

# $H_\infty$ -УПРАВЛЕНИЕ ЭНЕРГЕТИЧЕСКОЙ СИСТЕМОЙ В АВАРИЙНОМ РЕЖИМЕ<sup>1</sup>.

## Ч. 2. Синтез робастного регулятора для управления энергетической системой

А.П. Курдюков, В.Н. Тимин

Вторая часть статьи посвящена решению задачи подавления влияния внешних возмущений в энергетической системе на ее выход. Эта задача решается на основе метода размещения полюсов замкнутой системы в заданной области на комплексной плоскости и  $H_\infty$ -метода формирования контура с помощью аппарата линейных матричных неравенств. Дано сравнение свойств замкнутых систем с регуляторами, синтезированными с применением и без применения  $H_\infty$ -метода формирования контура.

**Ключевые слова:** управление энергетической системой,  $H_\infty$ -теория управления, линейные матричные неравенства, подавление возмущений,  $H_\infty$ -метод формирования контура, расположение полюсов передаточной функции замкнутой системы в заданной области на комплексной плоскости.

### ВВЕДЕНИЕ

В первой части [1] настоящей статьи рассмотрены теоретические основы синтеза робастного  $H_\infty$ -регулятора, а именно: определение  $H_\infty$ -нормы, постановка и решение задач  $H_\infty$ -оптимизации и робастной стабилизации с помощью аппарата линейных матричных неравенств,  $H_\infty$ -метод формирования контура и метод расположения полюсов передаточной функции замкнутой системы в заданной выпуклой области на комплексной плоскости.

Во второй части статьи предложен метод решения задачи подавления внешних возмущений и решена задача синтеза регулятора в энергетической системе для подавления внешних возмущений. Метод синтеза  $H_\infty$ -оптимального регулятора с размещением полюсов передаточной функции замкнутой системы в ограниченной выпуклой области на комплексной плоскости позволяет задавать требования только к качеству переходных процессов (быстродействие и запас устойчивости). В предлагаемом методе при минимизации  $H_\infty$ -нормы передаточной функции замкнутой системы по-

мимо ограничений на размещение полюсов накладываются дополнительные частотные ограничения. Они состоят в частотных ограничениях на сингулярные числа передаточной функции разомкнутой системы. Способ формирования частотных ограничений состоит в построении желаемого обобщенного объекта. Формирующие функции, участвующие в построении желаемого обобщенного объекта, позволяют модифицировать форму контура разомкнутой системы. Это, в свою очередь, позволяет решать задачи подавления шумов и возмущений на входе и выходе объекта управления, повышения робастности к неопределенности в модели объекта и придания замкнутой системе астатических свойств.

### 3. МОДЕЛЬ ЭНЕРГЕТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ<sup>2</sup>

#### 3.1. Описание модели

Укрупненная схема модели рассматриваемой энергетической системы (ЭС) [2] приведена на рис. 6. Схема соединений модели выполнена в системе Matlab с помощью стандартных библиотечных блоков моделирования энергетической

<sup>1</sup> Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 06-08-01468).

<sup>2</sup> Нумерации разделов, рисунков и формул ч. II статьи продолжают нумерации ч. I.

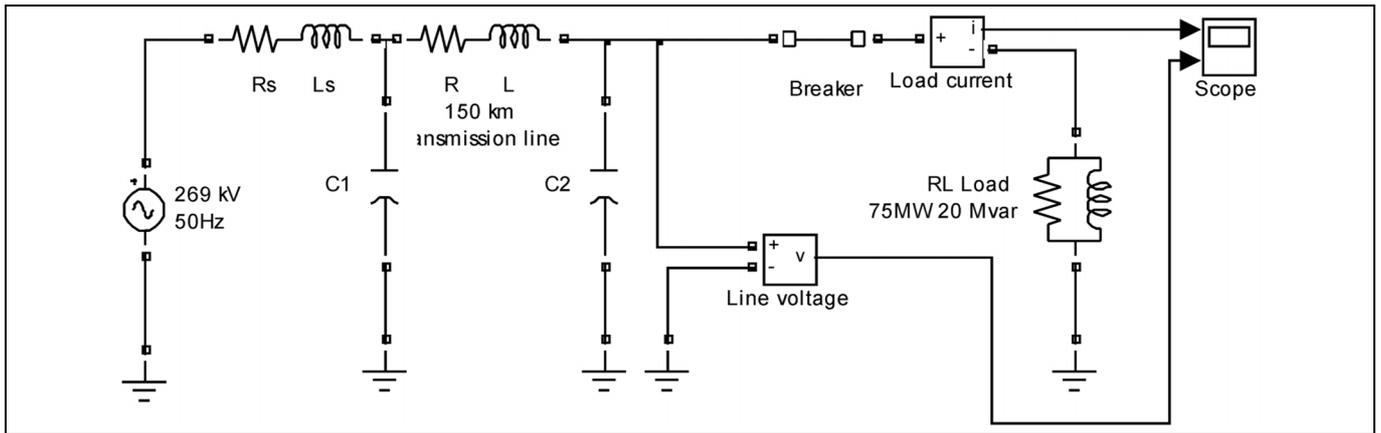


Рис. 6. Simulink-схема модели энергетической системы

системы SimPowerSystems среды Simulink. Модель состоит из генератора (269 кВ, 50 Гц), системы управления (регулятора), линии передачи протяженностью 150 км с активным ( $R = 5,2$  Ом) и индуктивным ( $L = 0,138$  Гн) сопротивлением, подводящих проводов ( $R_s = 5,2$  Ом,  $L_s = 0,138$  Гн), емкостей  $C_1$  в начале и  $C_2$  в конце линии передачи ( $C_1 = C_2 = 0,967$  мкФ), высоковольтного выключателя *Breaker* и нагрузки (75 МВт, 20 Мвар). Дополнительно на схеме изображены измерители тока *Load current* и напряжения *Line voltage*. Изменения тока и напряжения во времени выводятся в виде графиков с помощью блока визуализации *Scope*. Система управления на схеме не изображена.

Линеаризованная модель ЭС вблизи номинального режима работы описывается системой дифференциальных уравнений вида

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + B_w w + B_u u, \\ y_0 &= C_y x + D_w w. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Вектор внутреннего состояния  $x = [\Delta U_{C_1}, \Delta U_{C_2}, \Delta I_{RL}, \Delta I_{RLS}, \Delta I_{RLL}]^T$  описывается отклонениями от номинальных значений напряжений  $\Delta U_{C_1}$  и  $\Delta U_{C_2}$  — на емкостях  $C_1$  и  $C_2$  соответственно и токов  $\Delta I_{RL}, \Delta I_{RLS}$  и  $\Delta I_{RLL}$  — в линии передачи, подводящих проводах и цепи нагрузки соответственно.

Дополнительное управление  $u$ , реализуемое синтезированным  $H_\infty$ -регулятором, подается на выход генератора для компенсации возмущения  $w$  — отклонения тока через высоковольтный выключатель. Выход объекта  $y = (y_{01}, y_{02})^T$ , где  $y_{01}$  и  $y_{02}$  —

отклонения напряжения на высоковольтном выключателе и в линии передачи соответственно.

Матрицы модели (3.1) имеют вид:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1,034 \cdot 10^6 & -1,034 \cdot 10^6 & 0 \\ 0 & 0 & -1,034 \cdot 10^6 & 0 & 0 \\ -7,246 & 7,246 & -37,68 & 0 & 0 \\ 14,25 & 0 & 0 & -37,68 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -100,5 \end{bmatrix},$$

$$B_w = \begin{bmatrix} 0 \\ 1,034 \cdot 10^6 \\ 0 \\ 0 \\ 100,5 \end{bmatrix}, \quad B_u = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 14,25 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$C_y = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 235,1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D_w = \begin{bmatrix} -235,1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Линейную динамическую модель ЭС (3.1) будем называть объектом управления. У него один управляемый вход  $u$  и два выхода  $y_{01}$  и  $y_{02}$ , на него действует одно входное внешнее возмущение  $w$ .

Объекту управления соответствуют матричные передаточные функции  $G(s) = C_y(sI - A)^{-1}B_u$  от управления  $u$  к выходу  $y_0$  и  $G_w(s) = C_y(sI - A)^{-1}B_w + D_w$  от возмущения  $w$  к выходу  $y_0$ ;  $I$  — единичная матрица.

### 3.2. Анализ модели

Объект управления (3.1) устойчив, поскольку собственные значения матрицы состояния  $A$  (корни ее характеристического полинома)  $\lambda_{1,2}(A) = -18,84 \pm 5036,6i$ ,  $\lambda_{3,4}(A) = -18,84 \pm 2086i$ ,  $\lambda_5(A) = -100,5$ . Матрица  $A$  характеризуется плохой

обусловленностью, так как порядок ее числа обусловленности  $10^5$ . Значения действительных и соотношения мнимых и действительных частей корней определяют слабое затухание и высокую колебательность (слабое демпфирование) объекта. Это подтверждается видом переходных процессов при единичных входных воздействиях по возмущению  $w$  (рис. 7) и входу  $u$  (рис. 8). Сравнительный анализ графиков переходных процессов показывает, что возмущение  $w$  вызывает существенно более сильные по амплитуде (примерно на два порядка) колебания выхода объекта (отклонение напряжения  $V$  на высоковольтном выключателе и отклонение напряжения в линии передачи).

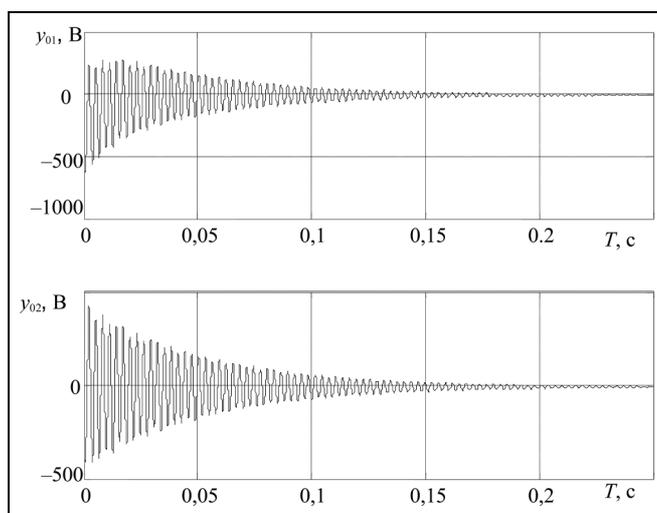


Рис. 7. Реакция объекта управления на единичное воздействие по возмущению  $w$

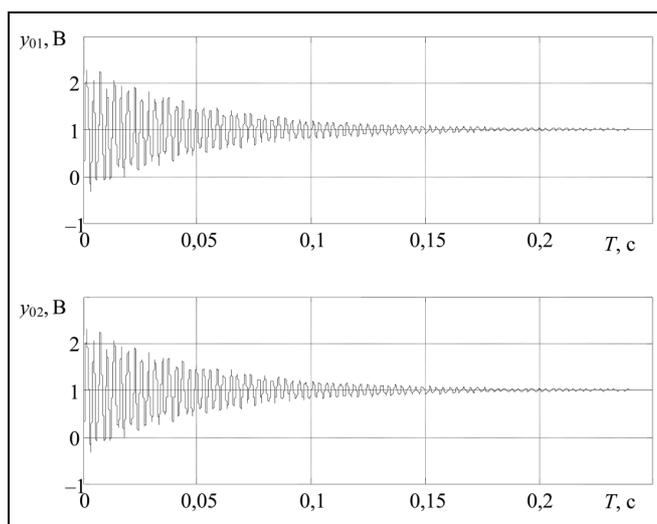


Рис. 8. Реакция объекта управления на единичное воздействие по управлению  $u$

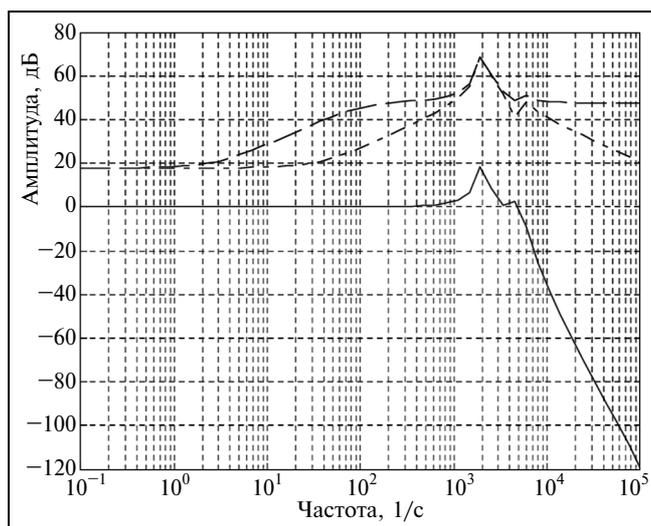


Рис. 9. Логарифмические амплитудно-частотные характеристики передаточных функций  $G(s)$  и  $G_w(s)$

Численный анализ управляемости по ранговому критерию Калмана с помощью пакета Matlab показал, что объект является наблюдаемым, но неуправляемым. Однако применение ленточных критериев управляемости и наблюдаемости [3] для сбалансированной реализации объекта управления позволило установить [2], что он управляемый.

Рассмотрим частотные свойства объекта управления. На рис. 9 приведены графики логарифмических амплитудно-частотных характеристик (ЛАХ) передаточной функции  $G_w(s)$  от возмущения  $w$  к выходам объекта  $y_{01}$  (штриховая линия) и  $y_{02}$  (штрих-пунктирная) и передаточной функции  $G(s)$  от управления  $u$  к выходам объекта  $y_{01}$  и  $y_{02}$  (сплошная линия). Передаточные функции от  $u$  к  $y_{01}$  и  $y_{02}$  тождественны, поэтому их графики ЛАХ совпадают.

На низких частотах коэффициент усиления объекта  $G(s)$  до частоты примерно  $100 \text{ с}^{-1}$  равен единице. На графике наблюдается два резонансных пика. Наиболее сильный из них на частоте  $2086 \text{ с}^{-1}$  достигает примерно 18 дБ. Поведение графиков ЛАХ  $G_w(s)$  показывает, что возмущение  $w$  воздействует на выходы объекта  $y_{01}$  и  $y_{02}$  существенно различно. Если по выходу  $y_{02}$  полоса пропускания ограничена, то по выходу  $y_{01}$  такого не наблюдается. Отметим, что в силу ненулевого элемента матрицы  $D_w$  коэффициент усиления передаточной функции  $G_w(s)$  от  $w$  к  $y_{01}$  после частоты примерно  $10\,000 \text{ с}^{-1}$  имеет постоянное значение (примерно 47 дБ). Резонансный пик ЛАХ  $G_w(s)$  по



каждому выходу составляет примерно 69 дБ. В области низких частот коэффициент усиления примерно 18 дБ. Таким образом, модель ЭС имеет слабое затухание и высокую колебательность (слабое демпфирование) при наличии двух резонансных частот, а на низких частотах коэффициент усиления по управлению  $u$  равен единице.

#### 4. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Дан объект управления (модель ЭС), описываемый в пространстве состояний системой уравнений (3.1).

Требуется синтезировать регулятор  $K(s)$  полного порядка в виде динамической обратной связи  $U(s) = K(s)Y(s)$  по измеряемому выходу  $y$ , гарантирующий устойчивость замкнутой системы и для управляемого выхода  $y_0$  обеспечивающий:

- переходные процессы, близкие к апериодическим;
- время регулирования, не превышающее заданного значения;
- высокий запас устойчивости замкнутой системы.

Регулятор  $K(s)$  ищется в пространстве состояний в форме наблюдателя

$$\dot{x}_c = A_c x_c + B_c y,$$

$$u = C_c x_c + D_c y.$$

#### 5. $H_\infty$ -СИНТЕЗ С ОГРАНИЧЕНИЕМ НА РАЗМЕЩЕНИЕ ПОЛЮСОВ

Основная идея метода, изложенного в работе [4] и применяемого далее, состоит в минимизации функционала качества с ограничением на принадлежность некоторому множеству, т. е. в условной минимизации функционала. Функционалом качества служит  $H_\infty$ -норма передаточной функции замкнутой системы, а множеством выступает выпуклая область на комплексной плоскости, задающая ограничение на размещение полюсов передаточной функции замкнутой системы. Применение аппарата линейных матричных неравенств (ЛМН) позволило свести задачу синтеза  $H_\infty$ -оптимального регулятора с размещением полюсов передаточной функции замкнутой системы в ограниченной выпуклой области на комплексной плоскости к решению системы ЛМН (см. п. 2.2 и п. 2.4 первой части [1] настоящей статьи).

Рассмотрим постановку и решение задачи синтеза  $H_\infty$ -регулятора для управления ЭС в соответствии с методом, предложенным в работе [4].

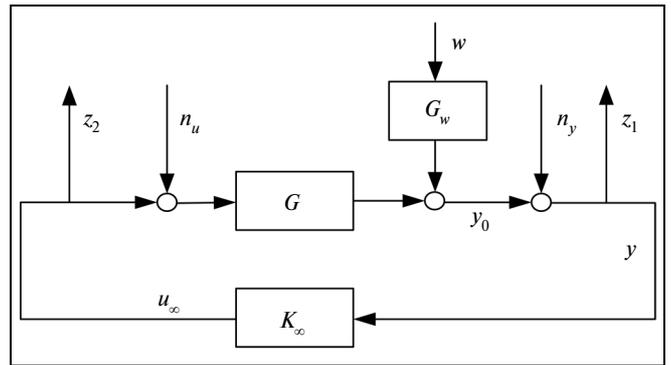


Рис. 10. Замкнутая система управления энергетической системы

Структурная схема замкнутой системы управления, используемая при синтезе  $H_\infty$ -регулятора, представлена на рис. 10. Внешними входами замкнутой системы являются внешнее возмущение  $w$  на выходе объекта, возмущение на входе объекта  $n_u$  и шум измерений  $n_y$ . Выходом  $z_1$  замкнутой системы является измеряемый выход объекта  $y$ , а выходом  $z_2$  — управление  $u_\infty$ , формируемое регулятором  $K_\infty$ ;  $G$  — передаточная функция от управления к выходу объекта  $y_0$ , а  $G_w$  — передаточная функция от возмущения  $w$  к выходу объекта  $y_0$ .

Замкнутой системе управления соответствует стандартный объект вида

$$\begin{bmatrix} z_1(s) \\ z_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y(s) \\ u_\infty(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_w & G & I_y \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w(s) \\ n_u(s) \\ n_y(s) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} G \\ I_u \end{bmatrix} u_\infty(s),$$

$$y(s) = [G_w \ G \ I_y] \begin{bmatrix} w(s) \\ n_u(s) \\ n_y(s) \end{bmatrix} + [G] u_\infty(s), \quad (5.1)$$

где  $I_y$  и  $I_u$  — единичные матрицы соответствующей размерности.

В принятых в уравнениях (2.1) [1] обозначениях многомерные передаточные функции имеют вид

$$P_{11} = \begin{bmatrix} G_w & G & I_y \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad P_{12} = \begin{bmatrix} G \\ I_u \end{bmatrix},$$

$$P_{21} = [G_w \ G \ I_y], \quad P_{22} = [G].$$

Передаточная функция замкнутой системы  $T_{w_1 z}$  от всех внешних входов  $w_1 = [w^T, n_u^T, n_y^T]^T$  к

выходам замкнутой системы  $z = [y^T, u_\infty^T]^T$  имеет вид

$$T_{w_1 z} = \quad (5.2)$$

$$= \begin{bmatrix} (I - GK_\infty)^{-1} G_w & (I - GK_\infty)^{-1} G & (I - GK_\infty)^{-1} \\ K_\infty (I - GK_\infty)^{-1} G_w & K_\infty (I - GK_\infty)^{-1} G & K_\infty (I - GK_\infty)^{-1} \end{bmatrix}.$$

Описанию стандартного объекта в виде передаточных функций (5.1) в пространстве состояний соответствует описание вида

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + B_1 u + B_2 u, \\ z &= C_1 x + D_{11} w + D_{12} u, \\ y &= C_2 x + D_{21} w + D_{22} u, \end{aligned} \quad (5.3)$$

где матрицы стандартного объекта включают в себя матрицы представления в пространстве состояний номинального объекта  $G$  и передаточной функции  $G_w$ .

Сформулируем постановку задачи [4]. Рассмотрим стандартный объект управления в пространстве состояний (5.3). Для заданной ЛМН-области (см. рис. 4 [1])

$$D = \{z \in C^- : L + zM + \bar{z}M^T\} \quad (5.4)$$

требуется найти динамический регулятор полного порядка

$$K_\infty := \begin{cases} \dot{x}_{c\infty} = A_{c\infty} x_{c\infty} + B_{c\infty} u, \\ u_\infty = C_{c\infty} x_{c\infty} + D_{c\infty} u, \end{cases} \quad (5.5)$$

обеспечивающий:

- выполнение равенства

$$\|T_{w_1 z}(G, K_\infty)\|_\infty = \gamma_{\min} \quad (5.6)$$

для  $H_\infty$ -нормы передаточной функции (5.2) замкнутой системы;

- размещение полюсов передаточной функции замкнутой системы в выпуклой области  $D$ .

Решение  $H_\infty$ -оптимальной задачи (5.6) при ограничении на размещение полюсов передаточной функции замкнутой системы в заданной ЛМН-области (5.4) (см. рис. 4 [1]), описываемой характеристической функцией (2.4), сводится к решению системы ЛМН (5.7 — 5.9).

Система ЛМН имеет следующий вид:

$$\begin{bmatrix} R & I \\ I & S \end{bmatrix} > 0, \quad (5.7)$$

$$\left[ L \otimes \begin{bmatrix} R & I \\ I & S \end{bmatrix} + M \otimes \Phi + M^T \otimes \Phi^T \right] < 0, \quad (5.8)$$

$$\begin{bmatrix} \Psi_{11} & \Psi_{21}^T \\ \Psi_{21} & \Psi_{22} \end{bmatrix} < 0, \quad (5.9)$$

где

$$\Phi = \begin{bmatrix} AR + B_2 C_{c\infty} & A + B_2 D_{c\infty} C_2 \\ \hat{A}_c & SA + \hat{B}_c C_2 \end{bmatrix},$$

$$\Psi_{11} = \begin{bmatrix} AR + RA^T + B_2 \hat{C}_c + \hat{C}_c^T B_2^T & B_1 + B_2 D_{c\infty} D_{21} \\ (B_1 + B_2 D_{c\infty} D_{21})^T & -\gamma I \end{bmatrix},$$

$$\Psi_{21} = \begin{bmatrix} \hat{A}_c + (A + B_2 D_{c\infty} C_2)^T & SB_1 + \hat{B}_c D_{21} \\ C_1 R + D_{12} \hat{C}_c & D_{11} + D_{12} D_{c\infty} D_{21} \end{bmatrix},$$

$$\Psi_{22} = \begin{bmatrix} A^T S + SA + \hat{B}_c C_2 + C_2^T \hat{B}_c^T & (C_1 + D_{12} D_{c\infty} C_2)^T \\ C_1 + D_{12} D_{c\infty} C_2 & \gamma I \end{bmatrix},$$

символ  $\otimes$  означает кронекерово произведение матриц.

Регулятор вида (5.5) определяется минимальным значением  $\gamma$ , при котором существуют две симметричные матрицы  $R$  и  $S$  и матрицы  $\hat{A}_c$ ,  $\hat{B}_c$ ,  $\hat{C}_c$  и  $D_{c\infty}$ .

Если ЛМН (5.7—5.9) разрешимы, то матрицы регулятора (5.5)  $A_{c\infty}$ ,  $B_{c\infty}$  и  $C_{c\infty}$  определяются из решения системы линейных уравнений

$$\hat{B}_c = NB_{c\infty} + SB_2 D_{c\infty},$$

$$\hat{C}_c = C_{c\infty} M^T + D_{c\infty} C_2 R,$$

$$\begin{aligned} \hat{A}_c &= NA_{c\infty} M^T + NB_{c\infty} C_2 R + SB_2 C_{c\infty} M^T + \\ &+ S(A + B_2 D_{c\infty} C_2) R, \end{aligned} \quad (5.10)$$

где  $M$  и  $N$  — любые квадратные матрицы, такие что

$$MN^T = I - RS. \quad (5.11)$$

Линейные матричные неравенства (5.7—5.9) решаются численно с помощью методов, описанных в работах [5, 6].



### 6. $H_\infty$ -СИНТЕЗ С ОГРАНИЧЕНИЕМ НА РАЗМЕЩЕНИЕ ПОЛЮСОВ И ЧАСТОТНЫМ ОГРАНИЧЕНИЕМ

В данной работе предлагается модификация метода синтеза  $H_\infty$ -оптимального регулятора с размещением полюсов передаточной функции замкнутой системы в ограниченной выпуклой области на комплексной плоскости [4]. При минимизации функционала предлагается наложить еще один вид ограничения. Он состоит в частотных ограничениях на сингулярные числа передаточной функции разомкнутой системы, идеология формирования которых сформулирована в работе [7] при описании  $H_\infty$ -метода формирования контура (высокий коэффициент усиления на низких частотах, малый коэффициент усиления на высоких частотах, плавный переход в области частот среза с наклоном, близким к  $-20$  дБ на декаду). Таким образом, предлагается метод синтеза регулятора, при котором минимизируется  $H_\infty$ -норма передаточной функции замкнутой системы с учетом ограничений на размещение полюсов передаточной функции замкнутой системы и частотных ограничений на сингулярные числа передаточной функции разомкнутой системы. Способ формирования частотных ограничений состоит в построении желаемого поведения графиков сингулярных чисел разомкнутой системы (см. п. 2.6 [1]), а не в задании ограничений в виде неравенств снизу и сверху на графики сингулярных чисел (см. рис. 2). Желаемое поведение сингулярных чисел, по аналогии с  $H_\infty$ -методом формирования контура, задается в виде обобщенного объекта (см. п. 2.6). Одной из мер «близости» сингулярных чисел разомкнутой системы и обобщенного объекта может выступать значение  $H_\infty$ -нормы передаточной функции замкнутой системы (см. п. 2.6).

Рассмотрим постановку и решение задачи синтеза  $H_\infty$ -регулятора для управления ЭС.

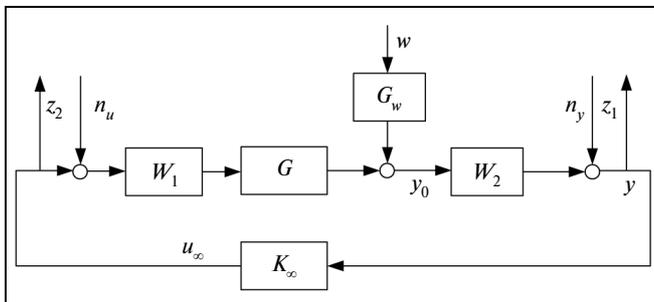


Рис. 11. Замкнутая система управления с формирующими функциями

Структурная схема замкнутой системы управления приведена на рис. 11. Она отличается от схемы, изображенной на рис. 10, только тем, что в структурной схеме введены формирующие передаточные функции: префильтр  $W_1$  и постфильтр  $W_2$ .

Замкнутой системе управления соответствует стандартный объект вида

$$\begin{bmatrix} z_1(s) \\ z_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y(s) \\ u_\infty(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_2 G_w & W_2 G W_1 & I_y \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w(s) \\ n_u(s) \\ n_y(s) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} W_2 G W_1 \\ I_u \end{bmatrix} u_\infty(s),$$

$$y(s) = [W_2 G_w \quad W_2 G W_1 \quad I_y] \begin{bmatrix} w(s) \\ n_u(s) \\ n_y(s) \end{bmatrix} + W_2 G W_1 u_\infty(s) \quad (6.1)$$

Соответствующие блоки матрицы передаточной функции стандартного объекта (2.1) [1] имеют вид

$$P_{11} = \begin{bmatrix} W_2 G_w & W_2 G W_1 & I_y \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad P_{12} = \begin{bmatrix} W_2 G W_1 \\ I_u \end{bmatrix},$$

$$P_{21} = [W_2 G_w \quad W_2 G W_1 \quad I_y],$$

$$P_{22} = W_2 G W_1.$$

Передаточная функция замкнутой системы  $T_{w_1 z}$  от всех внешних входов  $w_1 = [w^T, n_u^T, n_y^T]^T$  к выходам замкнутой системы  $z = [y^T, u_\infty^T]^T$  задается формулой

$$T_{w_1 z} = \begin{bmatrix} (I - G_s K_\infty)^{-1} W_2 G_w & (I - G_s K_\infty)^{-1} G_s & (I - G_s K_\infty)^{-1} \\ K_\infty (I - G_s K_\infty)^{-1} W_2 G_w & K_\infty (I - G_s K_\infty)^{-1} G_s & K_\infty (I - G_s K_\infty)^{-1} \end{bmatrix}, \quad (6.2)$$

где  $G_s = W_2 G W_1$  — обобщенный объект.

Описанию стандартного объекта в виде передаточных функций (6.1) в пространстве состояний соответствует описание вида

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + B_1 w + B_2 u, \\ z &= C_1 x + D_{11} w + D_{12} u, \\ y &= C_2 x + D_{21} w + D_{22} u, \end{aligned} \quad (6.3)$$

где матрицы стандартного объекта включают в себя матрицы представления в пространстве состоя-

ний не только номинального объекта  $G$  и передаточной функции  $G_w$ , но и формирующих функций  $W_1$  и  $W_2$ .

Рассмотрим постановку задачи синтеза. Дан стандартный объект управления, представленный в пространстве состояний в виде (6.3). Для заданной ЛМН-области

$$D = \{z \in C^- : L + zM + \bar{z}M^T\}$$

требуется найти динамический регулятор полного порядка

$$K(s) := \begin{cases} \dot{x}_c = A_c x_c + B_c y, \\ u_\infty = C_c x_c + D_c y, \end{cases} \quad (6.5)$$

обеспечивающий:

- выполнение равенства

$$\|T_{w,z}(G_S, K_\infty)\|_\infty = \gamma_{\min} \quad (6.6)$$

для  $H_\infty$ -нормы передаточной функции замкнутой системы;

- размещение полюсов передаточной функции замкнутой системы в выпуклой области  $D$ ;
- частотные ограничения на сингулярные числа разомкнутой системы.

Алгоритм синтеза состоит из следующих шагов.

**Шаг 1. Формирование требований.** Задаются:

- ЛМН-область, в которой требуется обеспечить размещение полюсов передаточной функции замкнутой системы;
- префильтр  $W_1(s)$  и постфильтр  $W_2(s)$  и формируется обобщенный объект  $G_s = W_2 G W_1$ , задающий требования к желаемым сингулярным числам разомкнутой системы.

**Шаг 2. Оценка совместимости требований.** Решается задача  $H_\infty$ -оптимизации для обобщенного объекта  $G_s = W_2 G W_1$  по методике, описанной в § 5. Решается система ЛМН (5.7–5.9) для стандартного объекта вида (6.3), которому соответствует представление стандартного объекта с помощью передаточных функций (6.1).

Если решения  $R, S, \hat{A}_c, \hat{B}_c, \hat{C}_c, D_{c_\infty}$  ЛМН (5.7–5.9) не существует, то возврат к шагу 1, иначе вычисляется  $K_\infty$ -регулятор с учетом соотношений (5.10), (5.11), и переход к шагу 3.

**Шаг 3. Синтез регулятора.**

- вычисляется регулятор  $K$  в виде  $K = W_1 K_\infty W_2$ ;
- если требования к качеству функционирования замкнутой системы по ее свойствам во временной и частотной областях не удовлетворяются, то возврат к шагу 1, иначе — окончание алгоритма.

Рассмотрим некоторые модификации предложенного метода:

- если  $W_1(s)$  и  $W_2(s)$  — единичные матрицы соответствующих размерностей, то предложенный метод эквивалентен методу, описанному в § 5 ( $H_\infty$ -синтез с ограничением на размещение полюсов замкнутой системы). В этом случае  $G_s = W_2 G W_1 = G$ , т. е. обобщенный объект совпадает с номинальным;
- если отсутствует входное возмущение  $w$ , т. е.  $w(t) \equiv 0$ , то предложенный метод эквивалентен  $H_\infty$ -методу формирования контура с ограничением на размещение полюсов замкнутой системы [8]. В этом случае передаточная функция замкнутой системы (6.2) принимает вид (2.12) и выполняются условия (2.15) [1].

Таким образом, предложенный метод обобщает два указанных метода.

Рассмотрим последовательность шагов алгоритма. На первом шаге задаются требования к проектируемой замкнутой системе. Несогласованность для номинального объекта  $G$  требований в виде формы ЛМН-области и формирующих функций приводит либо к отсутствию решений системы ЛМН (5.7–5.9), либо к достаточно большому значению  $H_\infty$ -нормы передаточной функции замкнутой системы. Существование решения задачи  $H_\infty$ -оптимизации, выполняемой на втором шаге алгоритма, гарантирует устойчивость замкнутой системы. В случае существования решения задачи  $H_\infty$ -оптимизации на третьем шаге определяется искомый регулятор в виде комбинации  $K_\infty$ -регулятора, префильтра  $W_1$  и постфильтра  $W_2$ . Напомним, что форма ЛМН-области задает ограничения на параметр затухания (коэффициент демпфирования), степень устойчивости и максимальную угловую частоту собственных колебаний замкнутой системы. Эти ограничения при синтезе регулятора должны выполняться строго. При невыполнении заданных ограничений не будет существовать решений системы ЛМН (5.7–5.9). Частотные ограничения на сингулярные числа разомкнутой системы выполняются не строго, а с некоторой точностью. Одной из возможных оценок этой точности может служить значение  $H_\infty$ -нормы передаточной функции замкнутой системы (см. п. 2.6 [1]). Дополнительно возможна проверка качества функционирования замкнутой системы по ее частотным свойствам. Для этого необходимо рассмотреть частотные свойства полученной замкнутой системы в аспекте оценки точностных характеристик, оценки запаса устойчивости по амплитуде и фазе и (или) показателю колебательности, оценки чувс-



твительности к внешним возмущениям и шумам, а также робастной устойчивости замкнутой системы.

В случае существования решения и не вполне удовлетворительного качества функционирования замкнутой системы разработчик в процессе итерационной процедуры имеет возможность варьировать пятью «параметрами» алгоритма, а именно:

- коэффициентом демпфирования или колебательности,
- степенью устойчивости;
- максимальной частотой собственных колебаний, задавая форму ЛМН-области;
- двумя формирующими функциями  $W_1(s)$  и  $W_2(s)$ .

Принятие решения об окончании процедуры синтеза регулятора остается за разработчиком. В предложенном итерационном методе качество переходных процессов (быстродействие и запас устойчивости) задаются формой ЛМН-области на комплексной плоскости. Это обеспечивает переходные процессы, близкие к апериодическим, в соответствии с заданным значением колебательности или параметра затухания, а время переходного процесса характеризуется заданной степенью устойчивости. Для уменьшения влияния внешних возмущений и шума измерений вводятся формирующие функции  $W_1(s)$  и  $W_2(s)$ , которые модифицируют форму сингулярных чисел исходного номинального объекта  $G(s)$  в области низких и высоких частот в соответствии с требованиями проектировщика.

Алгоритм синтеза искомого регулятора можно рассматривать как метод, в котором передаточная функция регулятора представлена в виде произведения передаточных функций неизменяемой и изменяемой частей. Таким образом, разработчик предписывает некоторые свойства проектируемому регулятору и, соответственно, замкнутой системе в нужных частотных диапазонах. Неизменяемая часть регулятора задается префильтром  $W_1(s)$  и постфильтром  $W_2(s)$ . Постфильтр  $W_2(s)$  предназначен в первую очередь для подавления шума и характеризует поведение системы в высокочастотной области. Обычно он реализуется с помощью низкочастотных фильтров. Префильтр  $W_1(s)$  задает поведение системы в области низких частот и может быть выбран в виде пропорциональных и интегральных фильтров. Изменяемая часть регулятора получается автоматически в результате минимизации  $H_\infty$ -нормы передаточной функции замкнутой системы.

## 7. СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ РЕЗУЛЬТАТОВ СИНТЕЗА

Предложенный метод (см. § 6) сравнивался с методом, описанным в § 5 [4]. В качестве ЛМН-области (см. рис. 4) была выбрана область на комплексной плоскости, которая образована пересечением двух полуплоскостей и сектора. Она определяется характеристической функцией (2.4).

Численное решение задачи синтеза реализовано в системе Matlab с применением программы `hinfmix` из пакета решения линейных матричных неравенств LMI Control Toolbox.

Вычислительные эксперименты по синтезу регулятора обоими методами показали, что переместить полюс  $\lambda_5(A) = -100,5$  номинального объекта  $G$  не представляется возможным. При задании ограничений на степень устойчивости  $\eta > 100,5$  замкнутой системы решений системы ЛМН не существует, а, следовательно, не существует и регулятора, обеспечивающего заданную степень устойчивости.

Таким образом, заданная степень устойчивости  $\eta$  в обоих методах была выбрана равной 100. Ее определяет первая полуплоскость  $\text{Re}(\lambda) < -100$ . Вторая полуплоскость  $\text{Re}(\lambda) > -20\,000$  ограничивает максимальную угловую частоту собственных колебаний  $\omega_0 = 20\,000 \cdot \text{tg}\varphi$ . Отметим, что значение угла  $\varphi$  в обоих методах различно.

Рассмотрим синтез регулятора методом, представленным в работе [4]. Для краткости назовем его методом без формирующих функций. Минимальное ограничение на значение угла  $\varphi$ , а, следовательно, колебательности, было достигнуто  $3\pi/10$ . При меньших значениях угла  $\varphi$   $H_\infty$ -регулятора, минимизирующего  $H_\infty$ -норму передаточной функции замкнутой системы, не существует. Значение  $H_\infty$ -нормы замкнутой системы было получено равным 916,36. Корни характеристического полинома или собственные значения матрицы  $A_{cl}$  замкнутой системы с данным регулятором  $\lambda_1 = -1,005 \cdot 10^2$ ,  $\lambda_2 = -1,33 \cdot 10^2$ ,  $\lambda_3 = -1,77 \cdot 10^3$ ,  $\lambda_{4,5} = -2,53 \cdot 10^3 \pm \pm 2,63 \cdot 10^3 i$ ,  $\lambda_{6,7} = -3,94 \cdot 10^3 \pm 2,50 \cdot 10^3 i$ ,  $\lambda_8 = -9,30 \cdot 10^3$ ,  $\lambda_9 = -1,04 \cdot 10^4$ ,  $\lambda_{10} = -1,66 \cdot 10^4$ .

Как видно из этих значений, максимальная колебательность  $\mu_{\max} = \text{Im}(\lambda_{4,5})/\text{Re}(\lambda_{4,5})$  составляет 1,04, что соответствует параметру затухания (коэффициенту демпфирования) 0,69.

Проведем анализ результатов синтеза регулятора в соответствии с предложенным методом. Для краткости назовем его методом с формирующими функциями.

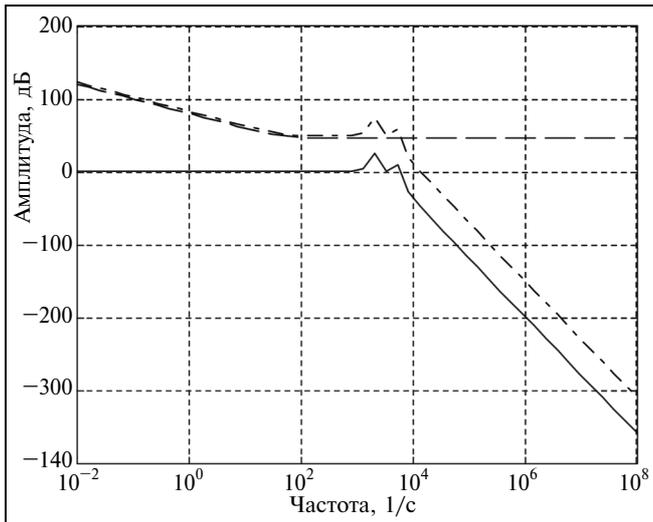


Рис. 12. Максимальные сингулярные числа обобщенного  $G_s$  (штрих-пунктирная линия) и номинального  $G$  (сплошная линия) объектов и префильтра  $W_1$  (штриховая линия)

Обобщенный объект  $G_s$  получен при выборе префильтра  $W_1(s)$  в виде изодромного звена  $W_1(s) = k_1 + k/s$  с параметрами  $k = 10\,000$  и  $k_1 = 200$ . Постфильтр  $W_2(s)$  принимается единичной матрицей размерности 2, равной размерности выхода  $y_0$ .

Графики максимальных сингулярных чисел префильтра  $W_1(s)$ , номинального объекта  $G(s)$  и обобщенного объекта  $G_s = GW_1$  приведены на рис. 12. Префильтр  $W_1(s)$  корректирует исходный номинальный объект  $G(s)$  в области низких и высоких частот.

При алгоритме синтеза регулятора для обобщенного объекта  $G_s$  минимальное ограничение на значение угла  $\varphi$  составило  $\pi/12$ , что существенно меньше, чем в методе без формирующих функций ( $3\pi/10$ ). Это позволяет синтезировать регулятор с более низким значением колебательности.  $H_\infty$ -норма замкнутой системы при синтезе регулятора равна 810,84 (в методе без формирующих функций — 916,36). Собственные значения матрицы  $A_{cl}$  замкнутой систем  $\lambda_1 = -1,005 \cdot 10^2$ ,  $\lambda_{2,3} = -1,31 \cdot 10^2 \pm 1,17i$ ,  $\lambda_4 = -1,32 \cdot 10^2$ ,  $\lambda_5 = -9,33 \cdot 10^2$ ,  $\lambda_6 = -2,77 \cdot 10^3$ ,  $\lambda_7 = -4,79 \cdot 10^3$ ,  $\lambda_8 = -6,45 \cdot 10^3$ ,  $\lambda_9 = -9,45 \cdot 10^3$ ,  $\lambda_{10} = -1,70 \cdot 10^4$ ,  $\lambda_{11,12} = -1,92 \cdot 10^4 \pm 3,82 \cdot 10^3i$ .

Анализ собственных значений показывает, что только две пары собственных значений комплексно сопряженные с малым значением колебательности. Максимальная колебательность примерно в 5 раз меньше, чем в методе без формирующих

функций:  $\mu_{\max} = 0,2$  (параметр затухания  $\zeta = 0,98$ ). Это значение характеризует вполне удовлетворительные запасы устойчивости замкнутой системы. Остальные собственные значения вещественные. Таким образом, предложенный метод позволяет получить запасы устойчивости замкнутой системы больше, чем метод без формирующих функций.

Рассмотрим свойства замкнутых систем во временной области при воздействии единичного возмущения  $w$ . На рис. 13 приведена реакция замкнутой системы с регулятором, синтезированным методом без формирующих функций, а на рис. 14 — с формирующими функциями. Выходу  $y_{01}$  соответствует сплошная линия, а выходу  $y_{02}$  — штриховая.

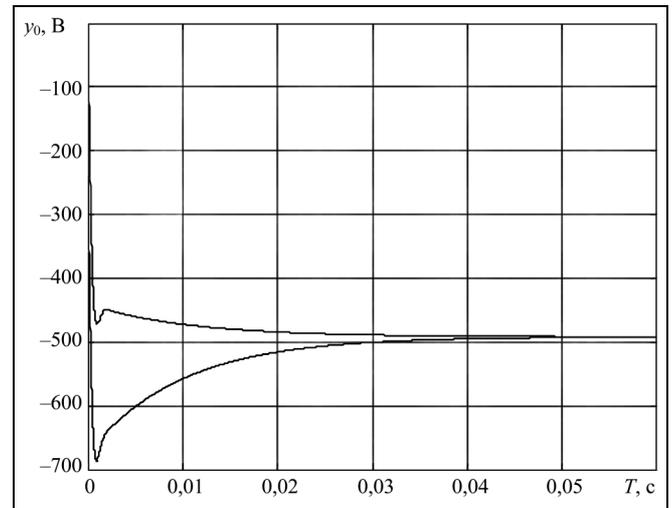


Рис. 13. Реакция замкнутой системы на единичное воздействие по возмущению  $w$  (без формирующих функций)

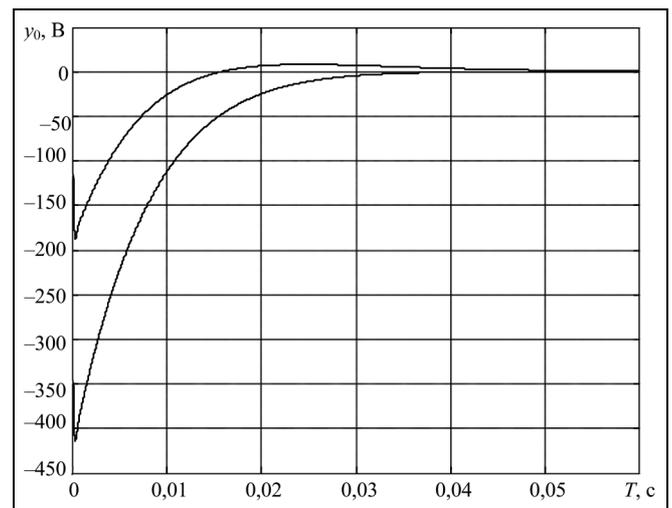


Рис. 14. Реакция замкнутой системы на единичное воздействие (предложенный метод)



Из графиков видно, что время переходного процесса при обоих методах не превышает 0,05 с. В предложенном методе наблюдается практически апериодическое поведение переходных процессов по обоим выходам. Кроме того, замкнутая система является астатической системой первого порядка, т. е. ее ошибка асимптотически стремится к нулю. Это свойство замкнутой системы определяется интегральным членом в формирующей функции  $W_1(s)$ .

При синтезе регулятора методом без формирующих функций существует статическая ошибка, одинаковая по обоим выходам (примерно 490 В), и наблюдаются более колебательные переходные процессы по обоим выходам. Максимальные отклонения в предложенном методе существенно меньше, чем в методе без формирующих функций. По первому выходу соответственно 690 и 410 В, а по второму — 470 и 190 В.

Таким образом, регулятор, синтезированный по предложенной методике, при практически одинаковом быстродействии обеспечивает более высокие запасы устойчивости и точностные характеристики.

Из сравнения графиков переходных процессов (см. рис. 7 и 14) при воздействии единичного внешнего воздействия видно, что замкнутая система с регулятором, синтезированным по предложенной методике, обеспечивает переходные процессы, близкие к апериодическим, большие запасы устойчивости и более высокое быстродействие.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предложен метод синтеза робастного регулятора для подавления внешних возмущений, объединяющий  $H_\infty$ -метод формирования контура и  $H_\infty$ -синтез с ограничением на размещение полюсов замкнутой системы в заданной области на комплексной плоскости. Задача синтеза регулято-

ра решается с помощью аппарата линейных матричных неравенств.

В соответствии с предложенным методом решения задача подавления внешних возмущений (отключение нагрузки) для энергетической системы. Замкнутая система с синтезированным регулятором обеспечивает переходные процессы, близкие к апериодическим, высокие запасы устойчивости и удовлетворительное быстродействие.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Курдюков А.П., Тимин В.Н.  $H_\infty$ -управление энергетической системой в аварийном режиме. Ч. I. Теоретические основы синтеза робастных  $H_\infty$ -регуляторов // Проблемы управления. — 2009. — № 1. — С. 8–17.
2. LMI-Based Robust Controller Design for Power Systems / A.P. Kurdyukov, M.S. Misrikhanov, V.N. Ryabchenko, and M.M. Tchaikovsky // Intern. Conf. on Mathematical Problems in Engineering, Aerospace and Sciences, Genoa, Italy, 2008.
3. Мисриханов М.Ш. Инвариантное управление многомерными системами. Алгебраический подход. — М.: Наука, 2007.
4. Chilali M., and Gahinet P.  $H_\infty$  Design with Pole Placement Constraints: An LMI Approach // IEEE Trans. AC. — 1996. — Vol. 41, N 3. — P. 358–367.
5. Nesterov Y., and Nemirovskii A. Interior Point Polynomial Algorithms in Convex Programming: Theory and Applications // SIAM Studies Appl. — 1994. — Math. — Vol. 13.
6. Nemirovskii A., and Gahinet P. The Projective Method for Solving Linear Matrix Inequalities // Math. Programming Series B. 1997. — Vol. 77. — P. 163–190.
7. McFarlane and Glover K. A Loop Shaping Design Procedure Using  $H_\infty$  Synthesis // IEEE Trans. AC. — 37(6). — P. 759–769.
8. Bikash Pal, Balarko Chaudhuri, Robust Control in Power Systems. — N.-Y.: Springer Science + Business Media, Inc., 2005. — P. 140–150.

Статья представлена к публикации членом редколлегии С.Д. Земляковым.

**Курдюков Александр Петрович** — д-р техн. наук, зав. лаб., ☎(495) 334-92-61, e-mail: akurd@ipu.ru,

**Тимин Виктор Николаевич** — канд. техн. наук, ст. науч. сотрудник, ☎(495) 334-92-41, e-mail: timin.victor@ Rambler.ru,

Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, г. Москва.

*Новые книги*

**Боголюбов Н.Н.** Собрание научных трудов. Т. 10. — М.: Наука, 2008. — 736 с.

**Бондаренко С.Б.** Теория дескриптивных систем. — М.: URSS, 2008. — 187 с.

**Васильков Г.В.** Эволюционная теория жизненного цикла механических систем. — М.: URSS, 2008. — 311 с.

**Граничин О.Н.** Информационные технологии в управлении. — М.: БИНОМ, 2008. — 335 с.

**Провалов В.С.** Информационные технологии управления. — М.: Флинта, 2008. — 371 с.

**Исследования** по современному анализу и математическому моделированию. — Владикавказ: ИПМИИ, 2008. — 381 с.

**Компьютеры, мозг, познание.** — М.: Наука, 2008. — 291 с.

**Крылов С.М.** Неокибернетика. — М.: URSS, 2008. — 288 с.

**Рассказова И.О.** Применение нейросетевых технологий в системах связи и управления. — Рязань: РВВКУС, 2008. — 251 с.

**Сердобольский В.И.** Теория формальных языков. — М.: МГИЭИМ, 2008. — 128 с.

**Тимофеев В.Л.** Структурно-энергетический анализ физических объектов. — Ижевск: ИжГТУ, 2008. — 328 с.

**Экономика как искусство.** — М.: Наука, 2008. — 254 с.

**Аттетков А.В.** Введение в методы оптимизации. — М.: Финансы и статистика; ИНФРА-М, 2008. — 269 с.

**Горошников Т.А.** Разработка моделей и инструментальных средств оптимизации развития холдинговой компании. — М.: ИПУ, 2007. — 46 с.