

ОПТИМИЗАЦИЯ ТЕМПЕРАТУРНЫХ РЕЖИМОВ ЭЛЕКТРОДОВ ПЛАЗМОТРОНОВ МЕТОДАМИ ПОДВИЖНОГО УПРАВЛЕНИЯ

В.А. Кубышкин, В.И. Финягина

В классе задач управления системами с распределенными параметрами с подвижным управляющим воздействием решена практическая задача определения оптимального закона движения пятна нагрева (зоны привязки электрической дуги к электроду). Найденный закон движения обеспечивает наименьшее значение максимальной усредненной температуры электрода, что ведет к уменьшению эрозии электрода в электродуговом плазмотроне. Рассмотрен ряд математических моделей температурного поля электрода плазмотрона.

Ключевые слова: подвижное управление, электродуговые плазмотроны, эрозия электродов, математические модели температурных полей, оптимальный закон сканирования пятна нагрева.

ВВЕДЕНИЕ

Подвижные источники энергии — электронные, ионные, лазерные лучи, электрическая дуга и др. — широко используются в агрегатах и устройствах, например, для термообработки, плавки, зонной очистки, отжига, нанесения покрытий и т. д. Большой интерес к такого рода подвижным источникам энергии определяется их уникальной возможностью в широких пределах перераспределять в пространстве и времени вещества и энергию, вводимые в объект управления.

Возможность перемещения подвижного источника, в частности источника нагрева, по произвольному закону позволяет поставить задачу оптимального управления его движением. Она относится к классу задач управления системами с распределенными параметрами с подвижными источниками воздействий. В работах [1—6] опубликованы методы, названные «методами подстановки и реализации», и описаны модели для расчета параметров движения подвижных источников воздействия, предполагающие декомпозицию сложной исходной задачи на более простые. Исследование возможностей декомпозиции исходной задачи является частью разрабатываемой в настоящее время Единой геометрической теории управления [7].

Данная работа посвящена адаптации и применению этих методов к решению технологической задачи повышения ресурса работы электродугового плазмотрона.

Для решения этой задачи (как, собственно, и любой другой задачи, связанной с реальным технологическим процессом) прежде всего необходимо дать физическую и математическую постановку задачи, предварительно обосновав и приняв некоторые допущения. Далее необходимо разработать метод решения задачи оптимального управления и соответствующее алгоритмическое и программное обеспечение и выполнить ее численное решение. В целях идентификации расчетных и реальных параметров необходимо разработать программное обеспечение для моделирования температурных полей электродов плазмотронов, т. е. создать модель объекта и выполнить на ней численные расчеты температурных полей.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ УПРАВЛЕНИЯ. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ЭЛЕКТРОДОВ ПЛАЗМОТРОНОВ

Физическая задача управления движением электродного пятна состоит в следующем. По внутренней поверхности цилиндрического электрода плазмотрона I (рис. 1) перемещается создаваемая электродом дуга.

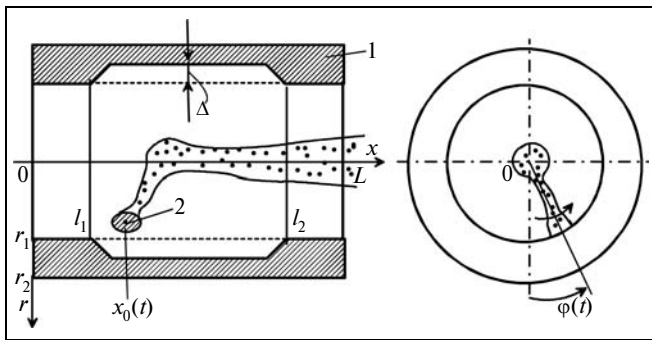


Рис. 1. Схема плазмотрона

трической дугой «зона привязки электрической дуги» 2, далее, коротко, пятно нагрева.

Ресурс работы плазмотрона во многом определяется эрозией электродов, возникающей в пятне нагрева [8, 9]. В настоящее время появились устройства газодинамического и магнитного сканирования, которые осуществляют сканирование пятна нагрева по заданному закону. Сканирование пятна нагрева приводит к уменьшению эрозии электрода по сравнению с эрозией при неподвижном пятне. В соответствии с теорией образования эрозии [9] ее размер зависит от температуры. При решении задачи воспользуемся этим положением.

В каждый момент времени t положение центра пятна нагрева 2 (см. рис. 1) зададим координатами $x_0(t)$ и $\varphi(t)$. Центр пятна нагрева движется по окружности с постоянной скоростью $V_\varphi = 2\pi/T_\varphi$ с периодом T_φ и вдоль оси x цилиндра от точки l_1 до точки l_2 с периодом T_x , $l_1 < x_0(t) < l_2$, где l_1 и l_2 — заданы, причем $T_\varphi \ll T_x$; Δ — максимальный размер эрозии по прошествии некоторого времени T .

Задачу управления можно поставить следующим образом. Требуется найти периодический закон движения источника $x_0(t)$ и соотношение периодов движения T_x и T_φ , при которых за фиксированный промежуток времени T максимальный размер эрозии Δ минимален.

В зависимости от степени детализации можно рассматривать следующие модели электродов плазмотронов.

Одномерная по пространственной координате x модель с подвижным воздействием. Уравнение теплопроводности с начальными и граничными условиями для этой модели записываются следующим образом:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = a \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} - b_1 \alpha_1 (Q - Q_1) + b_2 F(x, t) + b_2 q_\phi(x),$$

$$0 < x < L, \quad t > 0, \quad (1.1)$$

$$Q(x, 0) = Q_0(x), \quad 0 < x < L,$$

$$\left[\alpha_2 Q - \lambda \frac{\partial Q}{\partial x} \right]_{x=0} = \alpha_2 Q_{02},$$

$$\left[\alpha_3 Q + \lambda \frac{\partial Q}{\partial x} \right]_{x=L} = \alpha_3 Q_{03}. \quad (1.2)$$

Здесь $Q(x, t)$ — состояние объекта (распределение температуры), x — пространственная координата, t — время, a — коэффициент температуропроводности, λ — коэффициент теплопроводности, $b_1 = \frac{G}{c\rho S}$, $b_2 = \frac{1}{c\rho S}$ — постоянные коэффициенты, c — теплоемкость, ρ — плотность материала электрода, S — площадь поперечного сечения электрода, G — периметр внутреннего цилиндра, α_1 , α_2 и α_3 — коэффициенты теплоотвода от боковой поверхности объекта и от его границ $x = 0$ и $x = L$ соответственно, L — длина электрода, $Q_0(x)$ — функция, описывающая начальное распределение температуры, Q_1 , Q_{02} и Q_{03} — среднее значение температуры окружающей среды, омывающей внутреннюю и внешнюю поверхности электрода и его границы $x = 0$ и $x = L$ соответственно, $q_\phi(x)$ — фоновый поток тепла, создаваемый излучением электрической дуги.

Распределение энергии подвижного источника тепла $F(x, t)$ имеет вид

$$F(x, t) = P(t)\Psi[x - x_0(t)], \quad (1.3)$$

где $P(t)$ — мощность подвижного источника тепла, $\Psi(x)$ — функция формы подвижного источника тепла, $x_0(t)$ — функция, определяющая положение центра источника тепла в каждый момент времени, назовем ее законом движения источника. Центр пятна нагрева $x_0(t)$ перемещается вдоль оси внутреннего цилиндра плазмотрона с периодом T_x , $[l_1, l_2] \subset [0, L]$. Функция формы источника задается обычно в виде функции Гаусса: $\Psi(x, \sigma) = (1/\sigma\sqrt{2\pi})\exp[(-1/2\sigma^2)x^2]$, где σ — постоянное число.

Хотя одномерная модель не может претендовать на точное количественное описание температурного поля электрода плазмотрона, однако ее изучение полезно как для разработки и апробации постановки задачи и метода ее решения, так и для получения качественной картины оптимального управления.

Пространственно-двумерная модель в координатах (x, r) . Модель строится в предположении, что $T_\varphi \ll T_x$ (рис. 2). В этом случае приближенно можно считать, что источник тепла равномерно рас-

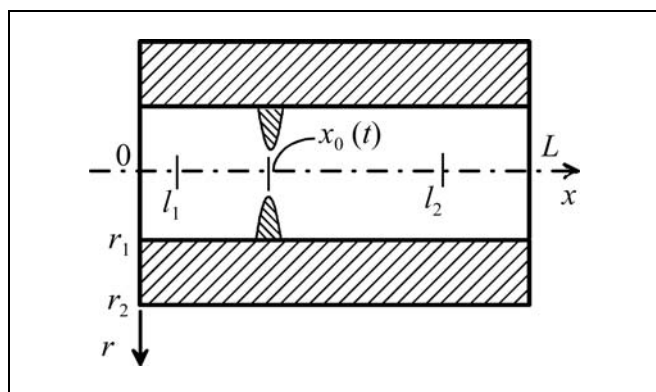


Рис. 2. Схема пространственно-двумерной модели электрода в координатах (x, r)

пределен по кольцу радиуса r_1 и этот кольцевой источник перемещается вдоль оси x по периодическому закону $x_0(t)$. Температурное поле при таких предположениях не будет зависеть от координаты φ , а будет зависеть лишь от координат x и r .

Уравнение теплопроводности (1.4), начальные (1.5) и граничные (1.6) условия для этой модели запишутся в следующем виде [10]

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = a \left\{ \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left[r \frac{\partial Q}{\partial r} \right] + \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} \right\}, \quad r_1 < r < r_2, \quad 0 < x < L, \quad (1.4)$$

$$Q(x, r, 0) = Q_0(x, r),$$

$$\left[\alpha_0 Q - \lambda \frac{\partial Q}{\partial r} \right]_{r=r_1} = F(x, t) + q_\phi(x) + \alpha_0 Q_{00}, \quad (1.5)$$

$$\left[\alpha_1 Q - \lambda \frac{\partial Q}{\partial r} \right]_{r=r_2} = \alpha_1 Q_{01},$$

$$\left[\alpha_2 Q - \lambda \frac{\partial Q}{\partial x} \right]_{x=0} = \alpha_2 Q_{02},$$

$$\left[\alpha_3 Q - \lambda \frac{\partial Q}{\partial x} \right]_{x=L} = \alpha_3 Q_{03}. \quad (1.6)$$

В приведенных уравнениях $Q(x, r, t)$ — состояние объекта, $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$ и α_3 — коэффициенты теплоотвода от внутренней и наружной поверхностей электрода и от левого и правого его торцов соответственно, Q_{00}, Q_{01}, Q_{02} и Q_{03} — значения температуры окружающей среды вблизи внутренней и наружной цилиндрических поверхностей электрода, левого и правого его торцов соответственно. Остальные обозначения совпадают с обозначениями для одномерной модели.

Пространственно-двумерная модель в координатах (x, φ) . В этой модели температурное поле усредняется по толщине стенки цилиндра (температурное поле не зависит от координаты r).

Обозначим $y = r_1 \varphi$ (рис. 3), тогда уравнение теплопроводности (1.7) записывается аналогично уравнению теплопроводности для прямоугольной пластины с тем лишь отличием, что граничные условия на границе $y = 0$ и $y = 2\pi r_1$ заменяются условиями периодичности (1.8):

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = a \left[\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Q}{\partial y^2} \right] + b_2 F(x, y, t) + b_2 q_\phi - b_1 \alpha_1 (Q - Q_1), \quad 0 < x < L, \quad -\infty < y < \infty. \quad (1.7)$$

$$Q(x, y \pm 2\pi r_1) = Q(x, y). \quad (1.8)$$

Начальные (1.9) и граничные (1.10) условия имеют вид

$$Q(x, y, 0) = Q_0(x, y), \quad (1.9)$$

$$\begin{aligned} \left[\alpha_2 Q - \lambda \frac{\partial Q}{\partial x} \right]_{x=0} &= \alpha_2 Q_{02}, \\ \left[\alpha_3 Q - \lambda \frac{\partial Q}{\partial x} \right]_{x=L} &= \alpha_3 Q_{03}. \end{aligned} \quad (1.10)$$

В приведенных уравнениях подвижное управление имеет следующий вид

$$F(x, y, t) = P(t) \Psi[x - x_0(t), y - y_0(t)].$$

Здесь $[x_0(t), y_0(t)]$ — координаты центра пятна нагрева в каждый момент времени t . Коэффициент α_1 учитывает теплоотвод, как от внутренней, так и от наружной поверхности электрода, Q_1 — среднее значение температуры среды, омывающей внутреннюю и внешнюю поверхности электрода. Остальные обозначения совпадают с ранее введенными.

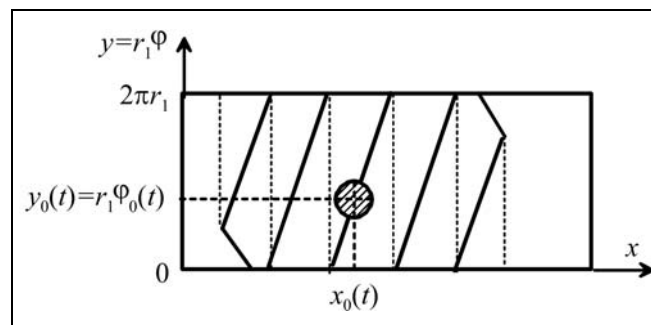


Рис. 3. Расчетная схема пространственно-двумерной модели электрода в координатах (x, φ)

2. ВЫБОР МЕТОДА РЕШЕНИЯ И УТОЧНЕНИЕ ПОСТАНОВКИ ЗАДАЧИ

Для решения задачи поиска оптимального закона движения подвижного источника предлагается применять метод декомпозиции [2—5, 6], в соответствии с которым задача управления для нестационарной модели с подвижным источником тепла разбивается на две, более простые.

Первая задача состоит в том, что: нестационарное уравнение объекта с подвижным управлением вида (1.1), (1.2), (1.4) или (1.7) заменяется стационарным уравнением объекта с распределенным управлением $\bar{F}(x)$ и усредненным температурным полем $\bar{Q}(x)$, затем ставится и решается задача поиска оптимального распределенного управления $\bar{F}(x)$.

После нахождения управления $\bar{F}(x)$ решается вторая задача: рассчитывается закон периодического движения источника тепла $x_0(t)$, который обеспечивает усредненное воздействие за период его движения, близкое к найденному оптимальному распределенному управлению.

Обоснование такого подхода состоит в следующем. Если источник тепла периодически перемещается с периодом T_x , то функция, описывающая состояние объекта (1.4)—(1.6) в установившемся режиме ($t \rightarrow \infty$), становится периодической функцией времени с тем же периодом T_x , т. е. выполняется условие

$$Q(x, r, t + T_x) = Q(x, r, t). \quad (2.1)$$

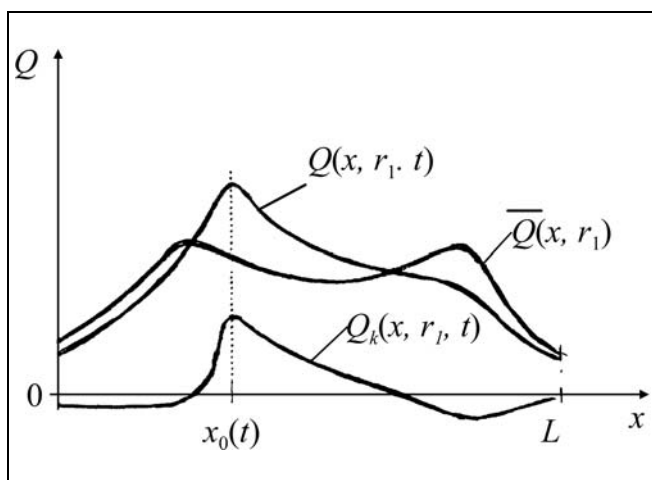


Рис. 4. Представление температурного поля в виде суммы двух составляющих

Представим функцию (2.1) в виде суммы двух составляющих (рис. 4): усредненной $\bar{Q}(x, r)$ и колебательной $Q_k(x, r, t)$:

$$Q(x, r, t) = \bar{Q}(x, r) + Q_k(x, r, t). \quad (2.2)$$

Усредненная составляющая состояния определяется по формуле

$$\bar{Q}(x, r) = \int_t^{t+T_x} Q(x, r, \tau) d\tau \quad (2.3)$$

и в силу периодичности функции $Q(x, r, t)$ в установившемся режиме не зависит от времени.

Усредненная составляющая $\bar{Q}(x, r)$ (далее усредненное температурное поле) определяется как решение стационарного уравнения, соответствующего уравнению (1.4)

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \bar{Q}}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 \bar{Q}}{\partial x^2} = 0, \quad r_1 < r < r_2, \quad 0 < x < L, \quad (2.4)$$

с граничными условиями

$$\begin{aligned} \left[\alpha_0 \bar{Q} - \lambda \frac{\partial \bar{Q}}{\partial r} \right]_{r=r_1} &= \bar{F}(x, t) + q_{\Phi}(x) + \alpha_0 Q_{00}, \\ 0 < x < L, \quad -\lambda \frac{\partial \bar{Q}}{\partial r} \Big|_{r=r_2} &= \alpha_1 (Q_{01} - \bar{Q}), \\ -\lambda \frac{\partial \bar{Q}}{\partial x} \Big|_{x=0} &= \alpha_1 (Q_{00} - \bar{Q}), \\ -\lambda \frac{\partial \bar{Q}}{\partial x} \Big|_{x=L} &= \alpha_3 (Q_{03} - \bar{Q}). \end{aligned} \quad (2.5)$$

Здесь $\bar{F}(x)$ — усредненное управление, которое определяется по формуле

$$\bar{F}(x) = \int_t^{t+T_x} P\Psi[x - x_0(\tau)] d\tau. \quad (2.6)$$

Уравнения (2.4), (2.5) можно получить, если проинтегрировать уравнения (1.4)—(1.6) в промежутке от t до $t + T$ и учесть формулы (2.3) и (2.6).

Предположим, что максимальное значение колебательной составляющей $Q_k(x, r_1, t)$ — см. формулу (2.2) — на границе $r = r_1$ не изменяется во времени. Тогда становится оправданной следующая постановка задачи для стационарного уравнения.

Найти распределенное управление $\bar{F}(x)$, которое обеспечивает минимум максимального значе-



ния усредненного температурного поля на поверхности $r = r_1$:

$$\mathfrak{S} = \max_{0 < x < L} \bar{Q}(x, r_1) \rightarrow \min. \quad (2.7)$$

При этом на управление $\bar{F}(x)$ налагаются ограничения

$$\begin{aligned} \bar{F}(x) \geq 0, \quad x \in [l_1, l_2]; \quad \bar{F}(x) = 0, \quad x \notin [l_1, l_2]; \\ \int_{l_1}^{l_2} \bar{F}(x) dx = P^*, \end{aligned}$$

где P^* — суммарная мощность, поступающая в электрод плазмотрона от подвижного источника тепла.

Если максимальное значение для усредненного температурного поля будет минимальным, то в силу сделанного предположения будет минимальным максимальное значение температуры под источником тепла. Следовательно, в силу принятой нами гипотезы, максимальный размер эрозии будет минимальным.

Замечание. Скорость движения источника различна в различных точках отрезка $[l_1, l_2]$. Там, где скорость меньше, там больше перегрев под источником. Поэтому решение поставленной стационарной задачи оптимизации является лишь первым приближением решения общей задачи оптимизации теплового режима плазмотрона. Дальнейшее исследование необходимо провести на модели с движущимся источником тепла.

3. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ С ПОМОЩЬЮ ПРОСТРАНСТВЕННО-ОДНОМЕРНОЙ МОДЕЛИ

Усредненное температурное поле для одномерной модели электрода плазмотрона в установившемся режиме описывается следующим уравнением теплопроводности

$$\begin{aligned} a \frac{\partial^2 \bar{Q}}{\partial x^2} - b_1 \alpha_1 (\bar{Q} - Q_1) + b_2 \bar{F}(x) + b_2 q_\phi(x) = 0, \\ 0 < x < L, \end{aligned} \quad (3.1)$$

с граничными условиями

$$\begin{aligned} \left[\alpha_2 \bar{Q} - \lambda \frac{\partial \bar{Q}}{\partial x} \right]_{x=0} = \alpha_2 Q_{02}, \\ \left[\alpha_3 \bar{Q} - \lambda \frac{\partial \bar{Q}}{\partial x} \right]_{x=L} = \alpha_3 Q_{03}. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Задача состоит в том, чтобы найти распределенное управление $\bar{F}(x)$, которое удовлетворяет ограничениям

$$\begin{aligned} \bar{F}(x) \geq 0, \quad x \in [l_1, l_2], \quad \bar{F}(x) = 0, \quad x \notin [l_1, l_2], \\ \int_{l_1}^{l_2} \bar{F}(x) dx = P^* = \text{const} \end{aligned} \quad (3.3)$$

и обеспечивает минимальное значение функционала

$$\mathfrak{S} = \max_{x \in [0, L]} \bar{Q}(x). \quad (3.4)$$

Решение задачи (3.1)–(3.4) обеспечивает минимальный нагрев электрода плазмотрона в каждой точке и, как следствие, минимальную эрозию электрода.

Для пространственно-одномерного объекта справедливо следующее утверждение: минимальное значение функционала \mathfrak{S} достигается при таком воздействии $\bar{F}(x)$, которое обеспечивает равномерное усредненное температурное поле на отрезке $[l_1, l_2]$. Доказательство этого утверждения приведено в работе [6]. На его основании можно рассчитать оптимальное распределенное управление $\bar{F}(x)$.

Решение можно получить методом подстановки [3, 6], который состоит в том, что в уравнение (3.1) вместо усредненной функции, описывающей состояние объекта $\bar{Q}(x)$, подставляется аппроксимирующая функция $Q_A(x, C)$, которая удовлетворяет граничным условиям (3.2), имеет постоянное значение C на отрезке $[l_1, l_2]$ и удовлетворяет стационарному уравнению (3.1) объекта при $x \notin [l_1, l_2]$.

Тогда управление $\bar{F}(x)$ определится из формулы

$$b_2 \bar{F}(x) = a \frac{\partial^2 Q_A}{\partial x^2} + b_1 \alpha_1 (Q_A - Q_1) - b_2 q_\phi(x).$$

Значение постоянной C подбирается таким образом, чтобы выполнялось условие

$$\int_{l_1}^{l_2} \bar{F}(x) dx = P^*.$$

Если известно распределенное управление $\bar{F}(x)$, то для расчета закона движения источника тепла $x_0(t)$ необходимо решить интегральное уравнение

$$\bar{F}(x) = P \int_0^T \Psi[x - x_0(t), \sigma] dt. \quad (3.5)$$

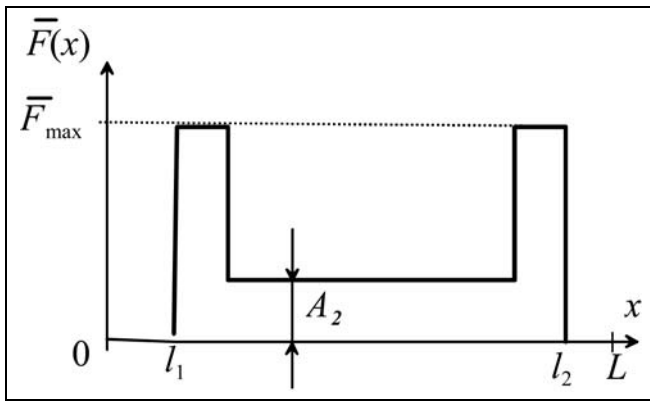


Рис. 5. Распределенное оптимальное управление

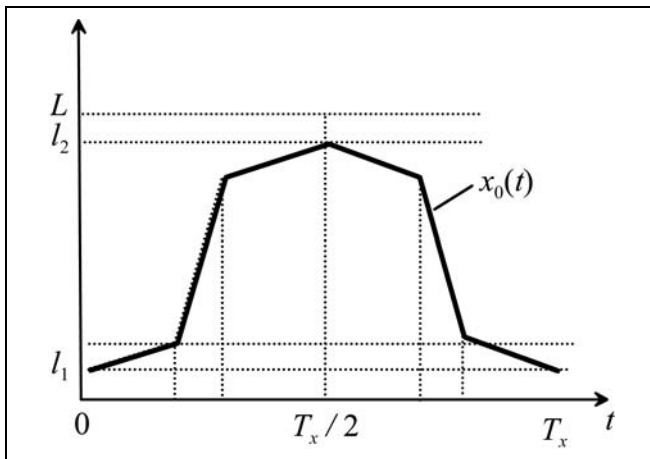


Рис. 6. Закон движения точечного источника

Путем замены переменных $t = x_0^{-1}(x)$, где $x_0^{-1}(x)$ — функция, обратная функции $x_0(t)$, уравнение (3.5) можно привести к виду

$$\bar{F}(x) = P \int_{l_1}^{l_2} \Psi(x - \xi, \sigma) \omega(\xi) d\xi, \quad (3.6)$$

где

$$\omega(x) \geq 0, \quad \omega(x) = [x_0^{-1}(x)]', \quad t'(x) = \omega(x). \quad (3.7)$$

Стандартных методов решения интегрального уравнения (3.6) при ограничении (3.7) не существует. Поэтому для вычисления решения интегрального уравнения (3.6) предложен специальный метод [4], на основе которого разработана программа поиска решения. Если считать, что $\psi(x, \sigma) \approx \delta(x)$, $\delta(x)$ — функция Дирака, приближенное решение можно получить в аналитической форме.

На рис. 5 показан вид распределенного оптимального управления, полученного для пространственно-одномерного уравнения объекта (рис. 5) и соответствующий этому управлению закон движения точечного источника (рис. 6).

4. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ С ПОМОЩЬЮ ПРОСТРАНСТВЕННО-ДВУМЕРНОЙ МОДЕЛИ

Предположим, что для стационарной двумерной модели электрода, описываемой уравнениями (2.4)—(2.6), выполняется утверждение, доказанное для одномерной модели. Это означает, что минимальное значение функционала (2.7) достигается при таком управлении $\bar{F}(x)$, которое обеспечивает равномерное распределение температуры на отрезке $[l_1, l_2]$ на поверхности $r = r_1$.

Для определения управления $\bar{F}(x)$, обеспечивающего равномерное распределение температуры на отрезке $[l_1, l_2]$, воспользуемся методом подстановки, особенности применения которого для пространственно-двумерных объектов подробно изложены в работе [6].

Для численного расчета оптимального закона движения электродного пятна в рамках модели (1.4)—(1.6) были разработаны следующие программы:

- программа расчета оптимального управления $\bar{F}(x)$, обеспечивающего равномерное распределение температуры на отрезке $[l_1, l_2]$ при выполнении

условий $\bar{F}(x) \geq 0$, $\int_{l_1}^{l_2} \bar{F}(x) dx = P^*$; она реализует описанную в работе [6] методику;

- программа реализации распределенного управления подвижным управлением, т. е. программа для определения закона движения $x_0(t)$, $0 < t < T$, по

известному распределенному управлению $\bar{F}(x)$.

Расчеты проводились при следующих исходных данных. Материал электрода — медь со следующими теплотехническими характеристиками: $a = 0,1 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2/\text{с}$, $\lambda = 365 \text{ Вт}/(\text{м} \cdot ^\circ\text{C})$, $\rho = 9000 \text{ кг}/\text{м}^3$, $c = 0,406 \text{ кДж}/(\text{кг} \cdot ^\circ\text{C})$. Геометрические размеры электрода плазмотрона $L = 100 \text{ мм}$, $l_1 = 32,5 \text{ мм}$, $l_2 = 67,5 \text{ мм}$, $r_1 = 17,5 \text{ мм}$, $r_2 = 27,5 \text{ мм}$. Параметры взаимодействия электрода с окружающей средой: коэффициенты теплоотдачи $\alpha_0 = 0$, $\alpha_2 = 0$, $\alpha_3 = 0$, $B_{i1} = 0,85$. Здесь B_{i1} — безразмерный критерий, который определяется по формуле $B_{i1} = \alpha_1(r_2 - r_1)/\lambda$, α_1 — коэффициент теплоотдачи благодаря охлаждению стенок электрода водой. Суммарная мощ-

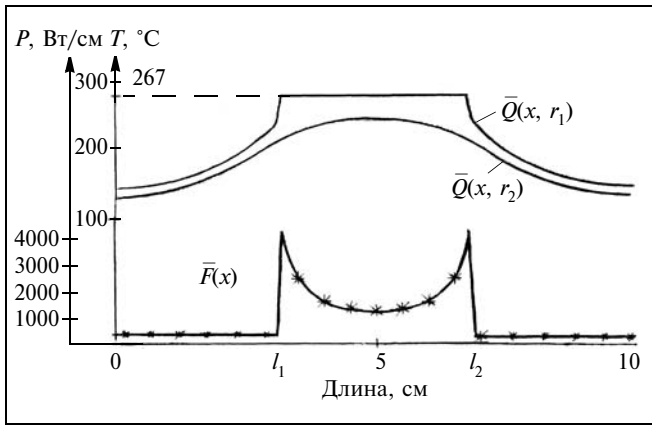


Рис. 7. Оптимальное распределенное управление и соответствующее усредненное температурное поле

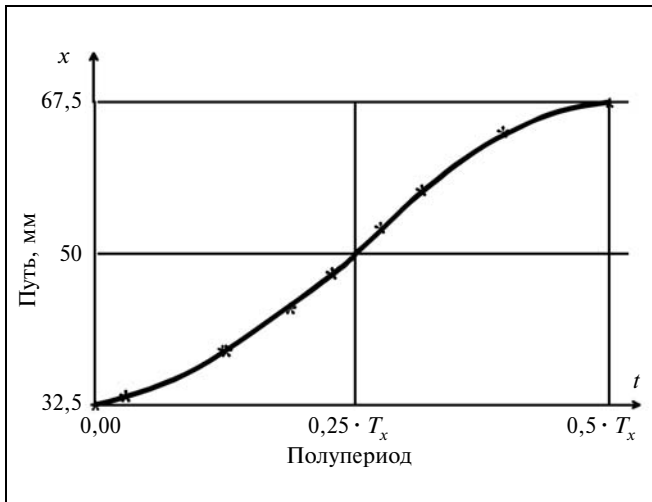


Рис. 8. Расчетный закон движения источника вдоль оси Ox

ность P^* источника тепла принималась равной 7500 Вт; мощность фонового потока принималась постоянной по всей длине: $q_{\text{ф}} = \text{const} = 2000$ Вт.

На рис. 7 изображено рассчитанное оптимальное распределенное управление $\bar{F}(x)$. На этом же рисунке показано распределение температуры на границах электрода $r = r_1$ и $r = r_2$.

Как видно из рисунка, для получения равномерного распределения температуры на отрезке $[l_1, l_2]$ граничной поверхности $r = r_1$ необходимо существенно неравномерное распределение управления $\bar{F}_{\text{опт}}(x)$. Качественная картина, полученная для одномерной модели электрода сохранилась. На рис. 8 показан закон движения источника $x_0(t)$, рассчи-

танный на основе решения интегрального уравнения (3.5).

Для сравнения на рис. 9 показано распределение температуры на поверхностях $r = r_1$ и $r = r_2$ при заданном постоянном распределенном управлении $\bar{F}(x) = \text{const}$ при суммарной мощности P , равной заданному значению P^* . Такое распределенное управление соответствует движению источника с постоянной скоростью на отрезке $[l_1, l_2]$. Из рисунка видно, что максимальное значение усредненной температуры на поверхности $r = r_1$ равно 292°C и находится в центре отрезка $[l_1, l_2]$.

Для численного моделирования нестационарных температурных полей электродов плазмотронов с подвижным источником тепла были разработаны программы для моделирования пространственно-двумерных нестационарных температурных полей электрода плазмотрона в координатах (x, r) и в координатах (x, φ) с подвижным источником тепла. Для решения уравнений теплопроводности (1.4)–(1.6) и (1.7)–(1.10) применялся метод сеток. В частности, использовалась сетка с постоянным шагом по пространственной координате и переменным шагом по времени, связанным с законом движения источника тепла $x_0(t)$. Шаг по времени выбирался таким образом, чтобы на каждом временном слое центр источника тепла совпадал с узлом сетки по пространственной координате [2, 5, 6]. Такой выбор шагов по времени позволяет улучшить аппроксимацию функции формы источника $\Psi[x - x_0(t), \sigma]$ сеточной функцией, уменьшить число шагов по пространственной координате.

На рис. 10 показан пример распределения температуры, рассчитанного на модели температурно-

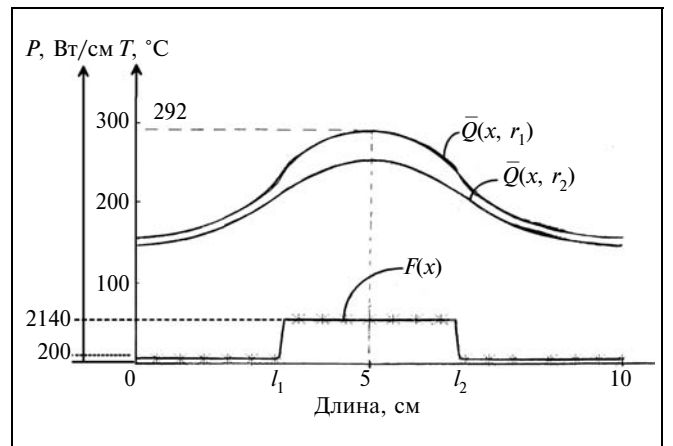


Рис. 9. Постоянное на отрезке $[l_1, l_2]$ распределенное управление и соответствующее усредненное температурное поле

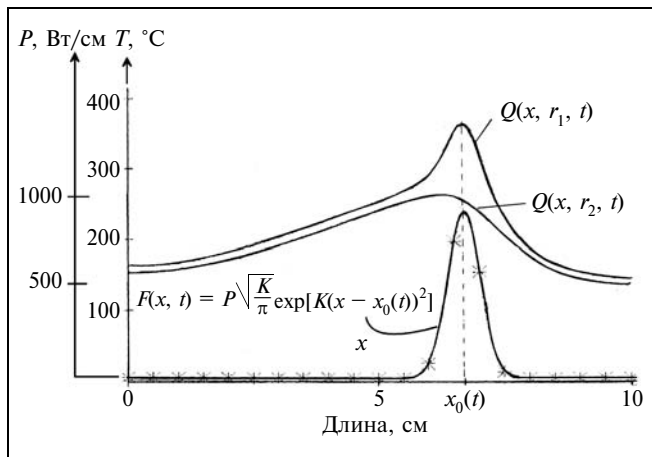


Рис. 10. Распределение энергии источника и температурное поле электрода от него

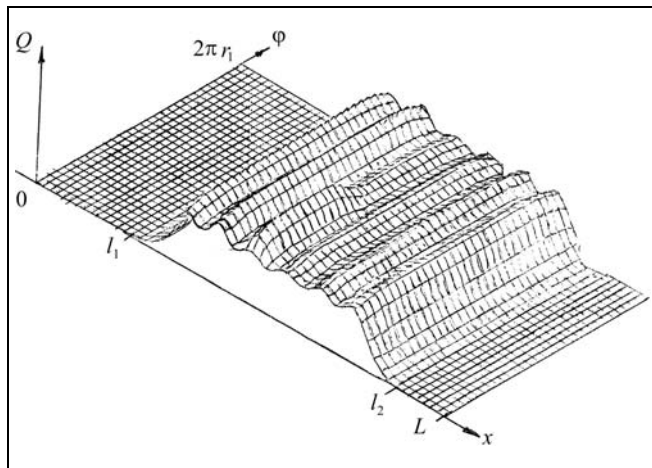


Рис. 11. Температурное поле на модели в координатах (x, φ)

го поля электрода плазмотрона в координатах (x, r) для случая, когда источник тепла движется с постоянной скоростью в каждом цикле; $K = 1/(2\sigma^2)$. На рис. 11 показано температурное поле, рассчитанное на модели в координатах (x, φ) .

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотрена задача уменьшения размера эрозии электрода плазмотрона, возникающей в зоне привязки электрической дуги к электроду. В настоящее время существует подтвержденная экспериментально гипотеза, в соответствии с которой размер эрозии определяется температурой под пятном нагрева. Поэтому поставленная задача сводится к задаче оптимизации температурного поля электрода. Она состоит в том, чтобы найти закон

движения пятна нагрева, который обеспечивает минимальное значение максимальной температуры под ним. В настоящей работе эта задача решена для усредненного температурного поля электрода с помощью методов подвижного управления (метода подстановки и метода реализации). Для уточнения найденного закона движения следует использовать модели электрода с подвижным управлением. В работе рассмотрены двумерные модели электрода в координатах (x, r) и (x, φ) с подвижным управлением. Уточнение закона движения пятна нагрева с помощью этих, а также с помощью более точной трехмерной модели электрода плазмотрона является предметом отдельных исследований.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бутковский А.Г., Пустыльников Л.М. Теория подвижного управления системами с распределенными параметрами. — М.: Наука, 1980.
2. Кубышкин В.А. Математическое моделирование в системах управления с подвижным многоцикловым воздействием / В кн.: Проблемы управления системами с распределенными параметрами с подвижным воздействием. — М.: Наука, 1979.
3. Метод подстановки для расчета распределенных управлений / А.Г. Бутковский, В.А. Кубышкин, А.Г. Смирнов и др. // Автоматика и телемеханика. — 1980. — № 9.
4. Реализация распределенных управлений с помощью подвижных источников воздействия / А.Г. Бутковский, В.А. Кубышкин, Е.С. Твердохлебов, Е.П. Чубаров // Автоматика и телемеханика. — 1983. — № 4.
5. Финягина В.И. Моделирование подвижного управления в двумерных системах с распределенными параметрами // Техническая кибернетика. — 1989. — № 6.
6. Кубышкин В.А., Финягина В.И. Подвижное управление в системах с распределенными параметрами. — М.: СИНТЕГ, 2005. — 240 с.
7. Бабичев А.В., Бутковский А.Г., Похйюлаинен С. К единой геометрической теории управления. М.: Наука, 2001.
8. Жуков М.Ф., Засыпкин И.М., Тимошевский А.Н. и др. Электродуговые генераторы термической плазмы // Новосибирск: Наука, 1999. — 712 с.
9. Михайлов В.И., Тимошевский А.Н., Урбах Э.К. Влияние температуры цилиндрических электродов на их эрозию // Изв. СО АН СССР. Сер. «Техн. науки». — № 10. — Вып. 2. — 1985.
10. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1972.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.Г. Бутковским.

Кубышкин Виктор Алексеевич — д-р техн. наук, вед. науч. сотрудник, ✉ vicalkub@ipu.ru,

Финягина Валерия Ивановна — канд. техн. наук, ст. науч. сотрудник, ✉ fler@ipu.ru,

Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, г. Москва, ☎ (495) 334-76-90.