УДК 336.76

ПОИСК ОПТИМАЛЬНОГО КРЕДИТНОГО РЫЧАГА В УСЛОВИЯХ МАКСИМИЗАЦИИ ОЖИДАЕМОЙ СКОРОСТИ РОСТА СТОИМОСТИ ПОРТФЕЛЯ

О.И. Кривошеев

Рассмотрена задача управления портфелем на базе портфеля ценных бумаг Марковица, испытывающим независимые случайные приращения логарифма стоимости, описываемые винеровским процессом с трендом и выступающей в качестве безрискового актива наличности. Получены выражение для оптимального кредитного рычага, характеризующего структуру портфеля, оптимальное время или порог коррекции рычага в условиях ненулевых издержек операций с активами. Найдены равновесные доходность актива и рычаг в условиях выравнивания доходностей собственного капитала на всех рынках. Описанный подход адаптирован для предприятий реальной экономики, оптимизирующих свое финансовое состояние. Выведены формулы, описывающие отток капитала.

Ключевые слова: CAPM, винеровский процесс, инвестирование, кредитный рычаг, портфельное инвестирование, акции, случайные блуждания, доходность.

ВВЕДЕНИЕ

Для моделирования инвестиционного процесса крайне важно описать поведение инвесторов по управлению своим финансовым состоянием. В настоящей статье рассматривается класс стратегий [1, 2] инвестирования на бирже, состоящих в поддержании фиксированного соотношения собственных и инвестированных средств (т. е. фиксированного кредитного рычага). Можно также говорить о доле долга в располагаемых средствах, которая взаимнооднозначно связана с кредитным рычагом. Целевым функционалом избирается ожидаемая средняя скорость прироста собственного капитала. Пример такого подхода к инвестированию в индекс Standard & Poor 500 за 2004—2014 гг. (рис. 1) приводит к доходности как функции кредитного рычага, изображенной на рис. 2: оптимум в 7 % годовых достигнут при кредитном рычаге 1,8, т. е. близком к 2.

Видно, что в результате вариации уровня кредитного рычага получается кривая доходности, похожая на параболу (далее будет продемонстрировано, что в некоторых естественных предположениях это должна быть именно парабола). Важно, что оптимальный рычаг или оптимальное финансовое состояние предприятия в данном подходе никак не зависит от рисковых предпочтений инвестора. Более традиционный подход состоит в формировании оптимального портфеля на основе рассмотрения одновременно множества допустимых альтернатив и предпочтений инвестора, задаваемых, например, функцией полезности. Ряд

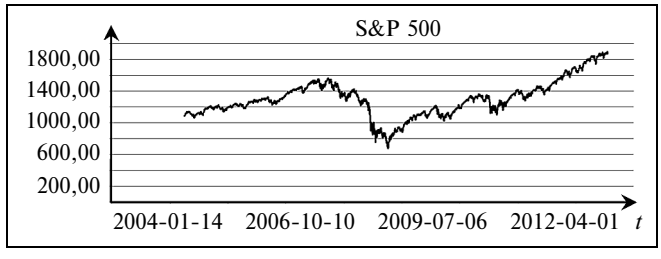

Рис. 1. Изменение индекса Standard & Poor 500 за 2004—2014 гг.

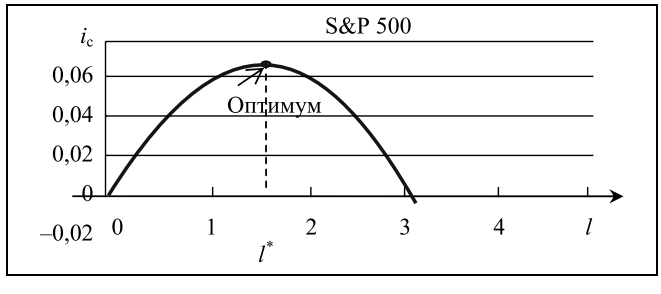

Рис. 2. Зависимость доходности на собственный капитал от кредитного рычага *l*, который поддерживался постоянным (с учетом изменения котировок) на каждом шаге ряда

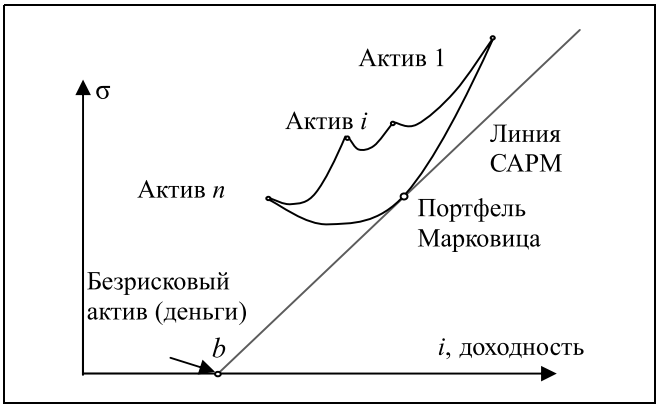

Рис. 3. Зонт Марковица и линия CAPM: углы «зонта» соответствуют рыночным активам, сам зонт — их положительным комбинациям, линия CAPM — Парето-граница комбинаций рыночных активов, смешанных с безрисковым активом — деньгами

положений этого подхода был сформулирован в статье Г.М. Марковица (1952), где впервые предложена модель, ныне известная под его именем. Множество доступных инвестору альтернатив описывалось хорошо известным «зонтом Марковица» (рис. 3), представляющим собой криволинейную область в координатах «волатильность — доходность», своеобразными «шипами» излома границы которой являются отдельные биржевые активы. Внутренние точки этого зонта несколько нетривиально получаются как линейные (выпуклые) комбинации чистых активов, при которых доходности обычным образом усредняются с положительными весами, а волатильности или среднеквадратичные отклонения σ складываются с теми же весами на основе сложения нормально распределенных случайных величин с неединичной матрицей корреляции. Парето-оптимальные портфели образуют «юго-восточную» границу этого множества.

В дальнейшем первоначальная модель была доработана Д. Трейнером и У. Шарпом путем введения важного дополнительного безрискового актива с доходностью $i = b$ и нулевым отклонением $\sigma = 0$. В роли актива выступали американские гособлигации (деньги). Модель получила название CAPM — Capital Asset Pricing Model [2—11], а множество Парето-оптимальных альтернатив «развернулось» в прямую касательную линию, проходящую через одну — крайнюю — точку «зонта Марковица» и точку (b, 0) — безрискового актива; ее также называют линией CAPM. Точкой касания является так называемый портфель Марковица. И теперь можно считать, что любой Парето-оптимальный портфель состоит из гособлигаций (т. е. попросту денег) и этого портфеля Марковица. В большинстве работ и учебников также часто предполагают, что портфель Марковица — это просто вся совокупность торгуемых на бирже бумаг, взятых с их весом, именуемая «индекс».

В настоящей статье предлагается предельно рафинированный подход — мы используем широко популяризированную Блейком и Шоулзом биномиальную модель ценовых блужданий (аппроксимирующую винеровский процесс) для анализа поведения инвестора, максимизирующего математическое ожидание скорости роста собственного капитала (существенно, что нами усреднению подвергается не сам доход, а фактически его нелинейное преобразование — *IRR*: средний *IRR* не равен *IRR* усредненного денежного потока).

Любой исследуемый портфель лежит на линии CAPM и состоит из денег и портфеля Марковица, взятых с весами, в сумме равными единице. Нулевой кредитный рычаг — когда все вложено в гособлигации/деньги, единичный — когда все вложено в портфель Марковица. Портфели между этими точками имеют положительный рычаг, меньший единицы, портфели на линии CAPM выше портфеля Марковица имеют рычаг, больший единицы (часть денег взята в кредит).

Отличие предлагаемого в данной статье подхода от классической модели Марковица в том, что рассматривается «естественная» целевая функция поведения инвестора, что позволяет сделать более конкретные выводы и вывести определенные лаконичные формулы, полезные для математического моделирования, в частности, формулы доходности и оптимального кредитного рычага. Удается показать, что эти формулы пригодны не только для управления биржевыми активами, но и для управления финансовым состоянием реальных предприятий, что позволяет в дальнейшем (уже вне рамок данного изложения) моделировать динамику оптимального инвестиционного поведения как поддержание кредитного рычага (а также как релаксационное приведение структуры активов к найденному оптимуму) и органично вводить учет инвестиций в моделях экономики типа моделей общего равновесия, добавив к ним новый экзогенный параметр или, в зависимости от модификации, внутреннюю переменную — волатильность.

Структура изложения. Сначала выводится формула оптимального кредитного рычага — оптимального уровня долга. Далее вводятся транзакционные издержки. Это позволяет получить оптимальное время коррекции кредитного рычага, при котором находится компромисс между потерями от отклонения от оптимума уровня долга (кредитного рычага) и потерями от потенциально бесконечных на фрактально-бесконечной броуновской траектории транзакционных издержек.

Затем рассматриваются 100 %-но коррелированные рынки с разной волатильностью и перетоком капиталов и выводятся формулы для равно-

весного уровня доходности на этих рынках — как уровня, при котором доходность собственного капитала сравнивается со среднемировой.

Тот же подход при известной скорости роста каждого локального рынка позволяет вычислить скорость оттока капитала, требуемую для поддержания местной (локальной) доходности физического капитала и кредитного рычага на равновесном уровне.

Потом обсуждается возможность переноса результатов для финансовых рынков на реальные производственные активы (математически это переход от интеграла к производной). Наконец, выводится несколько вариантов оптимального инвестиционного правила, позволяющего рационально моделировать инвестиционный процесс.

1. ДИСКРЕТНАЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ ЦЕН

Принятые обозначения:

i_1 — средняя (ожидаемая) доходность физического капитала актива;

i_c — средняя (ожидаемая) доходность собственного капитала;

$i_c(l)/l$ — удельная рентабельность;

K — основной капитал;

$l = \dfrac{1}{1-\theta}$ — кредитный рычаг (денежный мультипликатор);

M — математическое ожидание;

r — риск;

V — приращение (случайное) собственного капитала за период;

δ — конечное отклонение портфеля за время τ, в гауссовом приближении $\delta = \sqrt{\tau\phi}$;

$\Delta = |l - l^*|/l^*$ — отклонение рычага от оптимума;

θ — доля заемных средств — уровень долга;

μ_0 — долгосрочный темп роста экономики;

τ — размер шага дискретной аппроксимации стохастического процесса по времени;

τ^* — оптимальное время пересмотра портфеля в условиях издержек;

ϕ — уровень генерации дисперсии изменения логарифма цен актива в винеровском процессе, приближающем их блуждание — квадрат волатильности;

* — индекс оптимального показателя;

$_{eq}$ — индекс равновесного показателя;

$\tilde{x}$ означает случайную реализацию величины x, например, используются $\tilde{i}$.

Малый инвестор на рынке последовательно видит цены актива $\vec{p}^T = (p_0, p_1, ..., p_{n-1}, p_n)$. Можно, но не обязательно, считать, что эти значения равно отстоят на временной оси за суммарное время $T = n\tau$, где τ — интервал между последовательными значениями, n — максимальный индекс последовательности. При стратегии постоянного кредитного рычага действия инвестора таковы. На каждом дискретном шаге t весь собственный капитал C_t плюс $C_t(l-1)$ кредитных средств помещается в актив, актив испытывает непрогнозируемое приращение — изменение цены вверх или вниз, далее все продается (долг погашается), и полученный новый капитал C_{t+1} претерпевает такое же вложение. На практике это не оптимально: при ненулевых издержках взаимно аннулирующиеся транзакции купли-продажи естественно заменить одной транзакцией коррекции рычага: покупкой, если собственный капитал возрос, и продажей в противном случае. Проследим за ростом собственного капитала.

При нулевой ставке процента[1] случайный коэффициент его роста:

$$V_t = lp_{t+1}/p_t - (l-1) \text{ или } V_t = l((p_{t+1}/p_t) - 1) + 1.$$

Целевая функция инвестора состоит в максимизации доходности собственного капитала:

$$i_c(l) = \ln(V_1(l)V_2(l) \ldots V_n(l))/T \to \max_l.$$

Считается, что $V_k(l) > 0$. Если последнее не выполнено даже в одном случае происходит банкротство инвестора, в связи с чем формально положим его доходность $i_c \to -\infty$. Величины i_c и V_k являются функциями кредитного рычага, они определены и конечны для каждой положительной последовательности $\vec{p}^T = (p_0, p_1, ..., p_{n-1}, p_n)$, хотя, в силу условия $\forall k$, $V_k(l) > 0$, не всюду.

Если итоговая цена выше начальной, а сам ряд немонотонен (см. рис. 1 и 4), легко показать, что функция $i_c(l)$ в области конечных значений унимодальна (см. рис. 2).

Возьмем минимальное отношение последовательных цен $p_{t+1}/p_t < 1$ компонент i_c

$$\ln V_t = \ln[l(p_{t+1}/p_t - 1) + 1],$$

как и i_c в целом, убывает до $-\infty$ при

$$l \to \frac{1}{1 - p_{t+1}/p_t},$$

[1] При ненулевой ставке процента следует писать несколько сложнее: $V_t = l\frac{p_{t+1}}{p_t} - (l-1)(1+b)$.

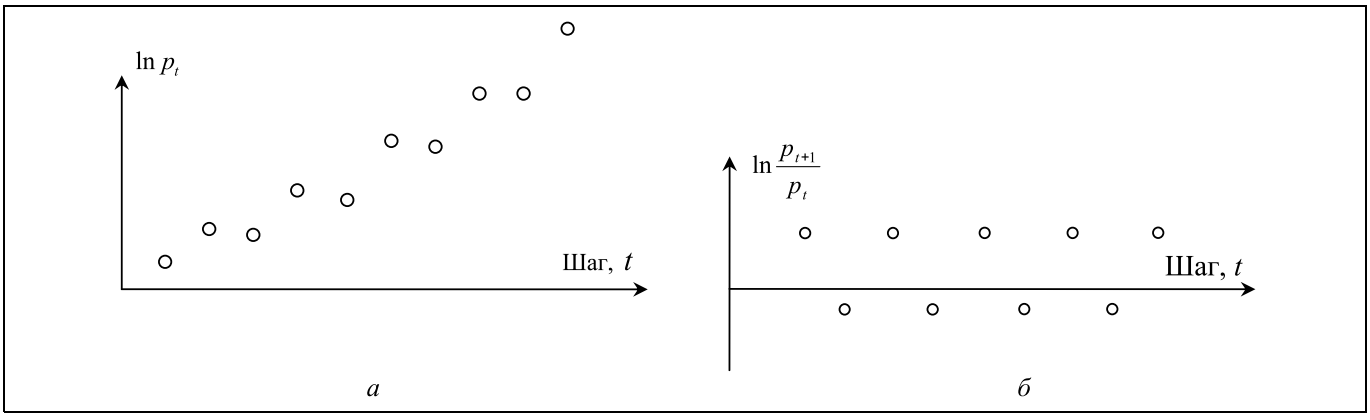

Рис. 4. Произвольная немонотонная последовательность прологарифмированных цен активов (*а*) и их приращений (*б*)

производная $i_c(l)$ при $l = 0$ в значительной мере определяется итоговым приращением логарифма цены актива $\ln(p_n/p_0)$, особенно если мы рассматриваем все более мелкие разбиения с $|p_{k+1} - p_k| \ll p_k$, как это имеет место в пределе для непрерывной зависимости $p(t)$. Верно утверждение, что, если $\ln(p_n/p_0) > 0$ и существует t: $(p_{t+1}/p_t < 1)$, то имеется конечный оптимальный кредитный рычаг l^*, максимизирующий доходность стратегии постоянного рычага для данного ряда. Примером такой функции доходности служит изображенная на рис. 2 доходность $i_c(l)$. (Ряд на рис. 1, для которого она посчитана, не монотонен, а конечная цена выше начальной.)

На практике ряд заранее не известен — есть лишь предположения о вероятностях траекторий, поэтому целевая функция должна записываться как математическое ожидание доходности $i_c(l)$ по распределению рядов

$$i_c = [M\ln(V_1V_2V_3 \ldots V_n)]/(n\tau), \qquad (1)$$

где V_i — случайный коэффициент роста собственного капитала, который зависит как от случайных событий, так и от размера рычага l, τ — шаг по времени, n — число шагов.

2. НЕПРЕРЫВНЫЙ ЦЕНОВОЙ РЯД

Если мы имеем непрерывную функцию, например, такую, как изображена на рис. 5, то можно рассмотреть ряд дискретных последовательностей $\vec{p}^T = (p_0, p_1, \ldots, p_{n-1}, p_n)$ с увеличивающимся n и уменьшающимся расстоянием τ между последовательными значениями p_k и p_{k+1}. Вызывает интерес существование предела при мелкости таких разбиений, стремящейся к нулю: $\tau \to 0$.

Легко показать, что для рядов, описываемых гладкими функциями, такая предельная функция $i_c(l)$ будет прямолинейной, с производной $\ln\frac{p_n}{p_0}/T$, где T — длина ряда; т. е. практически полезной содержательной теории построить нельзя, так как максимум либо в нуле, либо на бесконечности. Из практики же известно, что биржевые ряды всюду фрактальны. Наиболее часто предполагают, что ряд описывается винеровским процессом блуждания логарифма цены (броуновским движением с трендом). Для дальнейшего изложения зафиксируем это предположение.

Пусть все компоненты вектора $\vec{p}^T = (p_0, p_1, \ldots, p_{n-1}, p_n)$ отстоят на одинаковое время τ. В предположении, что каждое относительное увеличение цены p_{t+1}/p_t актива распределено одинаково и не зависит от предыстории, в выражении (1) можно рассматривать только первый сомножитель:

$$i_c(l) = [M\ln(V_1(l))]/\tau, \qquad (2)$$

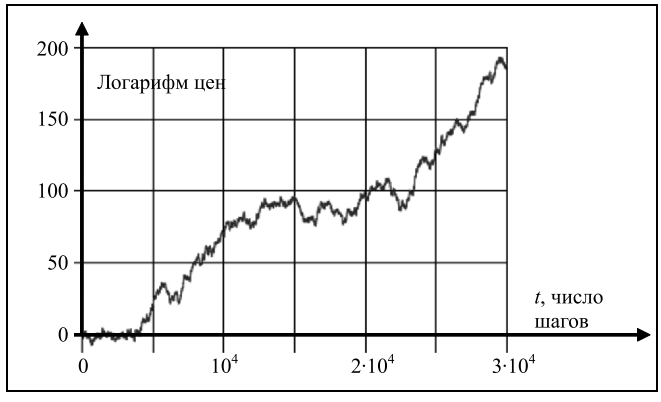

Рис. 5. Логарифм приращения цены актива от времени (в шагах). Винеровский процесс с трендом (случайная траектория)

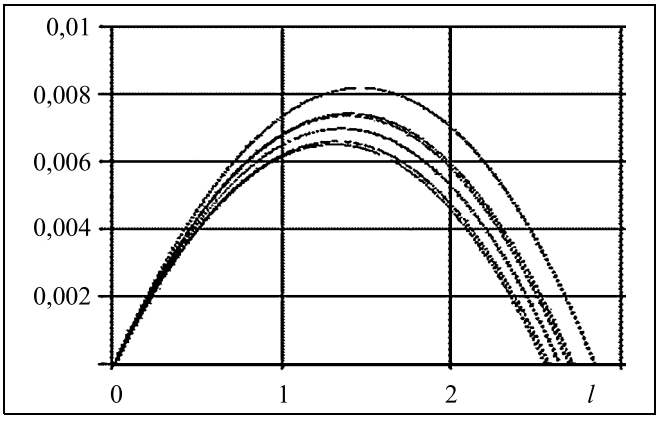

Рис. 6. Экспериментальные зависимости доходности от кредитного рычага (положительная часть) на шести последовательных интервалах винеровской траектории типа изображенной на рис. 5

Величина $\tau i_f = p_{t+1}/p_{t-1}$ представляет собой фактическую доходность за один шаг τ, она состоит из тренда $\exp(\tau i_1)$ и зависящего от промежутка τ случайного отклонения $\exp(\delta_{(\tau)})$: $\tau i_f = e^{\tau i_1 + \delta_{(\tau)}}$ откуда $V_t = l - 1 + le^{\tau i_1 + \delta_{(\tau)}}$.

В данной работе *не* предполагается возможность потерь кредитора или, по крайней мере, ее учета. Такая ситуация возникает на бирже, когда спекулянт рискует своим резервом: если оценка активов минус долг равна нулю, то активы распродаются, а счет закрывается.

Предваряя формальные выкладки, проведем численный эксперимент. Возьмем несколько реализаций ряда винеровских блужданий логарифма цены (с трендом) типа изображенных на рис. 5, и применим к ним — к каждой реализации по отдельности набор стратегий с поддержанием фиксированного кредитного рычага l. Результаты представлены на рис. 6: доходность отложена по вертикали, кредитный рычаг l по горизонтали.

Как видим, кривые доходности от рычага образуют зависимости, похожие на параболы. Они различаются высотой, но максимизирующий рычаг l^* довольно стабилен. Попробуем теоретически рассчитать значение максимальной доходности i_c^* и аргумент максимума l^*.

3. ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ВЫЧИСЛЕНИЕ ОПТИМАЛЬНОГО КРЕДИТНОГО РЫЧАГА

При броуновском блуждании нужно максимизировать по l целевую функцию:

$$i_c = \lim_{\tau \to 0} \frac{1}{\tau} \int_{\Re} \ln(l - 1 + e^{\tau i_1 + \delta} l) d\Phi\left(\frac{\delta}{\sqrt{\phi\tau}}\right) \to \max_{l \in [0; +\infty)},$$

где $\Phi(X)$ — несмещенная функция распределения Гаусса с единичной дисперсией $\phi\tau$ — дисперсия распределения для стоящей под дифференциалом сложной функции. Так как $\lim_{x \to +0} \ln x \to -\infty$, быстрое затухание гауссовой функции плотности распределения существенно для корректности интеграла, который берется по области, где $l - 1 + e^{\tau i_1 + \delta} l > \varepsilon > 0$ — по области без слишком больших по модулю отрицательных δ, что в линеаризованном случае сводится к условию, в рамках которого мы пренебрежем областью за пределами 2—3 σ: $\delta > (\varepsilon - 1)/l + \tau i_1$, $\varepsilon > 0$.

Исходя из допущения, что управлять портфелем можно сколь угодно быстро, подстраиваясь под изменения в рыночной ситуации, воспользуемся простой и наиболее удобной биномиальной моделью процесса, приводящего к броуновскому блужданию, использованной Блейком и Шоулзом. Основываясь на центральной предельной теореме теории вероятности, рассмотрим (порождаемый подбрасыванием симметричной «монеты») дрейф с трендом i_1 и случайным отклонением $\pm\delta$, $\delta = \sqrt{\phi\tau}$, за шаг длины τ. При этом цена актива гарантированно возрастет на τi_1, а цена портфеля с рычагом l на $\tau i_1 l$, отклонение портфеля составит $\pm\delta l$. Чтобы рассчитать среднюю рентабельность собственного капитала i_c в соответствии с формулой (3), достаточно усреднения коэффициентов приращения при каждом выпадении монеты, генерирующей на микроуровне броуновский процесс.

От процесса блуждания доходности при $V_t = e^{\tau i_1 \pm \delta} \cong 1 + \tau i_1 \pm \delta$ (рис. 7, *а*) можно перейти к блужданиям при постоянном рычаге (рис. 7, *б*), где $V_t = 1 + le^{\tau i_1 \pm \delta} \cong 1 + l\tau i_1 \pm \delta l$ (в линейном приближении) для любого l.

Посчитаем доходность:

$$\ln(1 + i_c\tau) = \frac{1}{2}\ln\{(l\exp(\tau i_1 - \delta) + 1 - l) \times$$

$$\times (l\exp(\tau i_1 - \delta) + 1 - l)\} = \frac{1}{2}\ln(l\exp(\tau i_1 - \delta) + 1 - l) +$$

$$+ \frac{1}{2}\ln(l\exp(\tau i_1 - \delta) + 1 - l)$$

или

$$i_c = \lim_{\tau \to +0} \frac{1}{\tau 2}\ln\{(l\exp(\tau i_1 + \delta) + 1 - l) \times$$

$$\times (l\exp(\tau i_1 - \delta) + 1 - l)\}.$$

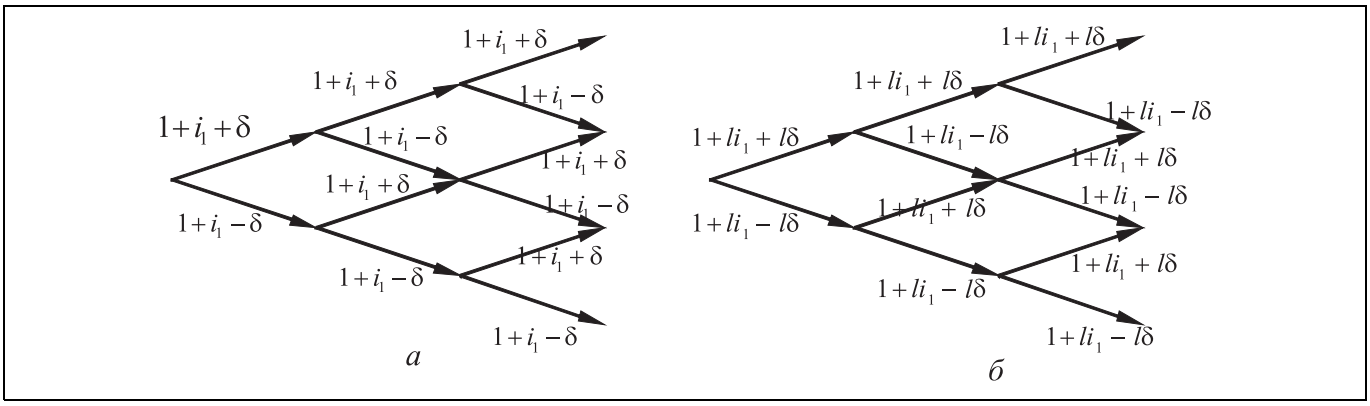

Рис. 7. Блуждания доходности: *а* — при единичном рычаге; *б* — при рычаге, поддерживающемся на уровне *l*

Для удобства от логарифмов можно перейти к степеням, записав

$$i_c = \lim_{\tau \to +0} \left[\sqrt{(l\exp(\tau i_1 + \delta) + 1 - l)(l\exp(\tau i_1 - \delta) + 1 - l)} - 1 \right] \frac{1}{\tau}.$$

Вычислениям предварим численный расчет. На рис. 8. приведен численный предел функций

$$i_c = \frac{1}{\tau 2} \ln\{(l\exp(\tau i_1 + \delta) + 1 - l) \times (l\exp(\tau i_1 - \delta) + 1 - l)\}$$

и

$$i_c = \left[\sqrt{(l\exp(\tau i_1 + \delta) + 1 - l)(l\exp(\tau i_1 - \delta) + 1 - l)} - 1 \right] \frac{1}{\tau},$$

при $i_1 = 1$, $\phi = 1$ и достаточно малом τ, когда зависимость от τ не прослеживается, и график параболы $i_c = li_1 - (l^2 - l)\phi/2$.

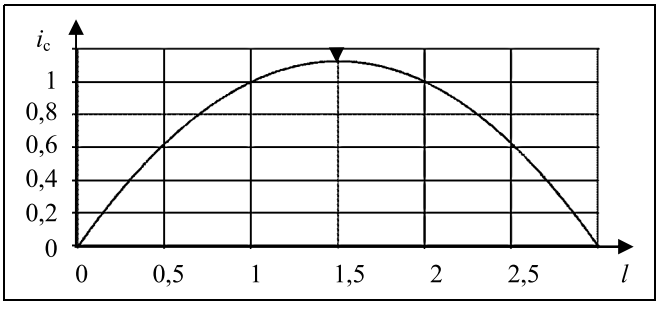

Рис. 8. Кривая средней доходности собственного капитала от рычага *l* при данных доходности i_1 и темпе генерации дисперсии ϕ ($i_1 = 1$, $\phi = 1$); $l^* = 1{,}5$ — оптимальный кредитный рычаг

Теоретический расчет сводится к работе с начальными членами рядов Тейлора: раскладывая выражение под корнем до первого порядка по τ, имея в виду, что первый порядок по τ — это второй порядок по δ, ибо $\delta^2 = \tau\phi$, получим последовательно

$$1 + i\tau = \sqrt{(l\exp(\tau i_1 + \delta) + 1 - l)(l\exp(\tau i_1 - \delta) + 1 - l)} = \sqrt{(l(1 + \tau i_1 + \delta + \delta^2/2) + 1 - l) \times} \rightarrow$$
$$\rightarrow \overline{\times (l(1 + \tau i_1 - \delta + \delta^2/2) + 1 - l)} + O(\tau^2) = \sqrt{(1 + l(\tau i_1 + \phi\tau/2))^2 - l^2\phi\tau} + O(\tau^2) =$$
$$= 1 + l\tau i_1 - (l^2 - l)\phi\tau + O(\tau^2)/2.$$

Окончательно

$$i_c\tau = l\tau i_1 - (l^2 - l)\phi\tau + o(\tau)/2.$$

Здесь учтено, что в винеровском процессе $\delta^2 = \tau\phi$ и $e^x = 1 + x + x^2/2 + o(x^2)$, $\sqrt{1+x} = 1 + 0{,}5x + o(x)$, $i_c\tau \cong l\tau i_0 - (l^2 - l)\phi/2$.

Приближенно получим зависимость доходности от кредитного рычага (см. рис. 8):

$$i_c = li_1 - (l^2 - l)\phi/2, \qquad (3)$$

откуда максимизирующий доходность рычаг и доходность есть $l^* = i_1/\phi + 1/2$, и $i_c^* = l^{*2}\phi/2$ или $i_c^* = (i_1/\phi + 0{,}5)^2\phi/2$.

Определим некоторую величину $i_0 = \lim\limits_{l \to +0} (l_c/l)$ как предел доходности собственного капитала, отнесенной к соответствующему ей кредитному рычагу l:

$$i_0 = \lim_{l \to +0} \frac{i_c}{l} = \lim_{l \to +0} \left[i_1 - \frac{1}{2}(l-1)\phi \right] = i_1 + \frac{1}{2}\phi.$$

Практически все формулы с использованием величины i_0 приобретают более лаконичный вид. Например, оптимальный рычаг

$$l^* = i_0/\phi, \qquad (4)$$

доходность собственного капитала в оптимуме

$$i_c^* = i_0^2/(2\phi).$$

Обсудим несколько неожиданный результат: при $i_1 = 0$ оптимальная доходность положительна $i_c^* = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \frac{\phi}{2} > 0$, т. е. даже в отсутствии тренда можно заработать на шумовых блужданиях логарифма цены, если поместить в актив половину собственного капитала, а другую половину в безрисковую наличность.

Рассмотрим биномиальные блуждания с отклонениями e^x и e^{-x} без тренда, когда $i_1 = 0$. При вычисленном выше оптимальном кредитном рычаге $l^* = 1/2$ доходность

$$i_c = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+e^x}{2}\frac{1+e^{-x}}{2}\right) \approx \frac{x^2}{8} > 0$$

— действительно, оказывается положительна.

Отрицательное слагаемое $-\frac{1}{2}(l^2 - l)\phi$ в формуле (3) можно интерпретировать как плату за риск собственного капитала $r = \phi l(l-1)/2$. С такой точки зрения риск физического капитала, определенный как $r_K = r/l$, составит $r_K = \phi(l-1)/2$. Отметим также что, при $l \gg 1$ формулы с использованием как i_1, так и i_0 асимптотически совпадают.

4. СЛУЧАЙ МНОГИХ АКТИВОВ ИЛИ РЕГИОНОВ С СИНХРОННЫМ ИЗМЕНЕНИЕМ ЦЕН

Теперь рассмотрим разные активы, синхронно меняющие свою стоимость, причем амплитуда колебаний цен на разных рынках разная. В интерпретации реального сектора, это могут быть также разные регионы, в которых синхронно меняются цены, в том числе цены на экспортный товар. Рассмотренные формулы позволяют для каждого региона с его собственными параметрами ϕ_r и i_{1r} (здесь r — индекс региона) вычислить оптимальный рычаг l_r^* и соответствующую ему рентабельность собственного капитала i_{cr}:

$$i_{cr}^* = \frac{i_0^2}{2\phi} \text{ или } i_{cr}^* = \left(\frac{i_1}{\phi} + 0{,}5\right)^2 \frac{\phi}{2}.$$

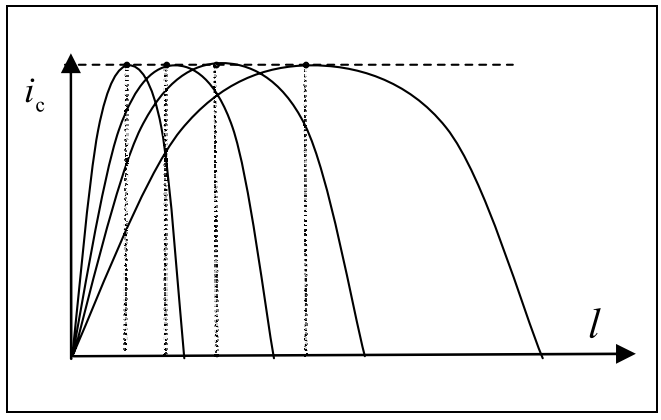

Рис. 9. Долгосрочная перспектива — семейство кривых доходности собственного капитала при разных уровнях ϕ в предположении (после) выравнивания доходности собственного капитала: линия максимумов — прямая

Очевидно, инвесторы, решая, куда вложить свои денежные средства, смогут выбирать регион или рынок с максимальной доходностью, что приведет к выравниванию доходности в разных секторах экономики и регионах, таким образом, возникнет новая «мировая константа» i_c. При этом пики всех кривых доходностей для разных ϕ_r образуют одну горизонтальную прямую линию (рис. 9).

При всюду одинаковой доходности собственного капитала i_c доходность актива и кредитный рычаг должны быть

$$i_{0eqr} = \sqrt{2\phi_r i_c},$$

$$i_{1eqr} = i_{0eqr} - \phi_r/2 = \sqrt{2\phi_r i_c} - \phi_r/2,$$

$$l_{eqr} = \sqrt{2i_c/\phi_r}.$$

5. ЧАСТОТА КОРРЕКЦИИ ОПТИМАЛЬНОГО КРЕДИТНОГО РЫЧАГА

Рассчитаем *оптимальное время* управления портфелем для случая ненулевых издержек изменения портфеля. Поскольку длина траектории броуновского движения между любыми двумя точками бесконечна, то при сколь угодно малом, но ненулевом уровне комиссии γ попытка корректировать любые сколь угодно малые отклонения от оптимального рычага будет приводить к бесконечным издержкам. Очевидно, их корректировать надо либо по достижении определенного отклонения $\Delta l = |l - l^*|$, либо, что почти то же самое, через определенное время τ. Перепишем доходность собственного капитала как разложение по степе-

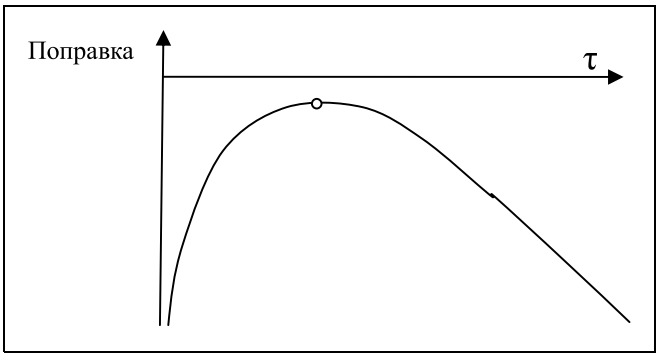

Рис. 10. Отрицательная поправка к доходности собственного капитала, обусловленная издержками γ в зависимости от порога пересмотра портфеля (в зависимости от характерного времени реакции τ)

ням ($l - l^*$), где l^* — значение кредитного рычага в максимуме доходности:

$$i_c = li - \phi l^2/2 = \text{const} - \phi(l - l^*)^2/2 = \\ = i_{c0} - \phi(l - l^*)^2/2,$$

где $i_{c0} = i_0 l^*/2$.

Разовые издержки коррекции $\gamma|l - l^*|$ надо разделить на время между коррекциями, чтобы учесть со знаком минус в формуле для доходности:

$$i_c = i_c - \phi(l - l^*)^2/2 - \gamma|l - l^*|/\tau.$$

Новый кредитный рычаг — это отношение размера активов $l^*(\sqrt{\phi\tau} + 1)$ за время τ к приросту собственного капитала за этот же период $1 + \sqrt{\phi\tau}\, l^*$. Значит, изменение кредитного рычага

$$|l - l^*| \approx |l^* - l^*(\sqrt{\phi\tau} + 1)/(1 + \sqrt{\phi\tau}\, l^*)| \approx \\ \approx |l^* - l^{*2}|\sqrt{\phi\tau} = l^*|l^* - 1|\sqrt{\phi\tau},$$

откуда $i_c = \mu_0/2 - \phi l^{*2}|l^* - 1|^2\phi\tau/2 - \gamma l^*|l^* - 1|\sqrt{\phi}/\sqrt{\tau}$ — если акцентироваться на зависимости от управляемого нами времени τ, это функционал вида $i_c = C - B\tau - A/\sqrt{\tau}$ (рис. 10), где A, B и C не зависят от τ.

Для нахождения максимума доходности продифференцируем по τ полученное выражение для доходности и приравняем производную к нулю:

$$\frac{d}{d\tau} i_c = -\frac{\phi}{2} l^{*2}|l^* - 1|^2\phi + \frac{1}{2}\gamma l^*|l^* - 1|\sqrt{\phi}\,\frac{1}{\tau^{3/2}} = 0,$$

откуда $\tau^{3/2} = \dfrac{\gamma}{|l^* - 1|\, l^*\sqrt{\phi}\phi}$ и $\tau^* = \dfrac{\gamma^{2/3}}{|l^* - 1|^{2/3} l^{*2/3}\phi}$.

Если оптимальное правило должно быть указано в терминах относительного отклонения, то портфель должен пересматриваться при достижении относительным отклонением от оптимума $|l - l^*|/l^*$ величины Δ:

$$\Delta^* = |l - l^*|/l^* = |l^* - 1|\sqrt{\phi}\left(\frac{\gamma^{2/3}}{|l^* - 1|^{2/3} l^{*2/3}\phi}\right)^{1/2} = \\ = \gamma^{1/3}\frac{|l^* - 1|^{2/3}}{l^{*1/3}}.$$

С учетом соотношений (см. § 6) $\phi l^{*2} = i_0 l^* = \mu_0$ и выравнивания доходности $l_{eq} = \sqrt{\dfrac{\mu_o}{\phi}}$, $i_{0eq} = \sqrt{\mu_o\phi}$

$$\tau^* = \frac{\gamma^{2/3}}{|l^* - 1|^{2/3} l^{*2/3}\phi} = \frac{\gamma^{2/3} l^{*2/3}}{|l^* - 1|^{2/3}\mu_o^{2/3}\phi^{1/3}},$$

$$\Delta^* = |l - l^*|/l^* = \gamma^{1/3}\frac{|l^* - 1|^{2/3}}{l^{*1/3}} = \left|\sqrt{\frac{\mu_o}{\phi}} - 1\right|^{2/3}\gamma^{1/3}\frac{\phi^{1/6}}{\mu_o^{1/6}},$$

$$|l - l^*| = l^{*2/3}|l^* - 1|^{2/3}\gamma^{1/3} = \left|\sqrt{\frac{\mu_o}{\phi}} - 1\right|^{2/3}\gamma^{1/3}\frac{\mu_0^{1/3}}{\phi^{1/3}}.$$

Если пренебречь единицей при большом рычаге $l^* \gg 1$, то оптимальное время пересмотра $\tau^* = \gamma^{2/3}/(\phi^{1/3}\mu_o^{2/3})$, соответствующий порог коррекции для относительного отклонения

$$\frac{|\Delta l|}{l^*} = \frac{\gamma^{1/3}\phi^{1/6}}{\mu_o^{1/6}}.$$

6. МОДЕЛИРОВАНИЕ ИНВЕСТИЦИОННОГО ПОВЕДЕНИЯ В РЕАЛЬНОЙ ЭКОНОМИКЕ

В дальнейшем модель может быть использована для обобщения статической модели Вальраса [1] в формате введения в последнюю инвестиций.

На основе уравнения изменения логарифма рычага $\dfrac{d}{dt}\ln l = -il + \mu$ $\left(\text{где } \mu = \dfrac{d}{dt}\ln K, \text{ см. § 10}\right)$ может быть сформулировано оптимальное инвестиционное правило $\mu = il$, если кредитный рычаг уже в равновесии, и $\mu = il + \dfrac{d}{dt}\ln l$, если кредитный рычаг почему-либо подвергся отклонению.

Заменой[2] $\dfrac{d}{dt}\ln l \to \dfrac{1}{\tau}(l - l^*)$ (релаксационный член, моделирующий стремление экономических

[2] Отметим, что в этой формуле релаксационный член можно поделить на l, получив $\dfrac{d}{dt}\ln l = \dfrac{1}{l\tau}(l - l^*)$ или $\dfrac{d}{dt} l = \dfrac{1}{\tau}(l - l^*)$.

агентов привести рычаг к оптимальному) и подстановкой $\mu = \frac{d}{dt}\ln K$ получаем

$$\frac{d}{dt}\ln K = il + \frac{1}{\tau}(l - l^*),$$

τ — время релаксации $\left($отождествляемое нами с рассчитанным выше временем $\tau^* = \frac{\gamma^{2/3}}{|l^* - 1|^{2/3} l^{*2/3} \phi}\right)$.

Этой скорости изменения капитала соответствует объем инвестиций I, пропорциональный $\mu + d$, где d — скорость выбытия фондов.

Имеем (в расчете на единицу капитала): $\frac{I}{K} = \left(d + il + \frac{1}{\tau}(l - l^*)\right)p_K$. В отсутствии перетока капитала также может быть использовано выражение (4) и формулы

$$\frac{d}{dt}\ln K = \tilde{i}_1 l + \frac{1}{\tau}\left(l - \frac{i_0}{\phi}\right)$$

или

$$\frac{d}{dt}\ln K = \tilde{i}_1 l + \frac{1}{\tau}\left(l - \frac{1}{2} - \frac{i_1}{\phi}\right).$$

7. ВРЕМЯ ОЦЕНКИ ИЗМЕНЕНИЯ ОПТИМАЛЬНОГО РЫЧАГА

Ранее мы анализировали отклонение рычага l от точно известного рычага l^*. Для измерения величин i_1 и ϕ при достаточном объеме данных могли бы быть задействованы статистические тесты, однако реальные ряды не подчиняются предположениям модели винеровского процесса. Но кривая $i_c(l)$ определена для любой реализации ряда — независимо от модели, и оптимальный рычаг может быть измерен по достаточно большой предыстории, как это показано на рис. 2 для ряда S & P 500, приведенного на рис. 1. На реальном рынке тенденции постоянно изменяются, как видно на том же рис. 1. Если подвергается отклонению оптимальный рычаг, все должно определяться временем, на котором можно детектировать это отклонение.

Для простоты считаем, что нам нужно детектировать изменение i_1 от начального значения $i_{1н}$, которое скачком превращается в конечное значение $i_{1к}$. По существу нам надо сравнить отклонение тренда $(i_{1н} - i_{1к})T_{откл}$ и среднее отклонение, обусловленное шумом $\sqrt{T_{откл}\phi}$ (которое доминирует на малых временах).

Первое из них превзойдет второе после того, как они впервые сравняются при

$$T_{откл} = \frac{\phi}{(i_{1н} - i_{1к})^2}.$$

Для простоты полагая одну из этих величин равной нулю, получим время, на котором метод позволяет детектировать изменение i_1 на 100 % (т. е. на величину порядка самой себя), $T_{откл} = \phi / i_1^2 = 1/(2i_c)$, т. е. длина ряда, по которому нашим методом может быть измерен оптимальный рычаг не может быть меньше $\tau_2 = 1/i_c^*$. Для ситуации, представленной на рис. 2, это $\tau_2 = \frac{1}{2 \cdot 0{,}07 \text{ год}^{-1}} \approx 7$ лет, что лишь немного меньше 10 лет — длины ряда на рис. 1.

Это второе естественное характерное время при принятии инвестиционных решений. В формуле $\frac{d}{dt}\ln K = il + \frac{1}{\tau}(l - l^*)$ теперь либо рычаг $l^* = \arg\max_{l>0} i_c(l)$, измеренный по предыстории примерной длины i_c^{-1}, либо можно предложить идейно аналогичную формуле (2) схему со скользящим пересчетом кривой доходности

$$i_c(l) := i_c^* \ln V_\tau(l) + i_c(l)(1 - \tau i_c^*),$$

где $i_c^* = \max_{l>0} i_c(l)$ — оптимальная скорость роста собственного капитала, τ — шаг расчета (он может совпадать с τ^*), $V_\tau(l)$ — приращение собственного капитала за интервал длины τ, τi_c^* — параметр скользящего среднего, отвечающий характерному времени равному i_c^{*-1}.

Как показано в § 9 параметр ϕ также можно интерпретировать через отклонение рентабельности реального актива $\phi = \tau_0 \Delta i^2$ (рис. 11), где Δi — отклонение рентабельности реального актива, τ_0 — характерное время отклонения (его можно назвать временем корреляции).

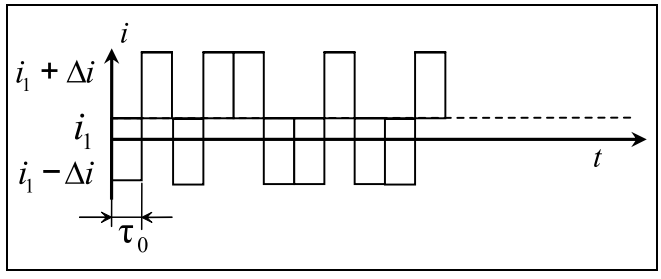

Рис. 11. Рентабельность в зависимости от порога реакции (в зависимости от характерного времени реакции)

8. РАСЧЕТ ПЕРЕТОКА КАПИТАЛА

При выравнивании доходности ввиду возможности перетока в среднем $\frac{d}{dt}\ln K = \vartheta$, где ϑ — средняя скорость роста рыночной ниши данной отрасли. Поскольку не весь капитал инвестируется в данном секторе, то появляется уравнение, описывающее межсекторный, межрегиональный и межстрановый переток инвестиций. Из условия $2i_c = \mu_0$, где μ_0 — темп роста глобальной экономики, оптимальный рычаг определяется как $l^*_{eq} = \sqrt{\mu_0/\phi}$.

Доходность на капитал $i_{eq} \cong \sqrt{\mu_0\phi}$ (точная формула $i_{1eq} = \sqrt{\mu_0\phi} - \varphi/2$, см. § 10, формула 16).

Тогда усредненный отток капитала с единицы физического капитала K измеряется как разность средней доходности и скорости роста: $c_K = i_1^* - \vartheta \cong \cong \sqrt{\mu_0\phi} - \vartheta$. (Отрицательный знак этой величины будет означать приток капитала от внешних инвесторов в экономику.)

Если умножим его на стоимость активов $p_K K$, то получим полный отток капитала:

$$C = p_K K c_K = (i^* - \vartheta)p_K K \cong (\sqrt{\mu_0\phi} - \vartheta)p_K K.$$

Отметим, содержательное заключение состоит в том, что для борьбы с оттоком капитала правительство должно проводить стабилизационную политику — снижать параметр $\phi = \tau_0 \Delta i^2$ или обеспечивать экономический рост, в частности, посредством защиты рынка.

В более точном варианте отток капитала

$$C = p_K K c_K = (\sqrt{\mu_0\phi} - \phi/2 - \vartheta)p_K K.$$

9. ПРИМЕНЕНИЕ К РЕАЛЬНОЙ ЭКОНОМИКЕ

Ключом перехода к реальной экономике служит осознание факта, что рентабельности биржевого и реального активов соотносятся как интеграл и производная. Воспользуемся ступенчатой моделью ряда рентабельности. С равной вероятностью 0,5 IRR принимает значение $i_1 + \Delta i$ или $i_1 - \Delta i$ (см. рис. 11).

Рассмотрим завод без долга. Реинвестируя всю прибыль, создадим фиктивный «биржевой» актив, растущий как $K(t) = K(t_0)\exp[(t - t_0)i]$ при постоянной рентабельности i и как $K(t) = K(t_0)\exp\int_{t_0}^{t} i(t)dt$ при переменной $i(t)$. При случайных и независимых пиках высоты $i_1 + \Delta i$ или $i_1 - \Delta i$ и длины τ_0 рост (логарифма) цен этого актива описывается броуновским процессом с $\phi = \tau_0 \Delta i^2$, после чего могут быть применены все выведенные формулы.

10. ИНВЕСТИЦИОННОЕ ПРАВИЛО И ДОЛГОСРОЧНЫЙ ТЕМП РОСТА ЭКОНОМИКИ

Рассмотрим размер удельного долга $\theta = D/(p_K K)$, где D — долг, в зависимости от номинальных или реальных инвестиций $\mu = \frac{1}{K}\frac{dK}{dt}$: $\frac{d}{dt}\theta = -\tilde{i}_1 + (1 - \theta)\mu$ или $\frac{d}{dt}\ln l = -\tilde{i}_1 l + \mu$. Считается что цена фондов p_K неизменна.

Вывод требует расчета производной удельного долга $\frac{1}{p_K}\frac{d}{dt}\frac{D}{K}$ и некоторых преобразований, в основе которых лежат соотношения $\frac{d}{dt}D = I - F$, $F = (i + d)p_K K$, $\frac{d}{dt}K = \frac{I}{p_K} - dK$. Поскольку $l = \frac{1}{1 - \theta}$, то $\frac{d}{dt}\ln l = \frac{1}{1 - \theta}\frac{d}{dt}\theta$, где d — скорость выбытия, I — инвестиции.

Если μ_0 — трендовая скорость роста экономики, то в равновесии $0 = -i_1 l + \mu_0$, где также i_1 — средняя рентабельность, получим $i_1 l^* = \mu_0$ и $\mu_0 = 2i_c$, откуда $l^*_{eq} = \sqrt{\mu_0/\phi}$, $i_{0eq} = \sqrt{\mu_0\phi}$. С учетом соотношения $i_1 = i_0 - \phi/2$ получим

$$i_{1eq} = \sqrt{\mu_0\phi} - \phi/2. \quad (5)$$

Впрочем, для удобства может оказаться целесообразно пользоваться приближенной формулой

$$i_{1eq} \approx i_{0eq} = \sqrt{\mu_0\phi}. \quad (6)$$

Для моделирования реальной экономики бывает очень полезно применять поддерживающее фиксированный рычаг инвестиционное правило $\mu(t) = i(t)l^*$ или, что то же,

$$\frac{d\ln K}{dt} = i(t)l^*.$$

Оно задает мгновенный инвестиционный спрос вашей модели, который начнет явно зависеть от вектора цен после представления текущей рентабельности функцией этого вектора.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ И ВЫВОДЫ

Для наиболее примитивного, но универсального предположения о характере изменения (логарифма) цен на рынке (винеровский процесс с трендом) рассчитан оптимальный в смысле максимизации скорости роста (рентабельности) алгоритм управления портфелем. Рассчитан оптимальный рычаг $l^* = i_0/\phi$ и соответствующая ему доходность $i_c^* = i_0^2/(2\phi)$.

В долгосрочном равновесии после выравнивания доходности с учетом равенств $il = \mu_0 = 2i_c$ (см. § 10) получили $l = \sqrt{\mu_0/\phi}$, $i = \sqrt{\mu_0\phi}$.

В условиях транзакционных издержек на коррекцию рычага при «сверхдлинном рычаге» коррекцию оптимально осуществлять через время

$$\tau = \gamma^{2/3}/(\phi^{1/3}\mu_0^{2/3}) \text{ или } \tau = \gamma^{2/3}/(l^{*4/3}\phi)$$

или при переходе порога относительного отклонения

$$\frac{|\Delta l|}{l^*} = \frac{\gamma^{1/3}\phi^{1/6}}{\mu_0^{1/6}} \text{ или } \Delta = |l - l^*|/l^* = \gamma^{1/3}l^{*1/3}.$$

Эти формулы (ассимптотические, $l^* \to \infty$) оптимального порога отклонения (времени коррекции) очевидно не логичны при $l^* = 1$ — потому при малых рычагах в диапазоне $0 \le l^* \le 2$, может быть и чуть выше, надлежит пользоваться более точными формулами:

$$\tau^* = \frac{\gamma^{2/3}}{|l^* - 1|^{2/3}l^{*2/3}\phi} = \frac{\gamma^{2/3}l^{*2/3}}{|l^* - 1|^{2/3}\mu_0^{2/3}\phi^{1/3}},$$

$$\Delta = |l - l^*|/l^* = \gamma^{1/3}\frac{|l^* - 1|^{2/3}}{l^{*1/3}} = \left|\sqrt{\frac{\mu_0}{\phi}} - 1\right|^{2/3}\gamma^{1/3}\frac{\phi^{1/6}}{\mu_0^{1/6}},$$

$$|l - l^*| = l^{*2/3}|l^* - 1|^{2/3}\gamma^{1/3} = |\sqrt{\mu_0/\phi} - 1|^{2/3}\gamma^{1/3}\frac{\mu_0^{1/3}}{\phi^{1/3}}.$$

Чтобы применить вторые варианты формул, следовало бы проверить предположения $l^* = \sqrt{\mu_0/\phi}$, $i^* = \sqrt{\mu_0\phi}$, невыполнение которых может указывать на неадекватность модели, пере- или недооцененность активов, неравновесие, в том числе надувание ценового пузыря. Также надлежит проконтролировать и винеровский характер приращения (логарифмов) цен активов.

При моделировании инвестиционного поведения в реальной экономике могут понадобиться инвестиционные правило, сохраняющее кредитный рычаг вида $\frac{d}{dt}\ln K = i(t)l^*$, и его обобщение на случай отклонения от оптимума: $\frac{d}{dt}\ln K = i(t)l^* + \frac{1}{\tau}(l - l^*)$, где $\tau = \tau^*$. Также следует иметь в виду, что для измерения трендового показателя i_1 или оптимального рычага l путем максимизации доходности $i_c(l) := V_\tau(l)/T + i_c(l)(1 - \tau/T)$ с погрешностью менее 100 % потребуется время $T \ge 1/i_c^*$.

Замечание по методологии исследования. Существенный момент заключается в том, что операция усреднения применялась не к сумме дохода с последующим расчетом IRR — рентабельности, а к распределению уже рассчитанных значений IRR. Для броуновского движения это означает максимизацию медианного дохода, который (в этой постановке) совпал со средней доходностью. Перестановка расчета IRR и операции усреднения (когда усреднение сперва применяется к доходу) приведет к радикально новым выводам.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Кривошеев О.И.* Построение обобщенной модели Вальраса с инвестициями на базе оптимизации рациональными инвесторами кредитного рычага // Тез. докл. седьмой междунар. конф. «Управление развитием крупномасштабных систем» MLSD'2013. — М., 2013. — С 195—198.
2. *Шарп У.Ф., Александер Г.Дж., Бейли Дж.* — Инвестиции: пер. с англ. — М.: Инфра-М, 1997.
3. *Шапкин А.С.* Экономические и финансовые риски. Оценка, управление, портфель инвестиций. — М.: Юнити, 2003.
4. *Black Fischer, Jensen M.C., and Scholes M.* The Capital Asset Pricing Model: Some Empirical Tests, P. 79—121 in M. Jensen ed. — URL: http://www.efalken.com/LowVolClassics/black-jensenscholes.pdf (дата обращения 9.07.2015).
5. *French C.W.* The Treynor Capital Asset Pricing Model // Journal of Investment Management. — 2003. — Vol. 1, N 2. — P. 60—72.
6. *Markowitz, H.M.* The early history of portfolio theory: 1600—1960 // Financial Analysts Journal. — 1999. — Vol. 55, N 4.
7. *Sharpe W.F.* Capital asset prices: A theory of market equilibrium under conditions of risk // Journal of Finance. — 1964. — Vol. XIX, N 3. — P. 425—442.
8. *Tobin J.* Liquidity preference as behavior towards risk. — URL: http://dido.wss.yale.edu/P/cm/m19/m19-01.pdf (дата обращения 9.07.2015).
9. *Treynor J.L.* Toward a Theory of Market Value of Risky Assets. Unpublished manuscript. A final version was published in 1999, in Asset Pricing and Portfolio Performance: Models, Strategy and Performance Metrics. R.A. Korajczyk (ed.). — London: Risk Books. — P. 15—22.
10. *Triana P.* Lecturing Birds on Flying: Can Mathematical Theories Destroy the Financial Markets? — N.-Y.: Wiley, 2009. — 400 c.
11. *Altman E.* Corporate Financial Distress and Bankruptcy: 3rd edition. — N.-Y.: John Wiley and Sons, 2005.

Статья представлена к публикации членом редколлегии В.В. Клочковым.

Кривошеев Олег Игоревич — преподаватель,
Московский государственный университет экономики статистики и информатики; науч. сотрудник,
Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН,
✉ okrivosheev@mail.ru, o-krivosheev@ya.ru.