УДК 517.977;519.7

ИССЛЕДОВАНИЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ ОДИНОЧНОГО И ДВОЙНОГО ИНТЕГРАТОРОВ ДРОБНОГО ПОРЯДКА МЕТОДОМ МОМЕНТОВ ПРИ ПОИСКЕ ДОПУСТИМЫХ УПРАВЛЕНИЙ

В.А. Кубышкин, С.С. Постнов

Исследована задача оптимального управления для одиночного и двойного интеграторов дробного порядка в случае, когда допустимые управления ищутся в классе функций, интегрируемых на отрезке со степенью p. Задача сведена к проблеме моментов, для которой выведены и строго обоснованы условия, при которых она может быть поставлена и разрешима. В случае $p = 2$ получены решения задачи в аналитическом виде. Исследованы зависимости основных величин от порядков интеграторов. Проведено сравнение полученных результатов с результатами для исследованного ранее случая, когда допустимые управления ищутся в классе функций, измеримых и ограниченных на отрезке.

Ключевые слова: оптимальное управление, проблема моментов, интегратор, дробная производная Капуто.

ВВЕДЕНИЕ

Оптимальное управление динамическими системами нецелого порядка представляет собой сравнительно новое направление исследований, активно развивающееся в последние 5—7 лет. Его развитие обусловлено как достижениями функционального анализа и развитием аппарата дробного интегро-дифференциального исчисления, так и накоплением большого количества результатов в области фундаментальной и прикладной физики, показавших необходимость применения аппарата дробного исчисления для адекватного описания ряда реальных систем и процессов. В качестве примеров реальных систем здесь можно упомянуть электрохимические ячейки, конденсаторы с нерегулярными (фрактальными) электродами, вязкоупругие среды, неупорядоченные полупроводники, плазму и подобные ей среды.

Отметим, что для систем дробного порядка на сегодня не существует теорем, аналогичных принципу максимума Л.С. Понтрягина. Задачи оптимального управления для таких систем до недавнего времени исследовались с помощью вариационного подхода. В работе [1], логическим продолжением которой является данная работа, для исследования задачи оптимального управления одиночным и двойным интеграторами дробного порядка было предложено применить метод моментов.

В статье [1] рассмотрен случай, когда функция $u(t)$, называемая в дальнейшем управлением, принадлежит пространству $M[0, T]$ измеримых и почти всюду ограниченных на отрезке $[0, T]$ функций. В этом случае управление либо ограничено по модулю, либо максимальное значение искомого управления минимально. Однако на практике очень часто встречаются задачи, когда ограничения накладываются на энергию управляющего воздействия, выражаемую функционалом вида

$$J = \int_0^T u^2(t)dt,$$

который, как известно, представляет собой квадрат нормы управления в пространстве $L_2[0, T]$.

В связи с этим в данной работе рассматривается ситуация, когда функция $u(t)$ принадлежит пространству $L_p[0, T]$ функций, интегрируемых на отрезке $[0, T]$ со степенью p, $1 < p < \infty$, включая и предельный случай $p \to \infty$, когда пространство $L_p[0, T]$ изоморфно пространству $M[0, T]$. Отдельное внимание в работе уделено случаю $p = 2$, исходя из его большой практической важности.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть функции $q_i(t)$, $i = 1, 2$, и $u(t)$ определены на отрезке $[0, T]$, $T > 0$. Пусть управление $u(t)$ принадлежит пространству $L_p[0, T]$ с нормой

$$\|u(t)\| = \left(\int_0^T |u(t)|^p\right)^{1/p}.$$

Функции $q_i(t)$, $i = 1, 2$, определяющие состояние динамической системы в момент времени $t \in [0, T]$, будем считать обладающими всеми необходимыми свойствами для существования решений рассматриваемых далее уравнений, в частности, дифференцируемыми хотя бы один раз.

Дробную производную произвольного нецелого порядка $\alpha \in (0, 1)$ от функции $q_i(t)$ будем понимать как левостороннюю дробную производную Капуто [2, 3]:

$${}_0D_t^{\alpha}\, q_i(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \frac{dq_i(\tau)}{d\tau} \frac{d\tau}{(t-\tau)^{\alpha}}.$$

Одиночным интегратором дробного порядка (или просто дробным интегратором) будем называть динамическую систему, поведение которой описывается следующим дифференциальным уравнением дробного порядка:

$${}_0D_t^{\alpha}\, q(t) = u(t), \tag{1}$$

$\alpha \in (0, 1)$. Начальное и конечное условия для системы (1) зададим в виде:

$$q(0) = q_0, \tag{2}$$

$$q(T) = q_T. \tag{3}$$

Двойным интегратором дробного порядка (или двойным дробным интегратором) будем называть динамическую систему из двух связанных дробных интеграторов, поведение которой описывается следующей системой дифференциальных уравнений дробного порядка:

$${}_0D_t^{\alpha}\, q_1(t) = q_2(t), \tag{4а}$$

$${}_0D_t^{\beta}\, q_2(t) = u(t), \tag{4б}$$

$\alpha, \beta \in (0, 1)$. Для данной системы зададим начальные условия в виде

$$q_1(0) = q_1^0, \quad q_2(0) = q_2^0 \tag{5}$$

и конечные условия в виде

$$q_1(T) = q_1^T, \quad q_2(T) = q_2^T. \tag{6}$$

Поставим следующую задачу оптимального управления. Найти управление $u(t) \in L_p[0, T]$, $t \in [0, T]$, такое, чтобы система (1) или (4*а*, *б*) перешла из заданного начального состояния (2) или (5) в заданное конечное состояние (3) или (6) и при этом или

(А) норма управления $\|u\|$ в пространстве $L_p[0, T]$ достигла минимального значения, когда значение T задано, (задача А), или

(Б) время управления T было минимальным при условии $\|u\| \leqslant l$, значение $l > 0$, l задано (задача Б).

2. ПРОБЛЕМА МОМЕНТОВ

В работе [1] показано, что, записав решение уравнения (1) или системы (4 *а*, *б*) при $t = T$, можно свести поставленную в § 1 задачу оптимального управления к следующей проблеме моментов: найти $u(t)$, $\|u(t)\| \leqslant l$, при известных числах $a_i(T) = q(T) - q(0)$ и функциях $g_i(t)$, $i = \overline{1, n}$, если

$$\int_0^T g_i(\tau)u(\tau)d\tau = a_i(T), \quad i = \overline{1, n}, \quad t \in [0, T]. \tag{7}$$

Показано [4, 5], что проблема моментов (7) сводится к решению следующей задачи: найти

$$\min_{\xi_1, \ldots, \xi_n} \left(\int_0^T \left|\sum_{i=1}^n \xi_i g_i(t)\right|^{p'} dt\right)^{1/p'} = \left(\int_0^T \left|\sum_{i=1}^n \xi_i^* g_i(t)\right|^{p'} dt\right)^{1/p'} = \frac{1}{\lambda_n}, \tag{8}$$

$1/p + 1/p' = 1$ при условии

$$\sum_{i=1}^n a_i(T)\xi_i = 1. \tag{9}$$

При этом минимальная норма управления $\|u\| = \lambda_n$.

Известно [4, 5], что для постановки проблемы моментов ключевым условием является возможность определения нормы функций $u(t)$ и $g_i(t)$, $i = \overline{1, n}$ в соответствующих пространствах. Если $u(t) \in L_p[0, T]$, то $g_i(t) \in L_{p'}[0, T]$, $1/p + 1/p' = 1$, где $p, p' \in [1, \infty)$, и, следовательно, вопрос о возможности постановки проблемы моментов сводится к проверке существования и ограниченности интегралов вида $\int_0^T |g_i(t)|^{p'} dt$. Необходимым и достаточным условием разрешимости проблемы моментов: $\lambda_n \in R$, $\lambda_n > 0$, или, что эквивалентно, линейная независимость функций $g_i(t)$ [5].

Далее обсуждаются условия, при которых проблема моментов может быть поставлена и разрешима для одиночного и двойного интеграторов.

Для одиночного интегратора, $n = 1$, имеем [1]:

$$g_1(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \frac{1}{(T-t)^{1-\alpha}}, \quad t \in [0, T], \quad T > 0, \tag{10}$$

$$a(T) = q_T - q_0. \tag{11}$$

В этом случае справедлива

Теорема 1. *Для того чтобы одномерная l-проблема моментов вида* (7) *с функцией* $g_i(t)$ (10) *и моментом* (11) *могла быть поставлена и была разрешима необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия*:

1) $\forall\alpha$: $\alpha > 0$ *в случае* $u(t) \in M[0, T]$;

2) $\forall\alpha$: $\alpha > (p' - 1)/p'$ *в случае* $u(t) \in L_p[0, T]$, $1/p + 1/p' = 1$, $p, p' \in [1, \infty)$. ♦

Доказательство теоремы 1 приведено в Приложении.

Как можно видеть, второе из условий теоремы при $p' = 1$ переходит в первое условие, что согласуется с изоморфизмом пространства $L_p[0, T]$ при $p \to \infty$ и пространства $M[0, T]$. При $p' \to \infty$ и, следовательно, $p = 1$ будем иметь, согласно второму условию теоремы, $\alpha > 1$. Это будет соответствовать случаю $u(t) \in L_1[0, T]$, в котором проблема моментов может быть поставлена и имеет решение, но единственность этого решения не гарантирована [4]. Отметим, что в данной работе рассматривается интегратор порядка $\alpha \in (0, 1)$ и полученное ограничение $\alpha > 1$ выводит за пределы рассматриваемого диапазона. Тем не менее, в случае произвольного $\alpha > 0$ функция $g_1(t)$, как следует из общего решения уравнения (1) [6, *p. 199*], также имеет вид, определяемый формулой (10) и, следовательно, полученное ограничение имеет смысл. В случае $p = p' = 2$ второе условие теоремы 1 приводит к требованию $\alpha > 1/2$.

Для двойного интегратора ($n = 2$) справедливы формулы [1]:

$$g_1(\tau) = \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \frac{1}{(T-\tau)^{1-\alpha-\beta}}, \tag{12а}$$

$$g_2(\tau) = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \frac{1}{(T-\tau)^{1-\beta}}, \tag{12б}$$

$$a_1(T) = q_1^T - q_1^0 - \frac{q_2^0 T^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}, \tag{13а}$$

$$a_2(T) = q_2^T - q_2^0. \tag{13б}$$

Справедлива

Теорема 2. *Для того чтобы двумерная l-проблема моментов* (7) *с функциями* $g_i(t)$ (12*а*, *б*) *и моментами* (13*а*, *б*) *могла быть поставлена и была разрешима, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия*:

1) $\forall\alpha, \beta > 0$ в случае $u(t) \in M[0, T]$;

2) $\forall\beta > (p' - 1)/p'$, $\alpha > 0$ в случае $u(t) \in L_p[0, T]$, $1/p + 1/p' = 1$, $p, p' \in [1, \infty)$. ♦

Доказательство теоремы 2 приведено в Приложении.

Отметим, что в случае двойного интегратора для показателя дифференцирования в уравнении для второй фазовой переменной имеют место такие же неравенства, как и для одиночного интегратора. При этом на показатель дифференцирования в уравнении для первой из переменных существенных ограничений (кроме тривиального требования положительности) не налагается.

Полученные результаты явно показывают, что в случае управлений $u(t) \in L_p[0, T]$, в отличие от случая $u(t) \in M[0, T]$, возможность постановки и разрешимость проблемы моментов и соответствующей задачи оптимального управления при любых значениях порядков интеграторов не гарантирована, а выполняется только для определенного множества их значений.

3. РЕШЕНИЕ ПРОБЛЕМЫ МОМЕНТОВ

В § 2 получены условия, при которых для исследуемых систем может быть поставлена проблема моментов (к которой сведена задача оптимального управления этими системами) и она будет разрешимой. Далее приводятся явные решения задач А и Б оптимального управления одиночным и двойным интеграторами.

Решение задачи А оптимального управления дается в виде [4]:

$$u(t) = \lambda_n^{p'}\left|\sum_{i=1}^{n}\xi_i^* g_i(t)\right|^{p'-1}\operatorname{sign}\left(\sum_{i=1}^{n}\xi_i^* g_i(t)\right),\quad t \in [0,\ T]. \tag{14}$$

Решением задачи Б оптимального управления является [4] минимальное время перехода в конечное состояние T^* и управление

$$u(t) = l^{p'}\left|\sum_{i=1}^{n}\xi_i^* g_i(t)\right|^{p'-1}\operatorname{sign}\left(\sum_{i=1}^{n}\xi_i^* g_i(t)\right),\quad t \in [0,\ T^*], \tag{15}$$

где ξ_i^* находятся из решения задачи (8), (9) при $T = T^*$. При этом T^* находится как наименьшее действительное неотрицательное число, удовлетворяющее при заданном числе $l > 0$ уравнению

$$\lambda_n(T^*) = l. \tag{16}$$

Ранее отмечалось, что получить явное выражение для величины λ_2 (а также для ξ_i^*) при произвольном p в случае двойного интегратора не представляется возможным. Поэтому далее приведены явные решения задачи оптимального управления для одиночного интегратора при произвольном p, а в случае двойного интегратора — для $p = p' = 2$.

3.1. Одиночный интегратор

Из условия (9) следует, что $\xi^* = 1/a(T)$. Тогда, вычислив интеграл в формуле (8), можно получить:

$$\lambda_1 = \frac{|a(T)|\Gamma(\alpha)(p'(\alpha-1)+1)^{1/p'}}{T^{\alpha-1+1/p'}}. \tag{17}$$

Подставив формулу (17) в решение (14) и учтя выражение (11) для момента, получим явное решение задачи А:

$$u(t) = \frac{(p'(\alpha-1)+1)\Gamma(\alpha)}{T^{p'(\alpha-1)+1}} \times (q_T - q_0)(T-t)^{(p'-1)(\alpha-1)}. \tag{18}$$

Аналогично, подставляя формулу (17) в уравнение (16), получим:

$$T^* = \left(\frac{|q_T - q_0|\Gamma(\alpha)}{l}\right)^{\frac{p'}{p'(\alpha-1)+1}} \times (p'(\alpha-1)+1)^{\frac{1}{p'(\alpha-1)+1}}. \tag{19}$$

Соответствующее управление, согласно формуле (15), определяется выражением

$$u(t) = \frac{l^{p'}}{|q_T - q_0|^{p'-1}\Gamma^{p'-1}(\alpha)}[T^* - t]^{(p'-1)(\alpha-1)} \times \operatorname{sign}(q_T - q_0),\quad t \in [0,\ T]. \tag{20}$$

Из формул (18) и (20) видно, что в данном случае функции $u(t)$ характеризуются явной дробно-степенной зависимостью от времени, в отличие от случая $u(t) \in M[0,\ T]$ [1]. Также видно, что функции $u(t)$ не меняют знака на интервале $t \in [0,\ T]$, как и в случае $u(t) \in M[0,\ T]$ [1].

Несложно убедиться, что при $p' = 1$ формулы (18)—(20) переходят в соответствующие решения задачи оптимального управления одиночным интегратором, полученные ранее для случая $u(t) \in M[0,\ T]$ [1]. При $\alpha = 1$ формулы (18)—(20) переходят в соответствующие формулы для интегратора первого порядка [1, 4].

3.2. Двойной интегратор

В случае $p = p' = 2$ решение задачи (8), (9) приводит к следующему выражению для нормы управления:

$$\lambda_2 = \frac{\sqrt{\alpha+2\beta-1}}{\alpha T^{\alpha+\beta-1/2}}Z^{1/2}, \tag{21}$$

где

$$Z = |(\alpha + 2\beta - 1)(2\alpha + 2\beta - 1)a_1^2(T)\Gamma^2(\alpha+\beta) - 2(2\beta-1)(2\alpha+2\beta-1)a_1(T)a_2(T)\Gamma(\alpha+\beta)\Gamma(\beta)T^{\alpha} + (2\beta-1)(\alpha+2\beta-1)a_2^2(T)\Gamma^2(\beta)T^{2\alpha}|. \tag{22}$$

С учетом выражений (21) и (22) и в соответствии с формулой (14) получим явное решение задачи А оптимального управления:

$$u(t) = \frac{\alpha+2\beta-1}{\alpha^2 T^{2\alpha+2\beta-1}}(T-t)^{\beta-1}[(T-t)^{\alpha}(2\alpha+2\beta-1) \times ((\alpha+2\beta-1)a_1(T)\Gamma(\alpha+\beta) - (2\beta-1)a_2(T) \times \Gamma(\beta)T^{\alpha}) + T^{\alpha}(2\beta-1)((\alpha+2\beta-1)a_2(T)\Gamma(\beta)T^{\alpha} - (2\alpha+2\beta-1)a_1(T)\Gamma(\alpha+\beta))]. \tag{23}$$

В случае задачи Б оптимальное управление, в соответствии с формулой (15), определяется выражением:

$$u(t) = \frac{l^2(T^*-t)^{\beta-1}}{Z}[(T^*-t)^{\alpha}(2\alpha+2\beta-1) \times ((\alpha+2\beta-1)a_1(T)\Gamma(\alpha+\beta) - (2\beta-1)a_2(T)\Gamma(\beta)(T^*)^{\alpha}) + (T^*)^{\alpha}(2\beta-1) \times ((\alpha+2\beta-1)a_2(T)\Gamma(\beta)(T^*)^{\alpha} - (2\alpha+2\beta-1) \times a_1(T)\Gamma(\alpha+\beta))],\quad t \in [0,\ T^*],\quad l > 0. \tag{24}$$

При этом величина T^* находится как наименьший вещественный положительный корень уравнения

$$Z^{1/2} = \frac{\alpha l}{\sqrt{\alpha + 2\beta - 1}} T^{\alpha + \beta - 1/2}. \qquad (25)$$

Отметим, что формулы (23), (24) и уравнение (25) при $\alpha = \beta = 1$ переходят в аналогичные выражения для двойного интегратора первого порядка [4].

В качестве примера рассмотрим полученные формулы в случае $a_2(T) = 0$. Этот случай интересен, поскольку одновременно представляет собой важный частный случай, разбиравшийся ранее для интеграторов как целого [4], так и дробного [1] порядка, и дает возможность заметно упростить формулы и получить явные аналитические решения для задачи оптимального управления. Исходя из формул (21), (22) и уравнения (25), можно получить следующие упрощенные выражения:

$$\lambda_2 = \|u(t)\| =$$
$$= \frac{(\alpha + 2\beta - 1)\sqrt{2\alpha + 2\beta - 1}}{\alpha} \Gamma(\alpha + \beta) \frac{|a_1(T)|}{T^{\alpha + \beta - 1/2}},$$

$$T^* =$$
$$= \left(\frac{(\alpha + 2\beta - 1)\sqrt{2\alpha + 2\beta - 1}}{\alpha} \frac{|a_1(T)|\Gamma(\alpha + \beta)}{l}\right)^{\frac{2}{2\alpha + 2\beta - 1}}.$$

Формулы для управлений (23) и (24) приобретут соответственно следующий вид:

$$u(t) = \frac{(\alpha + 2\beta - 1)(2\alpha + 2\beta - 1)}{\alpha^2 T^{2\alpha + 2\beta - 1}} \Gamma(\alpha + \beta) \times$$
$$\times a_1(T)\ (T - t)^{\beta - 1}[(\alpha + 2\beta - 1)(T - t)^{\alpha} -$$
$$- (2\beta - 1)T^{\alpha}],$$

$$u(t) = \frac{l^2}{(\alpha + 2\beta - 1)\Gamma(\alpha + \beta)a_1(T)} (T^* - t)^{\beta - 1} \times$$
$$\times [(\alpha + 2\beta - 1)(T^* - t)^{\alpha} - (2\beta - 1)(T^*)^{\alpha}].$$

4. РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ

Ниже представлены результаты расчетов по полученным в настоящей работе формулам для $u(t) \in L_2[0, T]$ и сравнение этих результатов с результатами, полученными ранее для $u(t) \in M[0, T]$ [1]. Рассматривается задача перевода системы в нулевое конечное состояние $q_T = 0$ или $q_1^T = q_2^T = 0$. Задача А рассматривается на интервале $t \in [0, 100]$. В задаче Б по умолчанию принимается $l = 1$.

4.1. Одиночный интегратор

На рис. 1 представлены зависимости нормы управления в задаче А от показателя дифференцирования при различных начальных условиях. Здесь и далее сплошными линиями показаны зависимости для $u(t) \in M[0, T]$, а штриховыми — для $u(t) \in L_2[0, T]$ (построенные по формуле (17) при $p' = 1$). Значение начальной координаты q_0 увеличивается для кривых снизу вверх и составляет соответственно 1, 5 и 10. Видно, что для $u(t) \in L_2[0, T]$ норма управлений оказывается заметно большей, чем для $u(t) \in M[0, T]$ при прочих равных. Кроме того, поведение нормы управления в данном случае оказывается немонотонным: кривые имеют экстремум в области $\alpha \in [0,5; 0,6]$.

Зависимости нормы управления в задаче А от правой границы временного интервала для $u(t) \in L_2[0, T]$ имеют монотонно спадающий характер, как и для $u(t) \in M[0, T]$, и здесь не приводятся. В области малых T норма возрастает с ростом показателя дифференцирования, а в области больших T — падает. При одинаковом показателе дифференцирования в области малых T норма управления $u(t) \in L_2[0, T]$ оказывается ниже, чем для $u(t) \in M[0, T]$, а в области больших T наблюдается обратная тенденция.

На рис. 2 представлены зависимости минимального времени перехода в конечное состояние от показателя дифференцирования. Видно, что зависимости для $u(t) \in L_2[0, T]$ имеют бóльшую скорость роста. При этом характерные значения минимального времени перехода для $u(t) \in L_2[0, T]$

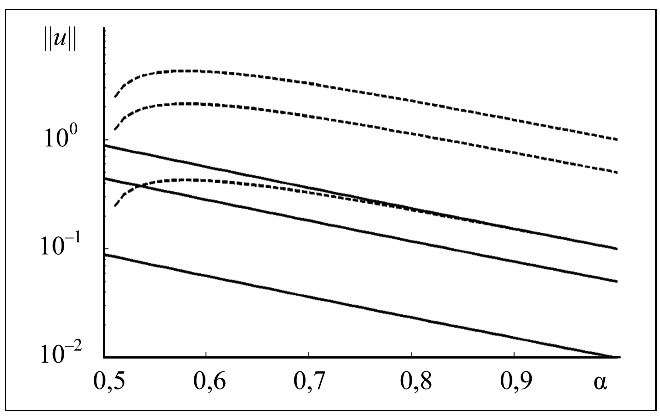

Рис. 1. Зависимости нормы управления от показателя дифференцирования для одиночного дробного интегратора

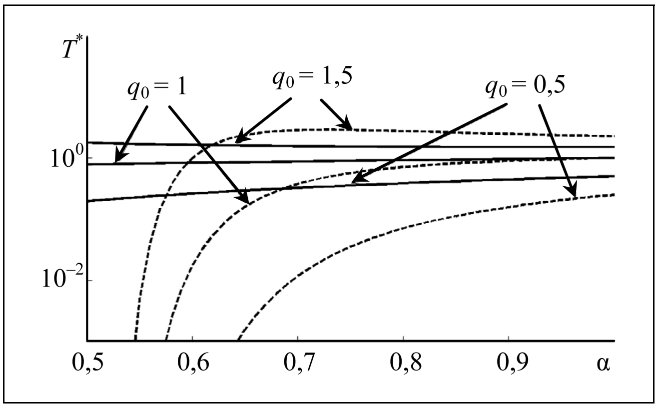

Рис. 2. Зависимости минимального времени перехода в конечное состояние от показателя дифференцирования для одиночного дробного интегратора

оказываются заметно ниже аналогичных значений для $u(t) \in M[0, T]$ в области $\alpha < 0{,}7$ и приближаются к ним при больших α.

4.2. Двойной интегратор

Далее приведены результаты расчетов для двойного интегратора дробного порядка. Рассматривается, как и ранее [1], случай $a_2(T) = 0$.

На рис. 3 приведены зависимости нормы управления в задаче А от показателя дифференцирования α при фиксированном показателе β. В целом, зависимости в случаях $u(t) \in L_2[0, T]$ и $u(t) \in M[0, T]$ демонстрируют одинаковый характер. При этом норма управления для $u(t) \in M[0, T]$ при равных показателях дифференцирования оказывается заметно меньше, чем для $u(t) \in L_2[0, T]$. Область малых α и β, в которой ранее [1] был отмечен экстремум в обсуждаемых зависимостях, в данном случае оказывается недоступной, так как в ней нарушается второе из неравенств теоремы 2 и, следовательно, задача оптимального управления в форме проблемы моментов не может быть поставлена и быть разрешима.

На рис. 4 показаны временные зависимости управлений в случаях $u(t) \in L_2[0, T]$ и $u(t) \in M[0, T]$ при $\alpha = 0{,}5$, $\beta = 0{,}7$. Видно, что в обоих случаях управление меняет знак один раз на рассматриваемом интервале. В случае $u(t) \in L_2[0, T]$ управление имеет заметно больший диапазон значений, чем для $u(t) \in M[0, T]$, а момент смены знака управления сильно смещен к правой границе временного интервала.

В связи с поведением управлений и их нормы, представленным на рис. 3 и 4, интересно проанализировать также и поведение энергии управляющего воздействия в случаях $u(t) \in M[0, T]$ и $u(t) \in L_2[0, T]$. Ранее было показано [1], что оптимальное управление двойным интегратором дробного порядка для $u(t) \in M[0, T]$ при $a_2 = 0$ дается формулой:

$$u(t) = -\gamma\frac{a_1(T)}{T^{\alpha+\beta}}\operatorname{sign}\left(\frac{(T-t)^{\alpha} - 2^{-\alpha/\beta}T^{\alpha}}{a_1(T)}\right), \quad t \in [0, T],$$

где $\gamma = 2^{\alpha/\beta}\Gamma(\alpha + \beta + 1)/(2^{\alpha/\beta} - 1)$. Отсюда следует, что энергия управляющего воздействия в данном случае

$$E_u = \int_0^T |u(t)|^2 dt = \frac{\gamma^2 a_1^2}{T^{2\alpha + 2\beta - 1}}. \qquad (26)$$

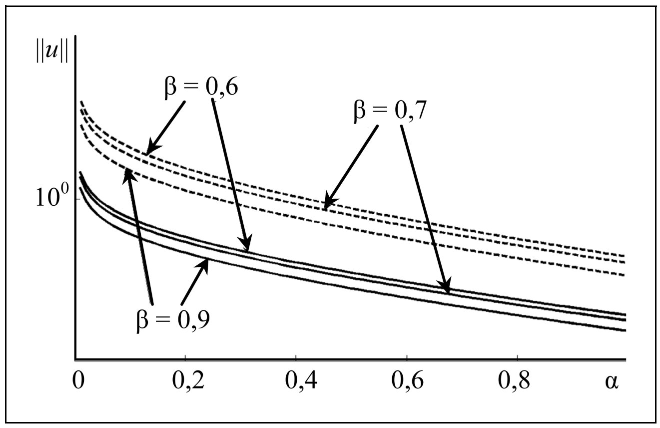

Рис. 3. Зависимости нормы управления от показателя дифференцирования α при фиксированном показателе β для двойного интегратора дробного порядка

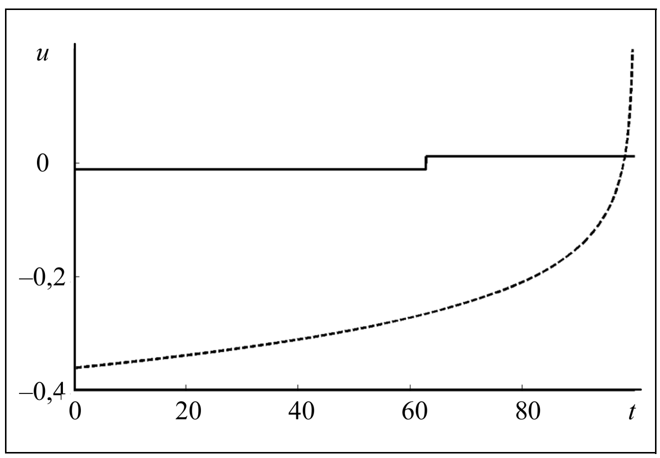

Рис. 4. Временные зависимости управлений в случае $u(t) \in L_2[0, T]$ и $u(t) \in M[0, T]$ при $\alpha = 0{,}5$, $\beta = 0{,}7$ для двойного интегратора дробного порядка

Энергия управляющего воздействия в случае $u(t) \in L_2[0, T]$ есть квадрат нормы управления и при $a_2 = 0$, в соответствии с формулами (21) и (22),

$$E_u = \int_0^T |u(t)|^2 dt =$$

$$= \frac{(\alpha + 2\beta - 1)^2(2\alpha + 2\beta - 1)}{\alpha T^{2\alpha + 2\beta - 1}} a_1^2 \Gamma^2(\alpha + \beta). \quad (27)$$

На рис. 5 и 6 представлены зависимости энергии управляющего воздействия, нормированной относительно общего для выражений (26) и (27) множителя $a_1^2 \Gamma^2(\alpha + \beta)/T^{2\alpha + 2\beta - 1}$, от показателей дифференцирования. Видно, что энергия управляющего воздействия в случае $u(t) \in M[0, T]$ (сплошные линии) оказывается выше (особенно в области малых значений показателей дифференцирования), чем в случае $u(t) \in L_2[0, T]$ (штриховые линии). В то же время, норма управления, как было показано (см. рис. 3), оказывается выше для

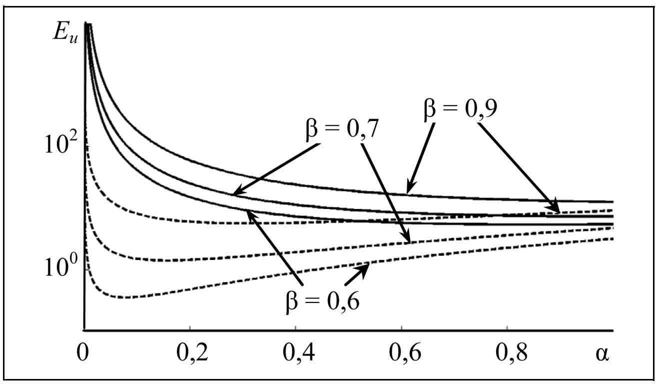

Рис. 5. Зависимости энергии управляющего воздействия от показателя дифференцирования α при фиксированном значении показателя β

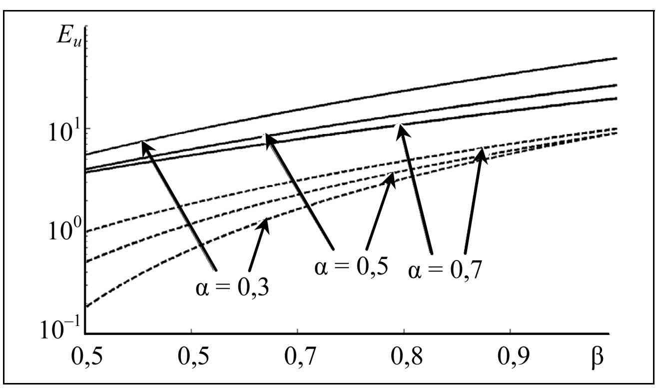

Рис. 6. Зависимости энергии управляющего воздействия от показателя дифференцирования β при фиксированном значении показателя α

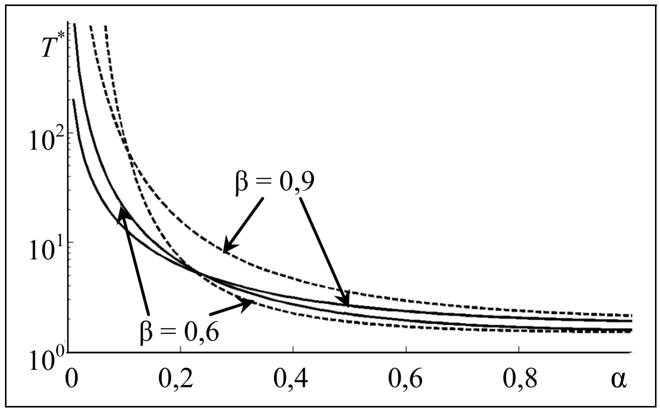

Рис. 7. Зависимости минимального времени перехода в конечное состояние от показателя дифференцирования α для двойного интегратора дробного порядка

$u(t) \in L_2[0, T]$. Интересно также, что зависимость для $u(t) \in L_2[0, T]$ имеет экстремум в области малых α.

На рис. 7 приведены зависимости минимального времени перехода в конечное состояние в случае задачи Б. Видно, что зависимости имеют одинаковый характер для случаев $u(t) \in L_2[0, T]$ и $u(t) \in M[0, T]$. Минимальное время перехода сильно отличается для $u(t) \in L_2[0, T]$ и $u(t) \in M[0, T]$ в области малых значений α, а в области $\alpha > 0{,}2$ графики сближаются.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Исследована задача оптимального управления одиночным и двойным интеграторами дробного порядка с помощью метода моментов для случая, когда допустимые управления ищутся в классе функций $u(t) \in L_p[0, T]$. Задача сведена к l-проблеме моментов, для которой строго доказаны возможность постановки и разрешимость, а также выведены явные условия, налагаемые на значения порядков интеграторов (или соответствующих показателей дифференцирования в уравнениях состояния). Также продемонстрировано соответствие случаю интеграторов первого порядка и полученным ранее результатам для $u(t) \in M[0, T]$.

Для одиночного интегратора при произвольном $p \in [1, \infty)$ в общем виде получены явные аналитические формулы, позволяющие находить оптимальное (в смысле минимума нормы управления или времени перехода в конечное состояние) управление и минимальное время перехода в конечное состояние при заданном ограничении на норму управления. Для двойного интегратора аналогичные результаты получены в случае $p = 2$.

Приведены результаты численных расчетов при $p = 2$ для ряда случаев, демонстрирующие характер зависимости основных величин от показателей дифференцирования и правой границы временнóго отрезка, на котором рассматривается задача. Отмечено, в частности, что и при $u(t) \in M[0, T]$, и при $u(t) \in L_2[0, T]$ управления для одиночного интегратора не меняют знака на рассматриваемом интервале, а в случае двойного интегратора меняют знак один раз. Такое поведение соответствует поведению системы порядка $[\alpha] + 1$ или $[\alpha] + [\beta] + 1$ на рассматриваемом интервале.

Полученные результаты могут быть полезны для решения задач управления различными системами нецелого порядка: механическими системами с вязким трением и наследственными эффектами, микроструктурированными и плазмоподобными (в том числе, электрохимическими) системами различной природы. В отличие от результатов, полученных в рамках вариационного подхода, результаты настоящей работы, как и работы [1], можно использовать при ограничениях на норму управления и разрывных управлениях.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство теоремы 1. Продемонстрируем возможность постановки проблемы моментов, показав, что $g_i(t) \in L_{p'}[0, T]$, т. е. что эти функции имеют норму в соответствующем пространстве. Непосредственным вычислением можно убедиться, что для $u(t) \in M[0, T]$, т. е. при $p \to \infty$ и $p' = 1$, норма функции $g_1(t)$

$$\int_0^T |g_1(t)|dt = -\begin{cases} \dfrac{(T-t)^{\alpha}\big|_0^T}{\Gamma(\alpha+1)}, \alpha \neq 0, \\ \ln(T-t)\big|_0^T, \alpha = 0. \end{cases} \quad (\text{П}1)$$

Норма (П1) будет определена в пространстве $L_1[0, T]$, когда выражение в правой части ограничено и положительно, т. е. при конечном $T > 0$ и $t \in [0, T]$ для α таких, что $\alpha > 0$. Полученное условие тождественно условию 1) теоремы 1. При $\alpha = 0$ в формуле (П1) возникает логарифмическая, а при $\alpha < 0$ — степенная сингулярность на верхнем пределе.

В случае $u(t) \in L_p[0, T]$

$$\int_0^T |g_1(t)|^{p'}dt = \begin{cases} \dfrac{(T-t)^{p'(\alpha-1)+1}\big|_0^T}{(p'(\alpha-1)+1)\Gamma^{p'}(\alpha)}, p'(\alpha-1)+1 \neq 0, \\ \ln(T-t)\big|_0^T, p'(\alpha-1)+1 = 0, \end{cases} \quad (\text{П}2)$$

откуда следует (аналогично случаю формулы (П1)), что норма функции $g_1(t)$ будет определена в пространстве $L_{p'}[0, T]$ (соответственно, выражение в правой части (П2) будет ограничено и положительно) при конечном $T > 0$ и $t \in [0, T]$ для α таких, что $\alpha > (p' - 1)/p'$. Данное условие, как легко убедиться, тождественно условию 2) теоремы 1.

С точностью до постоянного множителя интеграл в формуле (8) сводится к интегралу (П1) или (П2) в случаях $u(t) \in M[0, T]$ и $u(t) \in L_p[0, T]$ соответственно, и при выполнении условий теоремы 1, в обоих случаях при конечном $T > 0$ будем иметь $\lambda_1 \in R$, $\lambda_1 > 0$. Следовательно, выполняется необходимое и достаточное условие разрешимости проблемы моментов [5].

Доказательство теоремы 2. Проведем доказательство аналогично случаю одиночного интегратора (см. доказательство теоремы 1).

Продемонстрируем возможность постановки проблемы моментов, показав, что $g_i(t) \in L_{p'}[0, T]$, т. е. эти функции имеют норму в соответствующем пространстве.

Норма функций $g_i(t)$, $i = 1, 2$, определяемых формулами (12*а*) и (12*б*), в случае $u(t) \in M[0, T]$ имеет вид:

$$\int_0^T |g_1(t)|dt = \begin{cases} \dfrac{(T-t)^{\beta}\big|_0^T}{\Gamma(\beta+1)}, \beta \neq 0, \\ \ln(T-t)\big|_0^T, \beta = 0, \end{cases} \quad (\text{П}3)$$

$$\int_0^T |g_2(t)|dt = \begin{cases} \dfrac{(T-t)^{\alpha+\beta}\big|_0^T}{\Gamma(\alpha+\beta+1)}, \alpha+\beta \neq 0, \\ \ln(T-t)\big|_0^T, \alpha+\beta = 0. \end{cases} \quad (\text{П}4)$$

Видно, что при конечном $T > 0$ выражения в правых частях формул (П3) и (П4) будут ограничены для α и β таких, что $\beta > 0$, $\alpha + \beta > 0$. При выполнении этих условий норма функций $g_i(t)$, $i = 1, 2$, в случае $u(t) \in M[0, T]$ будет определена в пространстве $L_1[0, T]$. В противном случае, как и в случае одиночного интегратора, имеет место логарифмическая или степенная сингулярность на верхнем пределе. Несложно убедиться, что полученные условия тождественны условию 1) теоремы 2.

Для случая $u(t) \in L_p[0, T]$ можно получить:

$$\int_0^T |g_1(t)|^{p'}dt = \begin{cases} \dfrac{(T-t)^{p'(\beta-1)+1}\big|_0^T}{(p'(\beta-1)+1)\Gamma^{p'}(\beta)}, p'(\beta-1)+1 \neq 0, \\ \ln(T-t)\big|_0^T, p'(\beta-1)+1 = 0, \end{cases} \quad (\text{П}5)$$

$$\int_0^T |g_1(t)|^{p'}dt =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{(T-t)^{p'(\alpha+\beta-1)+1}\big|_0^T}{(p'(\alpha+\beta-1)+1)\Gamma(\alpha+\beta)}, p'(\alpha+\beta-1)+1 \neq 0, \\ \ln(T-t)\big|_0^T, p'(\alpha+\beta-1)+1 = 0. \end{cases} \quad (\text{П}6)$$

При конечном $T > 0$ выражения в правых частях формул (П5) и (П6) ограничены и, следовательно, норма функций $g_i(t)$, $i = 1, 2$, будет определена в пространстве $L_{p'}[0, T]$ для α и β таких, что $p'(\beta - 1) + 1 > 0$, $p'(\alpha + \beta - 1) + 1 > 0$. В противном случае, как и ранее, имеет место логарифмическая или степенная сингулярность на верхнем пределе. Полученные условия, как несложно убедиться, тождественны условию 2) теоремы 2.

В случае $u(t) \in M[0, T]$, как и в случае $u(t) \in L_p[0, T]$, явное выражение для λ_2 получить не удается [1]. Тем не менее, можно показать, что соответствующее выражение в левой части формулы (8) будет ограничено, вещественно и положительно. Вещественность и положительность следует из того, что в подынтегральной функции стоит модуль. Покажем теперь ограниченность выражения для λ_2. В случае двойного интегратора, $n = 2$, учитывая выражения (12*а*) и (12*б*), можно показать, что под интегралом в формуле (8) будет стоять выражение вида

$$[A(T - t)^{\alpha + \beta - 1} + B(T - t)^{\beta - 1}]^{p'},$$

где A и B — постоянные коэффициенты. При целых p' после возведения в степень данное выражение будет представлять собой конечный ряд, общий член c_k которого в соответствии с формулой для бинома Ньютона зависит от времени следующим образом:

$$c_k \sim (T - t)^{p'(\alpha + \beta - 1) - k\alpha}, \quad k = \overline{0, p'}.$$

После интегрирования

$$c_k' \sim (T - t)^{p'(\alpha + \beta - 1) - k\alpha + 1}.$$

Для ограниченности интеграла в формуле (8) необходимо и достаточно, чтобы показатели степени всех членов ряда c_k' были строго положительны. Минимальное значение показателя при $\alpha > 0$ достигается при $k = p'$. Отсюда следует условие, тождественное условию 2) теоремы 2: $p'(\beta - 1) + 1 > 0$.

Если p' нецелое, для проверки положительности и вещественности λ_2 можно воспользоваться условием линейной независимости функций $g_i(t)$, тождественным [5] условию неотрицательности и вещественности λ_2. С помощью формул (12*а*) и (12*б*) можно показать, что вронскиан функций $g_i(t)$

$$W[g_1(t), g_2(t)] = g_1(t)g_2'(t) - g_2(t)g_1'(t) = -\alpha\frac{(T - t)^{\alpha + 2\beta - 3}}{\Gamma(\beta)\Gamma(\alpha + \beta)}.$$

Видно, что при $\alpha \neq 0$ вронскиан не равен нулю ни в одной точке интервала $t \in [0, T]$, а при $t = T$ обращается в бесконечность для $\alpha, \beta \in (0, 1)$. Следовательно, функции $g_i(t)$ линейно независимы. Тем самым, в данном случае выполнено необходимое и достаточное условие разрешимости проблемы моментов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Постнов С.С.* Исследование задачи оптимального управления для одиночного и двойного интеграторов дробного порядка с помощью метода моментов // Проблемы управления. — 2012. — № 5. — С. 9—17.
2. *Тарасов В.Е.* Модели теоретической физики с интегро-дифференцированием дробного порядка. — Ижевск: РХД, 2011. — 568 с.
3. *Учайкин В.В.* Метод дробных производных. — Ульяновск: Артишок, 2008. — 512 с.
4. *Бутковский А.Г.* Методы управления системами с распределенными параметрами. — М.: Наука, 1975. — 568 с.
5. *Красовский Н.Н.* Теория управления движением. — М.: Наука, 1968. — 476 с.
6. *Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J.* Theory and applications of fractional differential equations. — Amsterdam: Elsevier, 2006. — 541 p.

Статья представлена к публикации членом редколлегии В.Ю. Рутковским.

Виктор Алексеевич Кубышкин — д-р техн. наук,
и.о. зав. лабораторией, ☎ (495) 334-76-90, ✉ vicalkub@ipu.ru,

Сергей Сергеевич Постнов — аспирант,
✉ postnov.sergey@inbox.ru,

Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, г. Москва.