{pmatrix} AP + PA^T + BY + Y^TB^T + \varepsilon\gamma^2 FF^T & PH^T \\ HP & -\varepsilon I \end{pmatrix} \prec 0;$$

при этом матрица регулятора K восстанавливается единственным образом: $K = YP^{-1}$.

Итак, получено следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть $\hat{P}$, $\hat{Y}$ — решение задачи выпуклой оптимизации*

$$\min\|P\|_2 \text{ *при*}$$

$$\begin{pmatrix} AP + PA^T + BY + Y^TB^T + \varepsilon\gamma^2 FF^T & PH^T \\ HP & -\varepsilon I \end{pmatrix} \prec 0,$$

$$P \succcurlyeq I, \tag{8}$$

относительно матричных переменных $P = P^T \in \mathbb{R}^{n\times n}$ и $Y \in \mathbb{R}^{m\times n}$ и скалярной переменной ε.

Тогда для решений системы (6), *замкнутой регулятором*

$$u = \hat{K}x, \quad \hat{K} = \hat{Y}\hat{K}^{-1},$$

справедлива оценка отклонения

$$\hat{\xi} \le \sqrt{\|\hat{P}\|_2}$$

при всех допустимых неопределенностях Δ. ♦

Важно отметить, что для системы (6) в канонической форме, т. е. при

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

с «обрамляющими» матрицами

$$F = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad H = I$$

и неопределенностью $\Delta = (\delta_0\ \delta_1\ \dots\ \delta_{n-1})$ матрица системы, замкнутой регулятором $K = (k_0\ k_1\ k_2\ \dots\ k_{n-1})$, имеет вид

$$A_c =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ k_0 - a_0 + \delta_0 & k_1 - a_1 + \delta_1 & k_2 - a_2 + \delta_2 & \dots & k_{n-1} - a_{n-1} + \delta_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Следовательно, от коэффициентов $a_0, \dots, a_{n-1}$ и уровня γ зависит только регулятор K, тогда как матрица P функции Ляпунова и соответственно искомая оценка отклонения $\hat{\xi}$ определяются лишь

Зависимость величины $\hat{\xi}$ от n

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\hat{\xi}$	1	1,7321	2,4142	4,3357	6,7040	12,1267	19,6107	35,4989	58,8206

размерностью n системы. При этом регулятор K имеет вид

$$K = K_0 + (a_0\ a_1\ a_2\ \ldots\ a_{n-1}),$$

где регулятор K_0 соответствует фробениусовой матрице A с нулевой последней строкой.

Зависимость оценки отклонения $\hat{\xi}$, предоставляемой теоремой 2, от размерности n системы представлена в таблице. Отметим, что при $n = 2$ всплеск в системе отсутствует.

Замечание 2. Нетрудно видеть, что замена первого из ограничений в оптимизационной задаче (8) на условие

$$\begin{pmatrix} AP + PA^T + BY + Y^TB^T + \varepsilon\gamma^2 FF^T + 2\sigma P & PH^T \\ HP & -\varepsilon I \end{pmatrix} \prec 0,$$

$$\sigma > 0,$$

гарантирует устойчивость матрицы $A + BK + F\Delta H + \sigma I$. Иными словами, степень устойчивости замкнутой системы (6) будет заведомо не меньше σ.

3. ПРИМЕР

Проиллюстрируем предлагаемый подход на примере так называемой *двухмассовой системы* — системы из двух твердых тел с массами m_1 и m_2, соединенных пружиной с коэффициентом упругости k, скользящих без трения вдоль неподвижного горизонтального стержня [6]; к левому телу приложено управляющее воздействие $u \in \mathbb{R}$ (рис. 2).

Пусть x_1 и v_1 — соответственно координата и скорость левого тела, а x_2 и v_2 — правого. Поведение системы описывается вектором фазового состояния

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4,$$

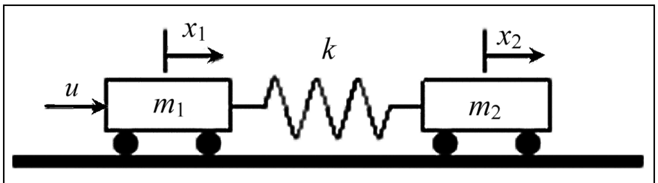

Рис. 2. Двухмассовая система

а непрерывная модель колебаний двухмассовой системы принимает вид

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{k}{m_1} & \frac{k}{m_1} & 0 & 0 \\ \frac{k}{m_2} & -\frac{k}{m_1} & 0 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{m_1} \\ 0 \end{pmatrix} u.$$

Пусть $k = 1$, $m_1 = 1$, а неопределенность системы сосредоточена в массе m_2 правого тела, на которое непосредственно не воздействует управление. При этом номинальное значение m_2 равно единице:

$$\frac{k}{m_2} = 1 + \gamma\Delta(t), \quad |\Delta| \le 1.$$

Система, замкнутая регулятором (7), принимает вид

$$\dot{x} = (A + BK + F\Delta H)x,$$

где

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ F = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \gamma \end{pmatrix},\ H = (1\ -1\ 0\ 0).$$

Воспользовавшись теоремой 2, для допустимого уровня возмущения $\gamma = 0,85$ находим матрицу

$$\hat{P} = \begin{pmatrix} 32,9119 & 29,7318 & -3,1863 & -5,6495 \\ 29,7318 & 34,4152 & 7,7303 & -3,9182 \\ -3,1863 & 7,7303 & 62,3404 & -0,9822 \\ -5,6495 & -3,9182 & -0,9822 & 2,7200 \end{pmatrix}$$

квадратичной функции Ляпунова и соответствующий регулятор

$$\hat{K} = (-11,0638\ \ 8,3672\ \ -2,3681\ \ -10,4377);$$

при этом получаем верхнюю оценку отклонения $\hat{\xi} = 8,1927$.

На рис. 3 показана динамика величины $\|x(t)\|$ (жирная линия) и траектории фазовых координат (тонкие линии) замкнутой системы при некотором начальном условии $x(0)$ из единичного шара. В качестве матричной неопределенности примем так называемую «наихудшую неопределенность»:

$$\tilde{\Delta} = \mathrm{sign}[F^T\hat{P}^{-1}xx^TH^T].$$

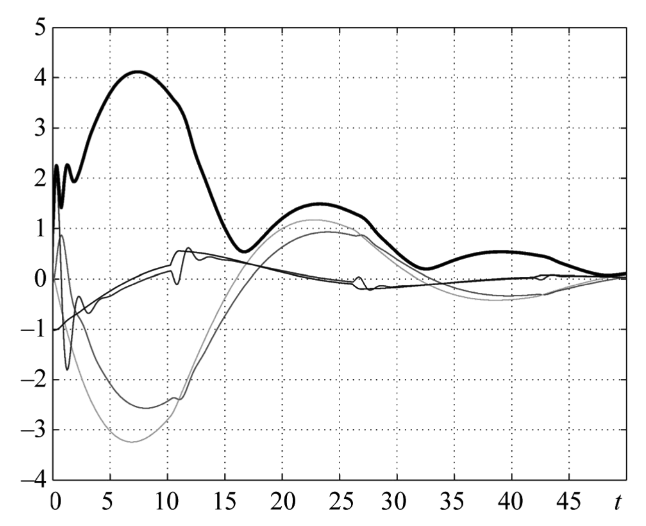

Рис. 3. Всплеск в двухмассовой системе

Как показано в работе [7], матричная неопределенность $\tilde{\Delta}$ (рассматриваемая как функция от времени) максимизирует производную функции Ляпунова в силу системы и в этом смысле является «наихудшей» из всех допустимых неопределенностей.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Исследования переходных режимов в линейных динамических системах при ненулевых начальных условиях были начаты еще в 1948 г. в работе А.А. Фельдбаума [8]. В настоящей статье продолжено изучение этого явления для линейных систем при наличии структурированной матричной неопределенности в матрице системы. На основе техники линейных матричных неравенств получены верхние оценки отклонений в линейных динамических системах, а также исследована задача минимизации отклонений в линейных системах управления при помощи статической линейной обратной связи по состоянию. Результаты численного моделирования демонстрируют низкую степень консерватизма полученных оценок.

Полученные результаты авторы в дальнейшем предполагают распространить на иные робастные постановки задачи, на системы в дискретном времени, а также на динамические системы, подверженные воздействию внешних возмущений.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Поляк Б.Т., Тремба А.А., Хлебников М.В.* и др. Большие отклонения в линейных системах при ненулевых начальных условиях // Автоматика и телемеханика. — 2015. — № 6. — С. 18—41 [*Polyak B.T., Tremba A.A., Khlebnikov M.V.,* et al. Large Deviations in Linear Control Systems with Nonzero Initial Conditions // Automation and Remote Control. — 2015. — Vol. 76, N 6. — P. 957—976].
2. *Boyd S., El Ghaoui L., Feron E., Balakrishnan V.* Linear Matrix Inequalities in Systems and Control Theory. — Philadelphia: SIAM, 1994.
3. *Поляк Б.Т., Хлебников М.В., Щербаков П.С.* Управление линейными системами при внешних возмущениях: Техника линейных матричных неравенств. — М.: ЛЕНАНД, 2014. — 560 с.
4. *Petersen I.R.* A Stabilization Algorithm for a Class of Uncertain Linear Systems // Systems and Control Letters. — 1987. — Vol. 8. — P. 351—357.
5. *Grant M., Boyd S.* CVX: Matlab Software for Disciplined Convex Programming, Version 1.21. — URL: http://cvxr.com/cvx/.
6. *Reinelt W.* Robust Control of a Two-Mass-Spring System Subject to Its Input Constraints // Proc. American Control Conference — 2000 (ACC-2000), Chicago, USA, June 28—30, 2000. — P. 1817—1821.
7. *Поляк Б.Т., Топунов М.В., Щербаков П.С.* Идеология инвариантных эллипсоидов в задаче о робастном подавлении ограниченных внешних возмущений // Стохастическая оптимизация в информатике. — 2007. — Т. 3, № 1-1. — С. 51—84.
8. *Фельдбаум А.А.* О распределении корней характеристического уравнения систем регулирования // Автоматика и телемеханика. — 1948. — № 4. — С. 253—279.

Статья представлена к публикации членом редколлегии С.А. Красновой.

Квинто Яна Игоревна — канд. техн. наук, вед. инженер, ✉ yanakvinto@mail.ru,

Хлебников Михаил Владимирович — д-р. физ.-мат. наук, гл. науч. сотрудник, ✉ khlebnik@ipu.ru,

Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, г. Москва.