УДК 519.715

АНАЛИЗ СТРУКТУРЫ ГАРМОНИЧЕСКИХ РЯДОВ ДИНАМИКИ НА БАЗЕ АЛГОРИТМА СИНГУЛЯРНОГО РАЗЛОЖЕНИЯ

О.В. Кузьмин, В.С. Кедрин

Исследованы особенности анализа структуры гармонических рядов на базе определения численного ранга, соотносимого с числом сингулярных чисел, существенно отличных от нуля. Проводится параллель между численным рангом сингулярного разложения и конечным рангом простейшего гармонического ряда. Приведены результаты анализа структур аддитивных и мультипликативных моделей гармонических временных рядов.

Ключевые слова: нестационарная система, временной ряд, сингулярное разложение, сингулярный спектр, анализ структуры модели.

ВВЕДЕНИЕ

В целях оперативного управления сложными техническими системами в современных условиях необходимо создание аналитического и алгоритмического аппарата, который позволил бы учесть природу динамики протекающих в них процессов на основании накопленной с течением времени статистической информации о характеристиках системы. Задача осложняется тем, что в реальных системах с течением времени непрерывно изменяются параметры и структурный состав образующих их подсистем. В связи с тем, что классический аппарат спектрального анализа, основанный на преобразовании Фурье, имеет ряд ограничений, весьма затруднено его эффективное применение к анализу сложных динамических процессов, состоящих из большого числа компонент с эволюционирующими во времени частотой и амплитудой. Поэтому в последнее время наибольшую популярность приобретают новые сложные дискретные методы спектрального и гармонического анализа [1—3], позволяющие получать больше информации о динамическом ряде. Наиболее перспективные из них — вейвлет-преобразование и метод, основанный на сингулярном разложении траекторной матрицы развертки.

Вейвлет-преобразование, благодаря подвижным частотно-временным окнам, позволяет одинаково хорошо выявлять низкочастотные и высокочастотные характеристики динамического ряда. При этом можно выделить как определенную пространственную (временную) частоту, так и ее локализацию в физическом пространстве (времени).

Сингулярное разложение траекторной матрицы развертки (СРМР) [4, 5] позволяет представить исходный динамический ряд с помощью суммы его аддитивных составляющих на основании ортогонального (независимого) базиса. Не умаляя достоинств вейвлет-преобразования, отметим, что аппарат СРМР имеет ряд важных свойств, позволяющих адаптивно применять его к нестационарным выборкам временных рядов [5]:

— допустимость варьирования качества и состава выделяемых составляющих с помощью одного параметра, определяющего длину строки (окна) траекторной матрицы развертки;

— возможность управляемого восстановления исходного процесса по интерпретируемым компонентам, в отличие от практически однозначных компонент Фурье- и вейвлет-преобразований;

— отсутствие для реальных временных рядов граничного эффекта по параметру сдвига, определяемого, например, жесткой фиксацией набора вейвлет-функций;

— представление отдельной собственной сингулярной функции в виде линейного фильтра показывает, что она обладает не комплексной, как в случае Фурье-преобразования, а действительной частотной характеристикой. Это снимает проблемы, связанные с моделированием фазовых сдвигов между составляющими.

Таким образом, аппарат СРМР может быть положен в основу решения проблемы создания новых дискретных алгоритмов анализа состояния сложных процессов. Поэтому в данной работе ставится задача определения особенностей приложения аппарата сингулярного разложения для класса периодических (гармонических) функций, так как данный вид функций имеет наибольшее значение при оценке динамического состояния систем в различных областях науки и техники.

1. СИНГУЛЯРНЫЙ АНАЛИЗ

Аппарат сингулярного анализа основан на разложении временного ряда на простейшие аддитивные составляющие, что позволяет учесть и исследовать его структуру. Суть метода заключается в преобразовании одномерной выборки нестационарного процесса в матрицу развертки с помощью однопараметрической процедуры сдвига элементов ряда:

$$\mathbf{A} = (a_i)_{i=1}^{m+n-1} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_2 & a_3 & a_4 & \dots & a_{n+1} \\ a_3 & a_4 & a_5 & \dots & a_{n+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_m & a_{m+1} & a_{m+2} & \dots & a_{m+n-1} \end{bmatrix} \quad (1)$$

и сингулярного разложения этой ганкелевой матрицы [6] на основании фундаментального соотношения:

$$\mathbf{A} = \mathbf{USV}, \quad (2)$$

где $\mathbf{U}$ — унитарная матрица левых сингулярных векторов размером $m \times m$, $\mathbf{V}$ — унитарная матрица правых сингулярных векторов размером $n \times n$, $\mathbf{S}$ — диагональная матрица размером $m \times n$ с сингулярными неотрицательными числами, расположенными в порядке невозрастания.

Из полученного набора сингулярных чисел матрицы $\mathbf{S}$ в соотношении (2) выбираются те из них, по которым может быть восстановлена совокупность аддитивных составляющих, причем сумма с допустимой ошибкой совпадает с выборкой исходного процесса. Более подробно аппарат сингулярного разложения описан в работах [4, 5].

Пояснить смысл метода сингулярного разложения позволяет метод главных компонент (алгоритм PCA — principal component analysis). Для этого достаточно просто провести параллель между данными двумя методами. Суть метода главных компонент состоит в представлении матрицы (1) в виде

$$\mathbf{A} = \mathbf{TP}^T + \mathbf{E}, \quad (3)$$

где $\mathbf{T}$ — матрица счетов, которая определяет проекции исходных строк матрицы $\mathbf{A}$ на подпространство главных компонент; $\mathbf{P}$ — матрица нагрузок, которая определяет переход из исходного пространства строк матрицы $\mathbf{A}$ в пространство главных компонент; $\mathbf{E}$ — матрица ошибок (остатков).

Если в соотношении (3) представить матрицу $\mathbf{T}$ в виде $\mathbf{T} = \mathbf{US}$, положить $\mathbf{P}^T = \mathbf{V}$ и считать $\mathbf{E}$ нулевой матрицей, то получим сингулярное разложение (2).

Математическое содержание метода главных компонент — описание пространства данных, заключенных в матрице $\mathbf{A}$ как суммы взаимно ортогональных собственных подпространств $\mathbf{t}_i$. На основании этого можно говорить о том, что в сингулярном разложении матрица $\mathbf{A}$ определяется через линейную комбинацию ортогональных проекторов на эти подпространства с коэффициентами, равными значениям сингулярных чисел матрицы $\mathbf{S}$. При этом количество значимых (отличных от погрешности и шума) подпространств будет зависеть от количества сингулярных чисел, существенно отличных от нуля. Это подтверждает положение, сформированное в фундаментальной работе [7], что сингулярное разложение позволяет ввести практичное понятие численного ранга, так называемого ε-ранга матрицы, который, для некоторого малого $\varepsilon > 0$, определяется по формуле

$$\mathrm{rank}(\mathbf{A}, \varepsilon) = \min\Big(\operatorname*{rank}_{\|\mathrm{A}-\mathrm{B}\|_2 \le \varepsilon} (\mathbf{B}) \Big).$$

Количество сингулярных чисел, позволяющих с допустимой погрешностью ε определить $\mathrm{rank}(\mathbf{A}, \varepsilon)$ на фоне остального их количества, характеризует близость ранга исследуемой матрицы $\mathbf{A}$ к матрице $\mathbf{B}$ меньшего ранга. Поэтому сингулярное разложение позволяет раскрыть «скрытую» информацию о значимой структуре исследуемой матрицы $\mathbf{A}$. Так, оценивая значения сингулярных чисел $s_1 \ge \dots \ge s_r > s_{r+1}$, $s_{r+1} = \dots s_m \approx 0$, получаем: $\mathrm{rank}(\mathbf{A}) = r$, $\mathrm{range}(\mathbf{A}) = \mathrm{span}\{u_1, \dots, u_r\}$, $\mathrm{null}(\mathbf{A}) = \mathrm{span}\{v_{r+1}, \dots, v_m\}$, где $\mathrm{rank}(\mathbf{A})$ — ранг матрицы $\mathbf{A}$; $\mathrm{range}(\mathbf{A})$ — область значений матрицы $\mathbf{A}$, $\mathrm{range}(\mathbf{A}) = \{\mathbf{y} \in \mathbf{R}^r : \mathbf{y} = \mathbf{Ax}\}$ для некоторого $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^r$; $\mathrm{null}(\mathbf{A})$ — нуль-пространство матрицы $\mathbf{A}$, $\mathrm{null}(\mathbf{A}) = \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^{m-r} : \mathbf{Ax} = 0\}$.

Отметим, что сингулярное разложение позволяет оценить размерности двух важных подпространств: $\mathrm{range}(\mathbf{A})$ ранга r, содержащего существенную для исследования информацию, и null(**A**) ранга $m - r$, содержащего остаточную составляющую, которая может быть интерпретирована как шум или погрешность.

Понятие численного (сингулярного) ранга r позволяет раскрыть и выявить скрытые (латентные) внутренние взаимосвязи между элементами матрицы **A**. В случае, если матрица **A** является траекторной и характеризует исследуемую временную (пространственную) выборку процесса, то ранг r, определяемый с помощью сингулярного разложения, должен быть связан с числом степеней свободы системы, порождающей исследуемый процесс, т. е. числом переменных, которые определяют фазовое состояние системы. Проиллюстрируем это положение на примере временных рядов, образованных простейшими периодическими (гармоническими) функциями.

2. СИНГУЛЯРНЫЙ АНАЛИЗ ГАРМОНИЧЕСКОГО ВРЕМЕННОГО РЯДА

Пусть исследуемый временной ряд порождается гармонической функцией вида:

$$f(x) = A\cos(\alpha x + \phi) + B\sin(\alpha x + \phi). \qquad (4)$$

Определим свойства сингулярного разложения данного ряда, исходя из понятия численного ранга сингулярного разложения, определяемого количеством сингулярных чисел, существенно отличных от нуля.

В работе [8] приведено понятие ранга ряда d, согласно которому любой бесконечный ряд является рядом конечного ранга, если его члены удовлетворяют линейной рекуррентной формуле размерности d, т. е. найдутся такие коэффициенты $a_1, ..., a_j, ..., a_d$, что для любого $i > d$ справедливо

$$f_i = \sum_{k=1}^{d} a_k f_{i-k}, \quad a_d \neq 0. \qquad (5)$$

Класс рекуррентных соотношений вида (5) подробно рассмотрен, например, в работе [9]. Частный случай соотношения (5) для исходного гармонического ряда (4) может быть получен на основании решения однородного рекуррентного (разностного) уравнения второго порядка вида

$$y_n = Ky_{n-1} - y_{n-2}, \qquad (6)$$

где K — в общем случае произвольная константа.

Для решения уравнения (6) составляется характеристическое уравнение $\lambda^2 - K\lambda + 1 = 0$, $\lambda \neq 0$, из которого при $|K| < 2$ получаем два комплексно-сопряженных корня:

$$K/2 \pm i\sqrt{1 - K^2/4}. \qquad (7)$$

Поскольку $|K| < 2$, можно подобрать такие α, что $K = 2\cos\alpha$. В этом случае из соотношения (7) получаем:

$$\lambda_{1,2} = \cos\alpha \pm i\sqrt{1 - 1\cos^2\alpha} = \cos\alpha \pm i\sin\alpha = e^{\pm i\alpha}.$$

Решение исходного разностного уравнения (6) в рассматриваемом частном случае имеет вид

$$y_n = C_1\lambda_1^2 + C_2\lambda_2^2 = C_1e^{in\alpha} + C_2e^{-in\alpha}$$

или

$$y_n = A\cos(\alpha n) + B\sin(\alpha n).$$

Исходя из этого решения, получаем рекуррентную формулу

$$y_i = 2\cos a y_{i-1} - y_{i-2}, \qquad (8)$$

которая управляет рядом, порождаемым гармонической функцией вида (4), следовательно, ранг исходного гармонического ряда $d = 2$.

Замечание. В случае $a = \pi k$, $k = 1, 2, 3, ...$, значения y_i и y_{i-2} в соотношении (8) совпадают. Следовательно, рекуррентная формула примет вид $y_i = \cos a y_{i-1}$ и, соответственно, ранг исходного гармонического ряда $d = 1$. ♦

Предположим, что ранг r сингулярного разложения связан с числом степеней свободы системы d, порождающей исследуемый процесс. Тогда сингулярное разложение заданной гармонической функции (4) должно характеризоваться соотносимым с рангом количеством сингулярных чисел в случае $a \neq \pi k$, $k = 1, 2, 3, ...$, и одним сингулярным числом при $a = \pi k$, $k = 1, 2, 3, ...$ Для проверки указанного предположения был проведен численный эксперимент применения метода СРМР к временной выборке, порождаемой гармонической функцией вида (4), с целью исследования количества выделяемых отличных от нуля сингулярных чисел, получаемых при разных параметрах a.

Эксперимент 1. Для расчетов были заданы выборки временных рядов, образованных функцией

$$\begin{cases} f(i) = 0{,}5\cos(\alpha i) + \sin(\alpha i),\ i = \overline{1, 51}, \\ \alpha = \pi k/6,\ k = \overline{1, 12}. \end{cases}$$

Для временных рядов, получаемых путем сдвига параметра α с шагом $\pi k/6$, строилась траекторная матрица **A** и проводилось сингулярное разложение с целью определения численного ранга, определяемого количеством сингулярных чисел, существенно отличных от нуля. Сингулярное разложение формировалось с помощью алгоритма Голуба—Рейнша [10], включенного в состав библиотеки численных вычислений в прикладной математике и науке GSL. Результаты эксперимента представлены на рис. 1. По результатам эксперимента значения третьего и последующего сингулярных чисел являются незначительными относительно первых двух сингулярных чисел. Поэтому можно считать, что $s_3 \approx s_4 \approx ... \approx 0$, и, соответственно, эти числа относятся к null(**A**). На рис. 1 зависимости сингулярных чисел s_3 и s_4 носят информативный характер для графической оценки разделения пространств range(**A**) и null(**A**). Принятие малых не нулевых значений сингулярных чисел s_3 и s_4 можно объяснить неравномерностью дискретных отсчетов, особенностями дискретного алгоритма сингулярного анализа, а также конечной точностью применяемых в ходе расчета переменных.

Можно сделать следующие *выводы.*

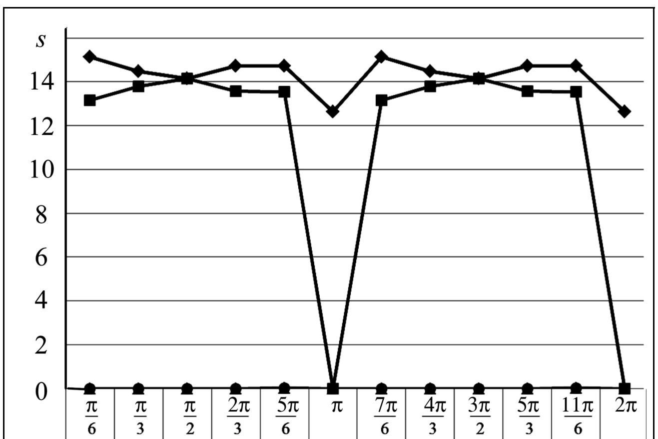
1. Численный ранг r, соотносимый с количеством сингулярных чисел, существенно отличных от нуля, инвариантен к параметру разложения m, а именно, ранг r остается неизменным при различном параметре разложения m, меняются лишь их значения. На основании эксперимента была получена инвариантная зависимость от параметров n и m численного ранга r при разных параметрах a, в случае, если существует null(**A**), и $m > d$, представленная на рис. 2.

2. Численный ранг r, определяемый с помощью сингулярного разложения, соотносится с конечным рангом ряда d для гармонических функций вида (4):

$$a \neq \pi k, \quad k = 1, 2, 3... \Rightarrow r = d = 2;$$

$$a = \pi k, \quad k = 1, 2, 3... \Rightarrow r = d = 1.$$

3. При $a = \pi k/2$, $k = 1, 2, 3...$, значения двух сингулярных чисел совпадают.



	π/6	π/3	π/2	2π/3	5π/6	π	7π/6	4π/3	3π/2	5π/3	11π/6	2π
s_1	15,134	14,469	14,142	14,715	14,715	12,649	15,134	14,469	14,142	14,715	14,715	12,649
s_2	13,147	13,798	14,142	13,568	13,552	7,E-16	13,147	13,798	14,142	13,568	13,552	7,E-16
s_3	1,E-04	5,E-07	6,E-16	5,E-07	2,E-02	0,E+00	1,E-04	5,E-07	6,E-16	5,E-07	2,E-02	0,E+00
s_4	1,E-04	6,E-16	0,E+00	6,E-16	2,E-02	0,E+00	1,E-04	6,E-16	0,E+00	6,E-16	2,E-02	0,E+00

Рис. 1. Зависимость значений сингулярных чисел *s*, выделяемых в результате сингулярного разложения (*m* = 20) простейшей гармонической функции, при различных параметрах α

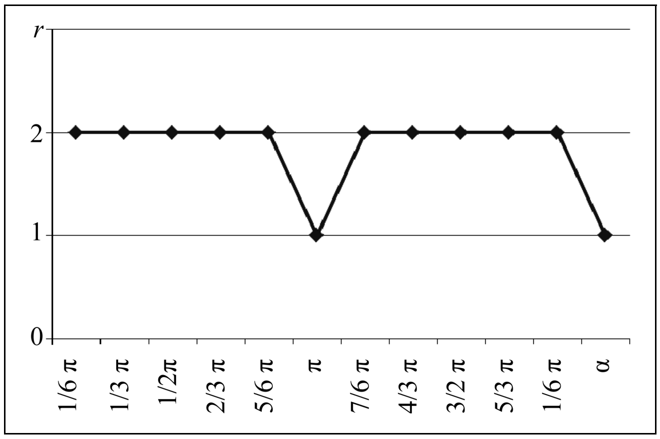


Рис. 2. Зависимость численного ранга *r* для простейшей гармонической функции от параметра α

3. СИНГУЛЯРНЫЙ АНАЛИЗ АДДИТИВНОГО ГАРМОНИЧЕСКОГО ВРЕМЕННОГО РЯДА

Пусть исследуемый временной ряд порождается гармонической функцией

$$f(x) = \sum_{i=1}^{I} A_i \cos(\alpha_i x + \phi) + B_i \sin(\alpha_i x + \phi), \quad (9)$$

где I — число аддитивных составляющих.

Определим свойства сингулярного разложения для заданного ряда, исходя из понятия численного ранга r, соотносимого с количеством сингулярных чисел, существенно отличных от нуля.

В случае, когда $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_I = \alpha$, легко показать, что численный ранг сингулярного разложения будет определяться аналогичным образом, что и для ряда, образованного функцией (4). В данном случае исходную функцию (4) можно преобразовать к виду

$$f(x) = \left(\sum_{i=1}^{I} A_i\right) \cos(\alpha x + \phi) + \left(\sum_{i=1}^{I} B_i\right) \sin(\alpha x + \phi).$$

Подставляя $A = \sum_{i=1}^{I} A_i$ и $B = \sum_{i=1}^{I} B_i$, получаем $f(x) = A\cos(\alpha x + \phi) + B\sin(\alpha x + \phi)$.

Остается открытым вопрос об определении ранга для аддитивного гармонического временного ряда, образованного функцией (9), когда $\alpha_1 \neq \alpha_2 \neq ... \neq \alpha_I$. В этом случае каждая составляющая $A_i\cos(\alpha_i x + \phi) + B_i\sin(\alpha_i x + \phi)$ будет характеризоваться двумя сингулярными числами при $a_i \neq \pi k$, $k = 1, 2, 3...$ Для ответа на данный вопрос был проведен численный эксперимент применения метода СРМР к временным выборкам аддитивного гармонического временного ряда (9) с целью исследования зависимости численного ранга r от числа аддитивных составляющих I при $\alpha_1 \neq \alpha_2 \neq ... \neq \alpha_I$ и $\forall a_i \neq \pi k$, $k = 1, 2, 3...$

Эксперимент 2. Для расчетов были заданы выборки временных рядов, образованных функцией:

$$f_j(i) = \sum_{i=1}^{I} 0{,}5\cos(0{,}2ji) + \sin(0{,}2ji), \quad j = \overline{1, 101},$$

с итерационным шагом $I = \overline{1, 10}$.

Вывод. Численный ранг r, соотносимый с количеством сингулярных чисел, существенно отличных от нуля, для аддитивной функции вида (9) прямопропорционален числу суммируемых составляющих i и определяется линейной зависимость $r = 2I$.

При сингулярном разложении функции:

$$f_j(i) = \sum_{i=1}^{20} 0{,}5\cos(0{,}4ji), \quad j = \overline{1, 201},$$

с параметром разложения $m = 20$ был определен численный ранг $r = 40$, что подтверждает сформулированный вывод.

4. СИНГУЛЯРНЫЙ АНАЛИЗ МУЛЬТИПЛИКАТИВНОГО ГАРМОНИЧЕСКОГО ВРЕМЕННОГО РЯДА

Пусть исследуемый временной ряд порождается гармонической функцией

$$f(x) = \prod_{i=1}^{I} A_i\cos(\alpha_i x + \phi) + B_i\sin(\alpha_i x + \phi), \quad (10)$$

где I — число мультипликативных составляющих.

Определим свойства сингулярного разложения для заданного ряда, исходя из понятия численного ранга r, соотносимого с количеством сингулярных чисел, существенно отличных от нуля.

В случае, когда $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_I = \alpha$, ситуация не такая однозначная, как для аддитивного ряда. Поэтому был проведен численный эксперимент применения метода СРМР к временным выборкам мультипликативного гармонического временного ряда (10) с целью исследования численного ранга r в зависимости от количества мультипликативных составляющих I при $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_I = \alpha$ и $\forall a_i \neq \pi k$, $k = 1, 2, 3...$

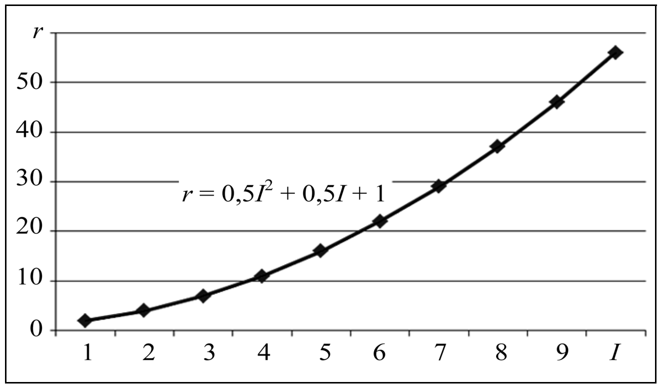


Рис. 3. Зависимость численного ранга r для мультипликативной гармонической функции от числа составляющих при $\alpha_1 \neq \alpha_2 \neq ... \neq \alpha_I$

Эксперимент 3. Для расчетов были заданы выборки временных рядов, образованных функцией

$$f_j(i) = \prod_{i=1}^{I} 1{,}5\cos(0{,}2j) + \sin(0{,}2j), \quad j = \overline{1, 201},$$

с шагом $I = \overline{1, 10}$.

Вывод. Численный ранг r, соотносимый с количеством сингулярных чисел, существенно отличных от нуля, для мультипликативной функции вида (10) при $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_I = \alpha$ прямопропорционален числу мультипликативных составляющих I и определяется линейной зависимостью $r = 1 + I$.

С целью исследования зависимости численного ранга r от числа I мультипликативных составляющих для выборок временных рядов, образованных функцией (10) при $\alpha_1 \neq \alpha_2 \neq ... \neq \alpha_I$ и $\forall a_i \neq \pi k$, $k = 1, 2, 3...$, был проведен численный эксперимент применения метода СРМР.

Эксперимент 4. Для расчетов были заданы выборки временных рядов, образованных функцией

$$f_j(i) = \prod_{i=1}^{I} 0{,}5\cos(0{,}2ji) + \sin(0{,}2ji), \quad j = \overline{1, 201},$$

с шагом $I = \overline{1, 10}$.

Вывод. Численный ранг r, соотносимый с количеством сингулярных чисел, существенно отличных от нуля, для мультипликативной функции вида (10) определяется функцией (рис. 3) $r = 0{,}5I^2 + 0{,}5I + 1$.

При сингулярном разложении функции

$$f_j(i) = \sum_{i=1}^{12} 0{,}5\cos(0{,}4ji), \quad j = \overline{1, 201},$$

с параметрами разложения $m = 100$ был определен численный ранг $r = 79$, что подтверждает сформулированный вывод.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

На основании проведенного экспериментального исследования можно сделать вывод о том, что расширение и модификация классического алгоритма сингулярного разложения позволяет создать новый, достаточно перспективный и наглядный аппарат анализа динамической структуры процесса в локальном квазистационарном состоянии. Он может быть применим не только для аддитивных, но и для мультипликативных моделей, что расширяет возможности классической методики сингулярного разложения. Полученные ключевые зависимости численного ранга r от числа составляющих сложной гармонической функции могут стать основой для разработки новой методологии оперативного анализа состояния и особенностей динамической системы, что актуально для мониторинга параметров управления в режиме реального времени сложных структурно-неустойчивых систем. К этим особенностям, которые, безусловно, нуждаются в проверке и дополнительном уточнении, можно отнести:

— численный ранг r зависит от количества гармонических составляющих и вида модели (аддитивная или мультипликативная);

— численный ранг r имеет устойчивые зависимости изменения, определяемые видом модели, анализ которых позволяет спрогнозировать структурный состав временного (пространственного) ряда, образованного сложной гармонической функцией.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Measuring* nonstationarity by analyzing the loss of recurrence in dynamical systems / C. Rieke, et al. // Phys. Rev. Lett. — 2002. — Vol. 88, N 24. — P. 31—35.
2. *Гребенюк Е.А.* Обнаружение изменений свойств нестационарных случайных процессов // Автоматика и телемеханика. — 2003. — № 12. — С. 25—41.
3. *Гребенюк Е.А.* Анализ и оперативная диагностика систем, описываемых нестационарными случайными процессами // Проблемы управления. — 2003. — № 4. — С. 23—29.
4. *Дойников А.Н., Кедрин В.С., Сальникова М.К.* Методика синтеза математических моделей рядов макроэкономических показателей на основе алгоритмов сингулярного разложения // Вестник Иркутского гос. техн. ун-та. — 2006. — № 2. — С. 138—142.
5. *Дойников А.Н., Кедрин В.С., Сальникова М.К.* Моделирование нестационарных процессов с использованием алгоритмов их сингулярного разложения // Научно-технические ведомости СПбГПУ. — 2006. — № 5. — С. 143—147.
6. *Воеводин В.В., Кузнецов Ю.А.* Матрицы и вычисления. — М.: Наука, 1984. — 320 с.
7. *Голуб Дж., Ван Лоун Ч.* Матричные вычисления. — М.: Мир, 1999. — 548 с.
8. *Голяндина Н.Э.* Метод «Гусеница»-88А: анализ временных рядов: Учеб. пособие. — СПб.: Изд-во СПбГУ, 2004. — 76 с.
9. *Кузьмин О.В.* Обобщенные пирамиды Паскаля и их приложения. — Новосибирск: Наука; Сибирская издательская фирма РАН, 2000. — 294 с.
10. *Golub G.H., Reinsch C.* Singular Value Decomposition and least squares solutions. In Handbook for Automatic Computation. Vol. 2: Linear Algebra, by J.H. Wilkinson and C. Reinsch (Eds.). — N.-Y.: Springer-Verlag, 1971. — P. 134—151.

Статья представлена к публикации членом редколлегии В.Ю. Рутковским.

Олег Викторович Кузьмин — д-р физ.-мат. наук,
зав. кафедрой, Иркутский государственный университет,
☎ (3952) 24-22-14, ✉ quzminov@mail.ru,

Виктор Сергеевич Кедрин — канд. техн. наук, доцент,
филиал Иркутского государственного университета, г. Братск,
☎ (3953) 44-89-93, ✉ kedrinvs@mail.ru.