

# ИССЛЕДОВАНИЕ ДВУХ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ МАЯТНИКОМ ДРОБНОГО ПОРЯДКА С ПОМОЩЬЮ МЕТОДА МОМЕНТОВ

В.А. Кубышкин, С.С. Постнов

Исследованы две задачи оптимального управления для маятника дробного порядка в случае, когда допустимые управления ищутся в классе функций, интегрируемых с квадратом на отрезке. Одна из них состоит в том, чтобы найти управления, переводящие систему в заданное состояние с минимальной нормой при заданном времени управления, а другая в том, чтобы найти управления, переводящие систему в заданное состояние за минимальное время при заданном ограничении на норму управления. Показано, что исследуемая задача может быть сведена к проблеме моментов, для которой выведены условия постановки и разрешимости. Решение задачи получено аналитически в квадратурах. Выполнены вычислительные эксперименты, проанализированы особенности качественной динамики системы.

**Ключевые слова:** оптимальное управление, проблема моментов, маятник, дробная производная Капуто.

## ВВЕДЕНИЕ

Системы, описываемые уравнениями нецелого порядка, приобрели в последние 20–30 лет большую популярность, о чем свидетельствует огромное количество публикаций по этой теме [1–5]. Последние 10 лет активно исследуются задачи управления такими системами, и здесь также накоплен заметный объем работ [4–12]. Известны примеры эффективной практической реализации управляющих систем дробного порядка, причем управляемые объекты описываются уравнениями как дробного, так и целого порядка [4–9]. Среди конкретных приложений можно упомянуть дробные контроллеры, применяемые для управления системами электропитания, микроклимата помещений, прецизионного позиционирования, разделения изотопов и пр. [4–9].

Для систем дробного порядка на сегодня не существует теорем, аналогичных принципу максимума Понтрягина. Задачи оптимального управления для них в основном исследуются в рамках вариационного подхода [8–12]. В работах [13, 14] задачи оптимального управления одиночным и

двойным интеграторами дробного порядка исследовались с помощью метода моментов. В настоящей работе этот метод применяется для более сложной системы — маятника дробного порядка. Рассматривается случай, когда управление принадлежит пространству  $L_2[0, T]$  функций, интегрируемых на отрезке  $[0, T]$  с квадратом. Такой выбор направления исследований обусловлен большой практической важностью рассматриваемого случая, поскольку речь идет о задачах, в которых ограничения накладываются на энергию управляющего воздействия, представляющую собой квадрат нормы управления в пространстве  $L_2[0, T]$ :

$$J = \int_0^T u^2(t) dt.$$

## 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть функции  $q_i(t)$ ,  $i = 1, 2$ , определяющие состояние динамической системы в момент времени  $t \in [0, T]$ , и управление  $u(t)$  определены на отрезке



$[0, T]$ ,  $T > 0$ . Пусть управление  $u(t)$  принадлежит пространству  $L_2[0, T]$  с нормой

$$\|u(t)\| = \left( \int_0^T |u(t)|^2 dt \right)^{1/2}.$$

Будем считать, что функции  $q_i(t)$ ,  $i = 1, 2$  обладают всеми необходимыми свойствами для существования решений рассматриваемых в данной работе уравнений (в том числе, дифференцируемы хотя бы один раз).

Дробная производная нецелого порядка  $\alpha \in (0, 1)$  от функции  $q_i(t)$  понимается далее как левосторонняя дробная производная Капуто [1–3]:

$${}_0D_t^\alpha q_i(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \frac{dq_i(\tau)}{d\tau} \frac{d\tau}{(t-\tau)^\alpha}.$$

Маятником дробного порядка будем называть динамическую систему, поведение которой описывается дифференциальными уравнениями дробного порядка:

$${}_0D_t^\alpha q_1(t) = q_2(t), \quad {}_0D_t^\alpha q_2(t) = -q_1(t) + u(t), \quad (1)$$

$\alpha \in (0, 1)$ . Система (1) является частным случаем системы, называемой в литературе дробным или фрактальным осциллятором [2]. Для данной системы зададим начальные условия в виде

$$q_1(0) = q_1^0, \quad q_2(0) = q_2^0 \quad (2)$$

и конечные условия в виде

$$q_1(T) = q_1^T, \quad q_2(T) = q_2^T. \quad (3)$$

По аналогии с системами целого порядка [15, § 13, 26] поставим две задачи оптимального управления.

**Задача А.** Найти управление  $u(t) \in L_2[0, T]$ ,  $t \in [0, T]$ , такое, чтобы система (1) перешла из заданного начального состояния  $(q_1(0), q_2(0))$  в заданное конечное состояние  $(q_1(T), q_2(T))$  и при этом норма управления  $\|u\|$  в пространстве  $L_2[0, T]$  достигла минимального значения, когда время управления  $T$  задано.

**Задача Б.** Найти управление  $u(t) \in L_2[0, T]$ ,  $t \in [0, T]$ , такое, чтобы система (1) перешла из заданного начального состояния  $(q_1(0), q_2(0))$  в заданное конечное состояние  $(q_1(T), q_2(T))$  и при этом время управления  $T$  было минимальным при условии  $\|u\| \leq l$ ,  $l > 0$ , где  $l$  задано.

## 2. ПРОБЛЕМА МОМЕНТОВ

Показано [15, § 13, 26], что поставленную задачу оптимального управления в общем случае произвольного значения  $p$  и произвольного числа  $n$  можно свести к проблеме моментов: найти  $u(t) \in L_p[0, T]$ ,  $\|u(t)\| \leq l$  ( $l > 0$  задано) при известных числах  $a_i(T)$  и функциях  $g_i(t) \in L_{p'}[0, T]$ ,  $i = \overline{1, n}$ , если

$$\int_0^T g_i(t)u(t)dt = a_i(T), \quad i = \overline{1, n}, \quad t \in [0, T]. \quad (4)$$

Проблема моментов (4), в свою очередь, может быть сведена к задаче: найти

$$\begin{aligned} \min_{\xi_1, \dots, \xi_n} \left( \int_0^T \left| \sum_{i=1}^n \xi_i g_i(t) \right|^{p'} dt \right)^{1/p'} = \\ = \left( \int_0^T \left| \sum_{i=1}^n \xi_i^* g_i(t) \right|^{p'} dt \right)^{1/p'} = \frac{1}{\lambda_n}, \end{aligned} \quad (5)$$

$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ , при условии

$$\sum_{i=1}^n a_i(T)\xi_i = 1. \quad (6)$$

При этом минимальная норма управления  $\min \|u\| = \lambda_n$ .

Для постановки проблемы моментов, как известно [15], ключевым условием служит возможность определения нормы функций  $u(t)$  и  $g_i(t)$ ,  $i = \overline{1, n}$  в соответствующих пространствах. В рассматриваемом в данной работе случае  $p = p' = 2$ ,  $n = 2$ , и вопрос о возможности постановки проблемы моментов сводится к проверке существования и ограни-

ченности интегралов вида  $\int_0^T |g_i(t)|^2 dt$ ,  $i = 1, 2$ .

Необходимым и достаточным условием разрешимости проблемы моментов является  $\lambda_2 \in R$ ,  $\lambda_2 > 0$ , или, что эквивалентно, линейная независимость функций  $g_i(t)$ ,  $i = 1, 2$  [15].

Покажем далее, что задача оптимального управления для системы (1) с начальными условиями (2) и конечными условиями (3) может быть поставлена в форме проблемы моментов (4), и найдем соответствующие условия, определяющие возможность постановки и разрешимости проблемы моментов.

Известно [3, с. 414], что для многомерной системы уравнений вида

$${}_0D_t^\alpha q(t) = Aq(t) + Bu(t) \quad (7)$$

общее решение дается формулой

$$q(t) = q(0) + \int_0^t e_\alpha^{A(t-\tau)} Aq(0) d\tau + \int_0^t e_\alpha^{A(t-\tau)} Bu(\tau) d\tau, \quad (8)$$

где  $e_\alpha^{Az} = z^{\alpha-1} \sum_{k=0}^{\infty} A^k \frac{z^{\alpha k}}{\Gamma[(k+1)\alpha]}$  — матричная  $\alpha$ -экспонента [3]. Очевидно, что система (1) может быть переписана в виде (7) и при этом

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (9)$$

Подставив выражения (9) в формулу (8) и записав решение для системы (1) при  $t = T$ , получим:

$$\begin{aligned} q_1(T) &= q_1(0) + \int_0^T \sin_\alpha(T-\tau)u(\tau) d\tau + \\ &+ q_1(0) \int_0^T \cos_\alpha(T-\tau) d\tau + q_2(0) \int_0^T \sin_\alpha(T-\tau) d\tau, \\ q_2(T) &= q_2(0) + \int_0^T \cos_\alpha(T-\tau)u(\tau) d\tau - \\ &- q_1(0) \int_0^T \sin_\alpha(T-\tau) d\tau + q_2(0) \int_0^T \cos_\alpha(T-\tau) d\tau, \end{aligned} \quad (10)$$

где

$$\begin{aligned} \cos_\alpha z &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2\alpha(k+1)-1}}{\Gamma[2\alpha(k+1)]} = \\ &= z^{2\alpha-1} E_{2\alpha, 2\alpha}(-z^{2\alpha}), \end{aligned} \quad (11)$$

$$\cos_\alpha z = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{\alpha(2k+1)-1}}{\Gamma[\alpha(2k+1)]} = z^{\alpha-1} E_{2\alpha, \alpha}(-z^{2\alpha}),$$

$\cos_\alpha z$  и  $\sin_\alpha z$  — обобщенные тригонометрические функции,  $E_{\alpha, \beta}(z)$  — двухпараметрическая функция Миттаг-Леффлера [3].

Формулы (10) можно записать в виде (4), где для функций  $g_i(t)$ ,  $i = 1, 2$ , и моментов  $a_{1,2}(T)$  справедливы выражения (см. Приложение 1):

$$\begin{aligned} g_1(t) &= \sin_\alpha(T-t), \\ g_2(t) &= \cos_\alpha(T-t), \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} a_1(T) &= q_1^T - q_1^0 [2 - E_{2\alpha}(-T^{2\alpha})] - \\ &- \frac{q_2^0}{T^\alpha} \left[ \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} - E_{2\alpha, 1-\alpha}(-T^{2\alpha}) \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_2(T) &= q_2^T - q_2^0 [2 - E_{2\alpha}(-T^{2\alpha})] + \\ &+ \frac{q_1^0}{T^\alpha} \left[ \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} - E_{2\alpha, 1-\alpha}(-T^{2\alpha}) \right]. \end{aligned} \quad (13)$$

Норма функций  $g_{1,2}(t)$  в пространстве  $L_2[0, T]$ , исходя из формул (12) и представлений (11), дается выражениями:

$$\begin{aligned} \|g_1(t)\|^2 &= I_1(\alpha, T) = \\ &= \int_0^T (T-\tau)^{2\alpha-2} E_{2\alpha, \alpha}^2[-(T-\tau)^{2\alpha}] d\tau, \\ \|g_2(t)\|^2 &= I_2(\alpha, T) = \\ &= \int_0^T (T-\tau)^{4\alpha-2} E_{2\alpha, 2\alpha}^2[-(T-\tau)^{2\alpha}] d\tau. \end{aligned} \quad (14)$$

Соответственно, проблема моментов (4) с моментами (13) и функциями (12) может быть поставлена, когда правая часть формул (14) существует и ограничена. Получение явного выражения для интегралов в формулах (14) сопряжено с большими вычислительными трудностями, поэтому здесь мы ограничимся только следующей оценкой. Подынтегральное выражение в формулах (14) содержит произведение степенной функции и функции Миттаг-Леффлера. Последняя представляется абсолютно сходящимся на всей оси степенным рядом. Степенная же функция должна иметь показатель, больший  $-1$ , чтобы избежать степенной и логарифмической сингулярностей на верхнем пределе интегралов. Соответственно, учитывая явный вид показателей степенной функции в формулах (14), получаем, что  $\alpha > 1/2$  и  $\alpha > 1/4$ . Окончательно имеем условие  $\alpha > 1/2$ . Отметим, что полученное условие фактически означает, что суммарный порядок исследуемой системы (порядок уравнения, к которому может быть сведена система (1)) должен быть больше единицы.

Функции (12), очевидно, линейно независимые, следовательно, проблема моментов разрешима для любых  $\alpha \in (0, 1)$ . Здесь, как и в случае интеграторов дробного порядка [13, 14], условие разрешимости проблемы моментов оказывается менее жестким, чем условие возможности ее постановки.



### 3. РЕШЕНИЕ ПРОБЛЕМЫ МОМЕНТОВ

Известно, что общее решение проблемы моментов, соответствующее задаче А оптимального управления, в случае систем целого порядка дается в виде [15]:

$$u(t) = \lambda_n^{p'} \left| \sum_{i=1}^n \xi_i^* g_i(t) \right|^{p'-1} \operatorname{sign} \left( \sum_{i=1}^n \xi_i^* g_i(t) \right), \quad t \in [0, T], \quad (15)$$

где  $\xi_i^*$  — решение задачи (5), (6) на условный экстремум. Аналогично, общим решением задачи Б оптимального управления является [15] минимальное время перехода в конечное состояние  $T^*$  и управление

$$u(t) = l^{p'} \left| \sum_{i=1}^n \xi_i^* g_i(t) \right|^{p'-1} \operatorname{sign} \left( \sum_{i=1}^n \xi_i^* g_i(t) \right), \quad t \in [0, T^*], \quad (16)$$

где  $\xi_i^*$  находятся из решения задачи (5), (6) при  $T = T^*$ . При этом  $T^*$  находится как наименьшее действительное неотрицательное число, удовлетворяющее при заданном числе  $l > 0$  уравнению

$$\lambda_n(T^*) = l. \quad (17)$$

Решения (15) и (16) относятся к проблеме моментов (4), совпадающей по форме с классической  $l$ -проблемой моментов, при этом функции  $g_i(t)$  определяются формулами (12), а моменты  $a_i$  — формулами (13). Нецелый порядок системы в данном случае явно не присутствует в выражении (4), а входит как параметр в формулы (12) и (13). Следовательно, решения (15) и (16) будут справедливы и в случае систем нецелого порядка в ситуациях, когда проблема моментов (4) может быть поставлена (см. § 2). Далее приведены явные решения задачи оптимального управления для маятника дробного порядка ( $n = 2$ ) при  $p = p' = 2$ .

Выразив  $\xi_1$  через  $\xi_2$  с помощью условия (6), а также воспользовавшись формулами (12) и (11), можно переписать формулу (5) в виде:

$$\frac{1}{\lambda_2} = \min_{\xi_2} \left[ \int_0^T \left( \frac{1}{a_1(T)} \sin_\alpha(T - \tau) + \frac{a_1(T) - a_2(T)}{a_1(T)} \xi_2 \cos_\alpha(T - \tau) \right)^2 d\tau \right]^{1/2}. \quad (18)$$

Введем обозначение:

$$I_3(\alpha, T) = \int_0^T (T - \tau)^{3\alpha - 2} E_{2\alpha, \alpha}[-(T - \tau)^{2\alpha}] \times E_{2\alpha, 2\alpha}[-(T - \tau)^{2\alpha}] d\tau. \quad (19)$$

Раскрыв скобки в подынтегральном выражении и учитывая формулы (14) и (19), формулу (18) можно переписать в виде:

$$\frac{1}{\lambda_2} = \min_{\xi_2} \left[ \frac{1}{a_1^2(T)} I_1(\alpha, T) + 2\xi_2 \frac{a_1(T) - a_2(T)}{a_1(T)} I_3(\alpha, T) + \left( \frac{a_1(T) - a_2(T)}{a_1(T)} \xi_2 \right)^2 I_2(\alpha, T) \right]^{1/2}. \quad (20)$$

Вычислив производную по  $\xi_2$  от выражения в квадратных скобках в формуле (20), можно найти, что минимум данного выражения по  $\xi_2$  достигается при следующем значении этого параметра:

$$\xi_2^* = - \frac{1}{a_1(T) - a_2(T)} \frac{I_3(\alpha, T)}{I_2(\alpha, T)}. \quad (21)$$

Из формулы (20) с учетом выражения (21), получим:

$$\lambda_2 = |a_1(T)| \left( \frac{I_2(\alpha, T)}{I_1(\alpha, T) I_2(\alpha, T) - I_3^2(\alpha, T)} \right)^{1/2}. \quad (22)$$

Как уже отмечалось, для разрешимости проблемы моментов должно выполняться условие  $\lambda_2 > 0$ , которое можно переформулировать как требование положительности выражения в круглых скобках в формуле (22). Численные оценки показали, что данное выражение для  $\alpha \in (0, 1)$  положительно, что полностью согласуется с эквивалентным критерием о линейной независимости функций  $g_{1,2}(t)$  и свидетельствует о выполнении критерия разрешимости проблемы моментов для  $\alpha \in (0, 1)$ .

В соответствии с формулой (15) общее решение задачи А, с учетом выражений (6), (11), (12), (21) и (22), может быть записано в виде (см. Приложение 2):

$$u(t) = \frac{a_1(T) I_2(\alpha, T)}{I_1(\alpha, T) I_2(\alpha, T) - I_3^2(\alpha, T)} K_T^\alpha(t), \quad t \in [0, T], \quad (23)$$

где  $K_T^\alpha(t) = (T - t)^\alpha - 1 \left[ E_{2\alpha, \alpha}(-T - t)^{2\alpha} - \frac{I_3(\alpha, T)}{I_2(\alpha, T)} (T - t)^\alpha E_{2\alpha, 2\alpha}(-T - t)^{2\alpha} \right]$ .

Согласно формуле (16) общее решение задачи Б, с учетом выражений (6), (11), (12) и (21), может быть записано в виде (см. Приложение 2):

$$u(t) = \frac{I^2}{a_1(T^*)} K_{T^*}^\alpha(t), \quad t \in [0, T^*], \quad (24)$$

где  $T^*$  — наименьший действительный неотрицательный корень уравнения (17). Последнее с учетом формулы (22) и первой из формул (13) может быть переписано в виде:

$$\left| q_1^T - q_1^0 E_{2\alpha}(-T^{2\alpha}) - \frac{q_2^0}{T^\alpha} \left[ E_{2\alpha, 1-\alpha}(-T^{2\alpha}) - \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \right] \right| \times \left( \frac{I_2(\alpha, T)}{I_1(\alpha, T)I_2(\alpha, T) - I_3^2(\alpha, T)} \right)^{1/2} = 1. \quad (25)$$

Тем самым, доказаны следующие два утверждения.

**Теорема 1.** Пусть  $\alpha > 1/2$ . Тогда для системы (1) с начальными условиями (2) и конечными условиями (3) существует решение (23) задачи А оптимального управления.

**Теорема 2.** Пусть  $\alpha > 1/2$ . Тогда для системы (1) с начальными условиями (2) и конечными условиями (3) существует решение (24) задачи Б оптимального управления. ♦

С помощью формул (23) и (24) можно вывести явные выражения для временных зависимостей фазовых координат исследуемой системы в режиме оптимального управления, а также построить соответствующие фазовые траектории. Подставляя управление (23) в формулу (8) и учитывая выражения (9), (11), (14) и (19), получим:

$$q_1(t) = \frac{a_1(T)I_2(\alpha, T)}{I_1(\alpha, T)I_2(\alpha, T) - I_3^2(\alpha, T)} \int_0^t (t - \tau)^{\alpha-1} \times E_{2\alpha, \alpha}[-(t - \tau)^{2\alpha}] K_T^\alpha(\tau) d\tau + q_1^0 [2 - E_{2\alpha}(-t^{2\alpha})] + \frac{q_2^0}{t^\alpha} \left[ \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} - E_{2\alpha, 1-\alpha}(-t^{2\alpha}) \right],$$

$$q_2(t) = \frac{a_1(T)I_2(\alpha, T)}{I_1(\alpha, T)I_2(\alpha, T) - I_3^2(\alpha, T)} \int_0^t (t - \tau)^{2\alpha-1} \times E_{2\alpha, 2\alpha}[-(t - \tau)^{2\alpha}] K_T^\alpha(\tau) d\tau - \frac{q_1^0}{t^\alpha} \left[ \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} - E_{2\alpha, 1-\alpha}(-t^{2\alpha}) \right] + q_2^0 [2 - E_{2\alpha}(-t^{2\alpha})]. \quad (26)$$

Видно, что при  $t = T$  выражения (26) с учетом формул (13) сводятся к конечным условиям (3).

Кроме того, представляет интерес решение уравнений (1) при  $u(t) = \pm C = \text{const}$ :

$$q_1^{\pm C}(t) = q_1^0 [2 - E_{2\alpha}(-t^{2\alpha})] + \left( \pm C + \frac{q_2^0}{t^\alpha} \right) \left[ \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} - E_{2\alpha, 1-\alpha}(-t^{2\alpha}) \right],$$

$$q_2^{\pm C}(t) = q_2^0 + (\pm C + q_2^0) [1 - E_{2\alpha}(-t^{2\alpha})] - \frac{q_1^0}{t^\alpha} \left[ \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} - E_{2\alpha, 1-\alpha}(-t^{2\alpha}) \right]. \quad (27)$$

Такое решение, как известно [16], описывает границы интегральной воронки дифференциального включения, соответствующего системе описываемой уравнениями (1). С помощью формул (27) можно построить границы интегральной воронки как в трехмерном представлении, так и в виде проекций на фазовую плоскость (вычисляя значения фазовых координат в один и тот же момент времени).

#### 4. РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ

Далее представлены результаты расчетно-аналитических исследований полученных в § 3 решений задачи оптимального управления. Расчеты и визуализация данных осуществлялись средствами пакета MatLab 7.9. Значения двухпараметрической функции Миттаг-Леффлера вычислялись с помощью специального модуля данного пакета [17]. Интегралы, входящие в расчетные формулы, вычислялись методом Симпсона с помощью соответствующего модуля пакета MatLab. Расчеты проводились на обычном персональном компьютере (процессор Core 2 Duo 1,83 ГГц, 1 Гб ОЗУ) и потребовали от нескольких минут (при расчете временных зависимостей управления и зависимостей нормы от порядка системы) до 1 ч (при расчете фазовых траекторий и поиске минимального времени управления) машинного времени.

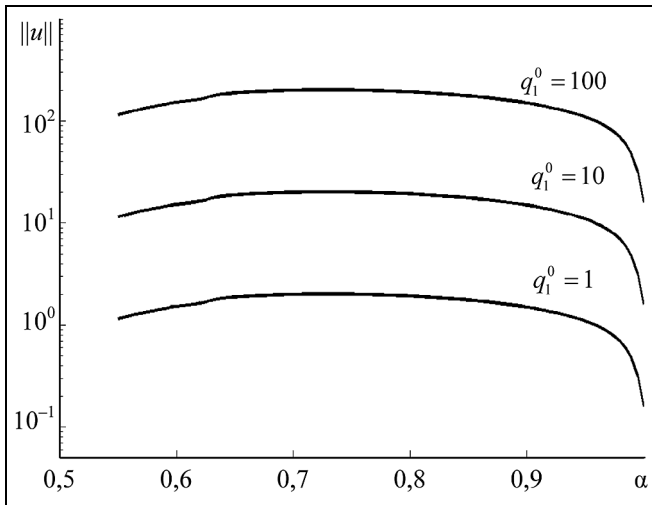


Рис. 1. Зависимость нормы управления от показателя дифференцирования при различных значениях  $q_1^0$ ;  $T = 100$

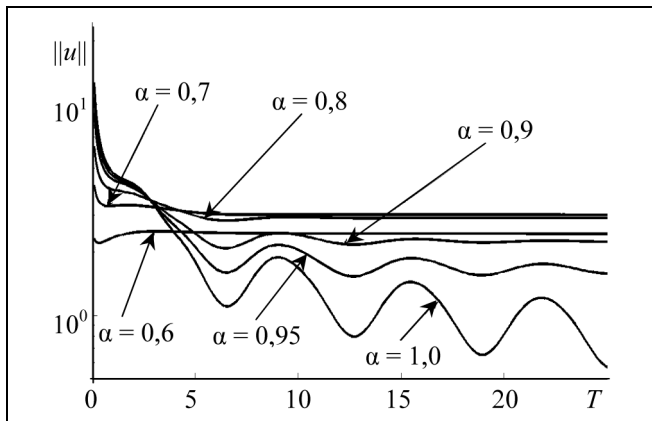


Рис. 2. Зависимость нормы управления от времени управления  $T$  при различных значениях показателя дифференцирования  $\alpha$ ,  $q_1^0 = 1$

Рассматривалась задача перевода системы в нулевое конечное состояние:  $q_1^0 \neq 0, q_2^0 = 0, q_1^T = q_2^T = 0$ .

На рис. 1 приведены зависимости нормы управления, вычисляемой по формуле (22), от показателя дробного дифференцирования. Видно, что зависимости немонотонны и имеют максимум при  $\alpha \approx 0,75$ . Также можно заметить, что, как и в случае интеграторов дробного порядка [13, 14], норма управления растет с увеличением  $q_1^0$ .

На рис. 2 приведены зависимости нормы управления от величины  $T$  для нескольких значений показателя  $\alpha$ . Видно, что зависимости, в целом, ана-

логичны зависимостям для интеграторов дробного порядка [14] и отвечают общим соображениям: норма управления уменьшается при увеличении времени управления. В области малых  $T$  норма управления растет с ростом показателя  $\alpha$ , а при больших  $T$  наблюдается обратная зависимость. В отличие от интеграторов дробного порядка, в данном случае для значений  $\alpha \geq 0,8$  наблюдается колебательный характер зависимости, причем он выражен заметно сильнее для значений показателя, близких к единице.

На рис. 3 представлены зависимости минимального времени перехода в задаче Б (определяемого из решения уравнения (25)) от показателя  $\alpha$  для различных значений числа  $l$ .

Представляют интерес также фазовые траектории системы (1).

На рис. 4 построены границы интегральной воронки в соответствии с формулами (27) при разных начальных условиях для различных значений показателя  $\alpha$ . Жирной точкой на рис. 4 обозначено начальное состояние. Поскольку формулы (27) явно содержат время, то траектории приведены в трехмерном представлении. На рис. 5 представлены проекции границ интегральной воронки, показанной на рис. 4, на фазовую плоскость. На рис. 5, а границы, соответствующие случаю  $u(t) = C$  показаны штриховыми линиями, а границы, соответствующие случаю  $u(t) = -C$  — сплошными. На рис. 5, б кривые для случаев  $q_1^0 = 1, q_2^0 = 0$  и  $q_1^0 = 10, q_2^0 = 25$  показаны сплошными и пунктирными линиями соответственно. Начальное состояние системы обозначено на рис. 5 жирной точкой, а жирными стрелками показаны направления выхода фазовых траекторий, соответствующих границам интегральной воронки.

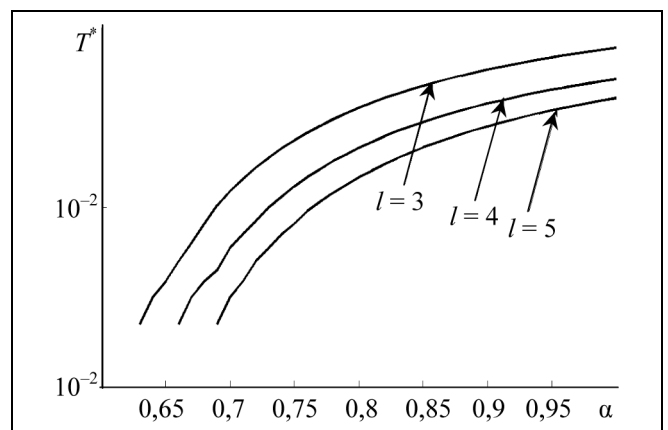


Рис. 3. Зависимость минимального времени перехода от показателя дифференцирования  $\alpha$  при различных значениях  $l$ ;  $q_1^0 = 1$

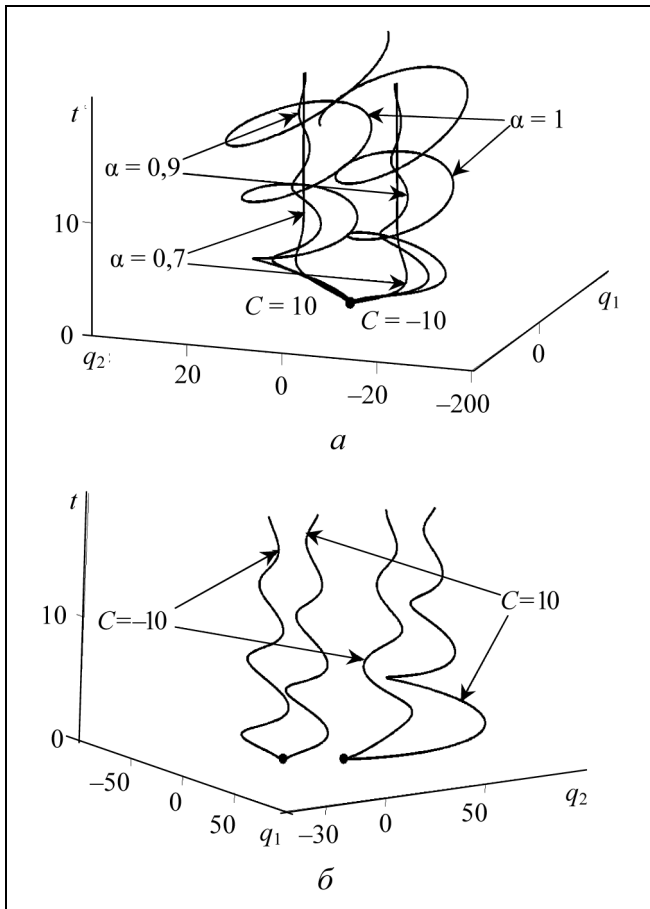


Рис. 4. Границы интегральной воронки для маятника дробного порядка при  $C = 10$ ,  $T = 20$ :  $a$  — начальные условия  $q_1^0 = 1$ ,  $q_2^0 = 0$ ;  $b$  —  $\alpha = 0,9$ , начальные условия  $q_1^0 = 1$ ,  $q_2^0 = 0$  и  $q_1^0 = 10$ ,  $q_2^0 = 25$

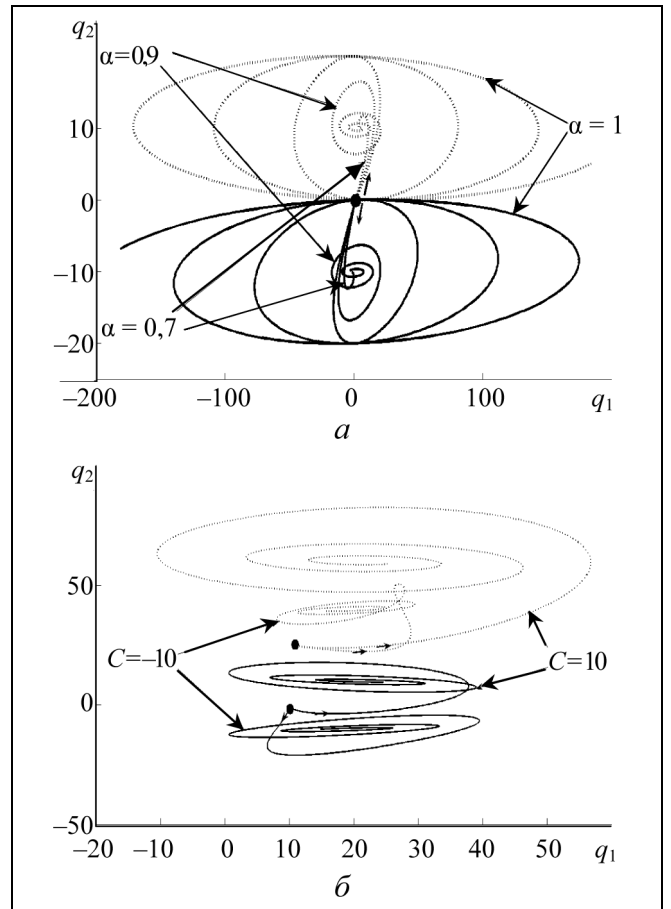


Рис. 5. Проекция границ интегральной воронки на фазовую плоскость для маятника дробного порядка при  $C = 10$ ,  $T = 20$ :  $a$  — представленных на рис. 4,  $a$ ;  $b$  — представленных на рис. 4,  $b$

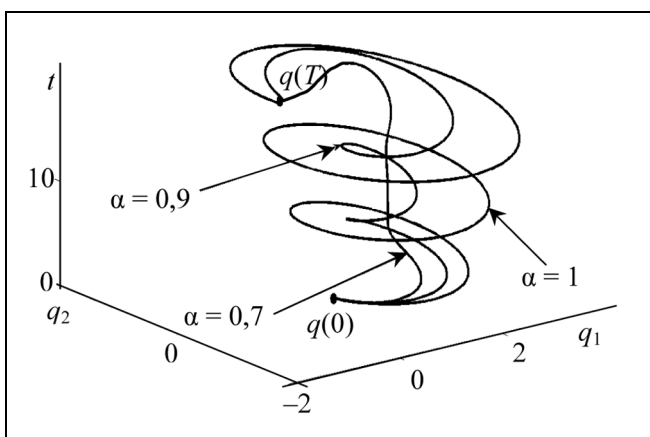


Рис. 6. Фазовые траектории маятника дробного порядка при различных значениях  $\alpha$

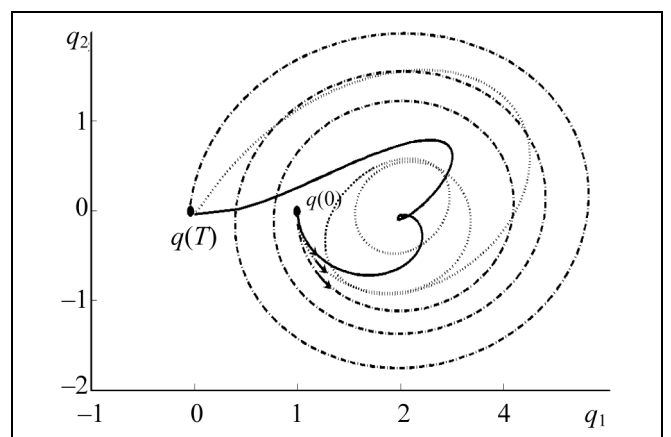


Рис. 7. Проекция фазовых траекторий маятника дробного порядка на фазовую плоскость при различных значениях  $\alpha$ :  $\alpha = 0,7$  (сплошная линия),  $\alpha = 0,9$  (штриховая линия),  $\alpha = 1$  (штрихпунктирная линия)



Из рис. 4 и 5 видно, что границы интегральной воронки для маятника дробного порядка оказываются уже, чем для маятника первого порядка. Они расширяются с ростом показателя  $\alpha$ . Видно также, что траектории, соответствующие границам, не пересекаются и имеют характер разворачивающейся спирали, как и в случае  $\alpha = 1$ .

На рис. 6 представлены фазовые траектории системы (1) для режима оптимального управления в задаче А, построенные в соответствии с формулами (26). На рис. 7 приведены проекции этих траекторий на фазовую плоскость. На рис. 6 и 7 жирной точкой показаны начальное и конечное состояния системы, которые в данном случае соответствуют состояниям  $(1, 0)$  и  $(0, 0)$ . Видно также, что, как и в случае границ интегральной воронки, фазовые траектории не имеют самопересечений и пересечений друг с другом. С увеличением показателя  $\alpha$  фазовая траектория (как и граница интегральной воронки) «заметает» больший объем фазового пространства и имеет более выраженный характер спирали.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Исследована задача оптимального управления в форме проблемы моментов для маятника дробного порядка в случае, когда допустимые управления ищутся в классе функций  $u(t) \in L_2[0, T]$ . Продемонстрирована возможность сведения задачи оптимального управления к  $l$ -проблеме моментов, для которой показаны возможность постановки и разрешимость, а также получены соответствующие условия.

Результаты численных расчетов для ряда случаев демонстрируют характер зависимости основных величин от показателя дифференцирования, времени управления и начальных условий. Проанализирована качественная динамика изучаемой системы: построены границы интегральной воронки дифференциального включения, описывающего маятник дробного порядка, и фазовые траектории системы в режиме оптимального управления.

Полученные результаты могут быть использованы в задачах управления различными системами нецелого порядка, включающими в себя в качестве составных элементов вязкоупругие материалы, пористые среды, неупорядоченные и сильно неоднородные полупроводники и/или плазмopodobные среды, электрохимические среды естественного и искусственного происхождения, длинные резистивно-емкостные линии и др. Формулы для управлений могут быть положены в основу расчетов при

синтезе систем управления. Зависимости нормы управления и минимального времени управления от порядка дробной производной в определяющих уравнениях маятника могут быть полезны, например, при выборе значения или диапазона изменения этого порядка для рассматриваемой системы при имеющихся ограничениях на норму и/или время управления. Результаты настоящей работы, как и результаты работ [13, 14], могут быть применимы при ограничениях на норму управления и разрывных управлениях.

Вопрос о достижимых значениях машинного времени и затратах оперативной памяти при вычислениях по полученным формулам в работе специально не исследовался. Учитывая, что при реализации расчетов средствами пакета MatLab без дополнительной оптимизации программного кода, упомянутая в § 4 ресурсоемкость оказалась вполне приемлемой, авторы считают возможным использование полученных результатов и в системах реального времени.

Авторы выражают благодарность рецензенту за внимательное прочтение статьи и ценные замечания.

## ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Далее приведен расчет интегралов от обобщенных тригонометрических функций, позволяющий перейти от формул (10) к явным аналитическим выражениям для моментов (13). Будем рассматривать случай  $\alpha > 0$ . Используя представление (11), получим (порядок суммирования и интегрирования может быть изменен, поскольку функция Миттаг-Леффлера представима абсолютно сходящимся на всей числовой оси степенным рядом [3]):

$$\begin{aligned} \int_0^T \sin_\alpha(T-\tau) d\tau &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \int_0^T \frac{(T-\tau)^{\alpha(2k+1)-1}}{\Gamma[\alpha(2k+1)]} = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{T^{\alpha(2k+1)}}{\Gamma[\alpha(2k+1)+1]} = \\ &= -T^{-\alpha} \left[ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-T^{2\alpha})^n}{\Gamma[2\alpha n - \alpha + 1]} - \frac{1}{\Gamma[1-\alpha]} \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^T \cos_\alpha(T-\tau) d\tau &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \int_0^T \frac{(T-\tau)^{2\alpha(k+1)-1}}{\Gamma[2\alpha(k+1)]} = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{T^{2\alpha(k+1)}}{\Gamma[2\alpha(k+1)+1]} = \\ &= 1 - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-T^{2\alpha})^k}{\Gamma[2\alpha k + 1]}, \end{aligned}$$



где  $n = k + 1$ . Используем представление функции Миттаг-Леффлера в виде степенного ряда [3]:

$$E_{\alpha, \beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma[\alpha k + \beta]},$$

при этом  $E_{\alpha, 1}(z) = E_{\alpha}(z)$  [3]. Тогда правые части полученных равенств можно окончательно переписать в виде:

$$\int_0^T \sin_{\alpha}(T - \tau) d\tau = T^{-\alpha} \left[ \frac{1}{\Gamma[1 - \alpha]} - E_{2\alpha, 1 - \alpha}(-T^{2\alpha}) \right],$$

$$\int_0^T \cos_{\alpha}(T - \tau) d\tau = 1 - E_{2\alpha}(-T^{2\alpha}).$$

## ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Вычислим производную по  $\xi_2$  от выражения в правой части формулы (20). Поскольку функция монотонна по  $\xi_2$ , минимум всего выражения будет совпадать с минимумом выражения под корнем. Поэтому можно написать производную только для последнего выражения:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \xi_2} \left[ \frac{1}{a_1^2(T)} I_1(\alpha, T) + 2\xi_2 \frac{a_1(T) - a_2(T)}{a_1^2(T)} I_3(\alpha, T) + \left( \frac{a_1(T) - a_2(T)}{a_1(T)} \xi_2 \right)^2 I_2(\alpha, T) \right] = \\ = 2 \frac{a_1(T) - a_2(T)}{a_1^2(T)} I_3(\alpha, T) + 2 \left( \frac{a_1(T) - a_2(T)}{a_1(T)} \right)^2 \xi_2 I_3(\alpha, T). \end{aligned}$$

Приравнявая правую часть полученного выражения нулю, получим формулу (21). Найденное значение  $\xi_2^*$  является точкой минимума для рассматриваемой функции, поскольку выражение в квадратных скобках (в силу выражения (5)) представляет собой квадрат вещественной функции и, следовательно, является положительно определенной квадратичной формой по  $\xi_2$ .

Используя формулу (21) для линейной комбинации, входящей в формулу (5), можно получить явное выражение ( $n = 2$ ):

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \xi_i^* g_i(t) = \frac{(T-t)^{\alpha-1}}{a_1(T)} \left[ E_{2\alpha, \alpha}(-(T-t)^{2\alpha}) - \right. \\ \left. - \frac{I_3(\alpha, T)}{I_2(\alpha, T)} (T-t)^{\alpha} E_{2\alpha, 2\alpha}(-(T-t)^{2\alpha}) \right] = \frac{K_T^{\alpha}(t)}{a_1(T)}. \end{aligned}$$

Подстановка этого выражения в формулы (15) и (16) позволяет окончательно получить формулы (23) и (24) соответственно.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Тарасов В.Е. Модели теоретической физики с интегрированием дробного порядка. — Ижевск: РХД, 2011. — 568 с.

2. Учайкин В.В. Метод дробных производных. — Ульяновск: Артишок, 2008. — 512 с.

3. Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J. Theory and applications of fractional differential equations. — Amsterdam: Elsevier, 2006. — 541 p.

4. Бутковский А.Г., Постнов С.С., Постнова Е.А. Дробное интегро-дифференциальное исчисление и его приложения в теории управления. I. Математические основы и проблема интерпретации // Автоматика и телемеханика. — 2013. — № 4. — С. 3—42.

5. Бутковский А.Г., Постнов С.С., Постнова Е.А. Дробное интегро-дифференциальное исчисление и его приложения в теории управления. II. Дробные динамические системы: моделирование и аппаратная реализация // Там же. — № 5. — С. 3—34.

6. Dulf E.-H., Pop C.-I., Dulf F.-V. Fractional Calculus in <sup>13</sup>C Separation Column Control // Signal, Image and Video Processing. — 2012. — Vol. 6. — P. 479—485.

7. Bruzzone L., Fanghella P. Fractional-Order Control of a Micrometric Linear Axis // Journal Contr. Sci. Eng. — 2013. — Vol. 2013. — Article ID 947428. — 10 p.

8. Fractional-order Systems and Controls: Fundamentals and Applications / C.A. Monje, et al. — London: Springer-Verlag, 2010. — 429 p.

9. Fractional Order Systems. Modelling and Control Applications / R. Caponetto, et al. — Singapore: World Scientific, 2010. — 195 p.

10. Agrawal O.P. A General Formulation and Solution Scheme for Fractional Optimal Control Problems // Nonlinear Dynamics. — 2004. — Vol. 38. — P. 323—337.

11. Agrawal O.P. A Formulation and Numerical Scheme for Fractional Optimal Control Problems // Journal Vibr. Control. — 2008. — Vol. 14, N 9 — 10. — P. 1291—1299.

12. Frederico G.S.F., Torres D.F.M. Fractional Optimal Control in the Sense of Caputo and the Fractional Noether's Theorem // Int. Math. Forum. — 2008. — Vol. 3, N 10. — P. 479—493.

13. Постнов С.С. Исследование задачи оптимального управления для одиночного и двойного интеграторов дробного порядка с помощью метода моментов // Проблемы управления. — 2012. — № 5. — С. 9—17.

14. Кубышкин В.А., Постнов С.С. Исследование задачи оптимального управления для одиночного и двойного интеграторов дробного порядка с методом моментов при поиске допустимых управлений // Проблемы управления. — 2013. — № 3. — С. 9—17.

15. Красовский Н.Н. Теория управления движением. — М.: Наука, 1968. — 476 с.

16. Бутковский А.Г. Фазовые портреты управляемых динамических систем. — М.: Наука, 1985. — 136 с.

17. URL: <http://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/8738-mittag-leffler-function> (дата обращения 2.04.2014).

Статья представлена к публикации членом редколлегии В.Ю. Рутковским.

Виктор Алексеевич Кубышкин — д-р техн. наук, гл. науч. сотрудник, ☎ (495) 334-76-90, ✉ vicalkub@ipu.ru,

Сергей Сергеевич Постнов — аспирант, ✉ postnov.sergey@inbox.ru,

Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, г. Москва.