

ИЕРАРХИЧЕСКИЙ СИНТЕЗ СИГМОИДАЛЬНЫХ ОБОБЩЕННЫХ МОМЕНТОВ МАНИПУЛЯТОРА В УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ¹

С.А. Краснова, А.С. Антипов

Для системы управления положением рабочего органа манипулятора с электрическими исполнительными устройствами разработана декомпозиционная процедура синтеза обратной связи, обеспечивающей слежение за траекториями, заданными в системе координат рабочего органа. Показано, что использование в качестве локальных связей и корректирующих воздействий наблюдателя состояний S -образных гладких сигма-функций обеспечивает в системе слежения инвариантность с заданной точностью по отношению к имеющимся неопределенностям с учетом ограничений на переменные механической системы. Отмечено, что разработанный подход не требует решения обратных задач кинематики и динамики и снижает требования к объему априорной информации об объекте управления и внешних воздействиях.

Ключевые слова: манипулятор, слежение, инвариантность, ограничения на переменные состояния, сигма-функция, наблюдатель состояний.

ВВЕДЕНИЕ

Рассматривается электромеханическая система, которая включает в себя динамическую модель манипулятора (механической подсистемы), функционирующего в условиях неопределенности и неполных измерений, и редуцированную модель электрических исполнительных устройств (ИУ). Ставится задача слежения за траекториями, заданными в системе координат рабочего органа манипулятора. Стандартные методы планирования и управления манипуляторами в пространстве обобщенных координат не находят непосредственного применения в данной задаче, так как требуют решения в реальном времени обратных задач кинематики и динамики, которые в редких случаях имеют аналитическое и однозначное решение [1].

В настоящей работе предложен прямой метод блочного синтеза механической системы, записанной относительно ошибок слежения, не требующий

решения обратных задач кинематики. В качестве фиктивных управлений в механической системе рассматриваются обобщенные моменты, развиваемые ИУ. Новизна заключается в использовании сигмоидальных обратных связей для решения и задач управления, и наблюдения в условиях неопределенности [2, 3]. Показано, что в контурах управления и наблюдения с помощью гладких и ограниченных воздействий обеспечиваются свойства, близкие к свойствам систем с разрывными управлениями, функционирующим в скользящем режиме: декомпозиция общего движения на разнотемповые составляющие, ε -инвариантность по отношению к возмущающим воздействиям.

Сформированные в механической подсистеме фиктивные управления служат для ИУ сигнальными задающими воздействиями. Таким образом, при синтезе следящей системы реализуется принцип декомпозиции, а при проектировании электромеханической системы появляется возможность выбора различных комплектных ИУ, способных обеспечить выполнение манипулятором различных работ в условиях неопределенности.

¹ Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (грант № 15-08-01543А).



**1. МОДЕЛЬ ОБЪЕКТА УПРАВЛЕНИЯ.
ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ**

Рассматривается математическая модель электромеханического объекта управления вида

$$\begin{aligned} \dot{q}_1 &= q_2, \\ \dot{q}_2 &= H^{-1}(q_1)[v - C(q_1, q_2)q_2 - G(q_1) + \eta(t)], \quad (1) \\ \dot{v} &= -Av - Dq_2 + Bu, \quad (2) \end{aligned}$$

где (1) — модель механической подсистемы — манипулятора, в котором звенья образуют кинематические пары 5-го класса и являются абсолютно жесткими телами; $q_1 \in Q_1 \subset R^n$ — вектор обобщенных координат, $q_2 \in Q_2 \subset R^n$ — вектор обобщенных скоростей; $H_{n \times n}(q_1) > 0$ — нелинейная положительно определенная матрица инерции, $\det H^{-1}(q_1) \neq 0$; $C_{n \times n}(q_1, q_2)$ — матрица центробежных и кориолисовых сил; $G_{n \times 1}(q_1)$ — вектор гравитационных сил; $\eta(t) \in R^n$ — часть обобщенных сил, трактуемых как внешние возмущения; $v \in R^n$ — вектор обобщенных моментов, развиваемых ИУ. Компоненты вектора $v = \text{col}(v_1, \dots, v_n)$ непрерывны и ограничены вместе со своими производными:

$$\begin{aligned} |v_i(t)| \leq \bar{v}_{0i} = \text{const}, \quad |\dot{v}_i(t)| \leq \bar{v}_{1i} = \text{const} \\ \forall t \geq 0, \quad i = \overline{1, n}. \quad (3) \end{aligned}$$

Подсистемой (2) описывается учитываемая динамика ИУ — двигателей постоянного тока с жестким типом сочленений; A, D и B — диагональные матрицы с положительными постоянными коэффициентами передачи, в частности $B = \text{diag}(b_i)$, $b_i = \text{const} > 0 \quad i = \overline{1, n}$; $u \in R^n$ — вектор напряжений якорей электроприводов, которые полагаются разрывными управляющими воздействиями с ограниченной амплитудой $|u_i| \leq k_{3i}, \quad i = \overline{1, n}$.

Многозвенная конструкция манипулятора заканчивается сменным рабочим органом или схватом, удерживающим груз. Координаты вектора пространственной ориентации схвата $y_1 \in Y_1 \subset R^m$, где $m = 1 \div 6 \leq n$, однозначно выражаются через обобщенные координаты, $y_1 = h(q_1(t))$ — известная вектор-функция, ее элементы и их производные ограничены:

$$\begin{aligned} |y_{1i}^{(j)}(t)| \leq Y_{ji} = \text{const} > 0 \quad \forall t \geq 0, \\ i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{0, 3}. \quad (4) \end{aligned}$$

Здесь и далее во вводимых неравенствах оценочные значения считаются известными из предметной области — конструктивных ограничений и соображений безопасности.

В данной работе рассматриваются манипуляторы с неизбыточным числом степеней свободы $m = n$ в предположении, что матрица частных производных $J(q_1)_{n \times n} = (\partial h / \partial q_1)$ всюду, за исключением конечного числа особых точек, имеет полный ранг: $\text{rank} J_{n \times n}(q_1) = n \quad \forall q_1 \in \bar{Q}_1 \subset Q_1$. Ставится задача слежения для выходных переменных $y_1 = h(q_1) \in R^n$ электромеханической системы (1), (2) за допустимыми траекториями $g(t) \in R^n$, заданными в системе координат рабочего пространства схвата $g \in Y_1$, в предположениях:

— аналитический вид задающих воздействий не известен, имеются только их текущие значения, сигналы $g = \text{col}(g_1, \dots, g_n)$ полагаются ограниченными функциями времени с ограниченными производными: $|g_i^{(j)}(t)| \leq Y_{ji} \quad \forall t \geq 0, \quad i = \overline{1, n}, \quad j = \overline{0, 3}$;

— прямым измерениям доступны обобщенные координаты $q_1(t)$ и токи якорей электроприводов, пересчитанные в электрические моменты $v(t)$;

— масса схвата с грузом полагается неизвестной, ограниченной кусочно-гладкой функцией времени с ограниченной производной, что обуславливает существенную параметрическую неопределенность матриц H, C и G механической подсистемы (1);

— внешние возмущения $\eta(t) = \text{col}(\eta_1(t), \dots, \eta_n(t))$ полагаются неизвестными, ограниченными, кусочно-гладкими функциями времени с ограниченными производными:

$$|\eta_i^{(j)}(t)| \leq N_{ji} = \text{const} \quad \forall t \geq 0, \quad i = \overline{1, n}, \quad j = 0, 1.$$

Внешние возмущения являются несогласованными [4]: они действуют на второе уравнение системы (1) и их нельзя непосредственно подавить или компенсировать с помощью истинного управления u , что приводит к постановке задачи слежения с заданной точностью. Цель управления состоит в обеспечении стабилизации ошибки слежения $e_1 = y_1 - g \in R^n$:

$$|e_{1i}(t)| \leq \delta_1 \quad \forall t \geq T, \quad i = \overline{1, n}. \quad (5)$$

Заметим, что в электромеханической системе с конкретными ИУ (2) минимально возможные значения δ_1^* и T^* в выражении (5) обусловлены имеющимися ресурсами управления $b_i k_{3i} > 0, \quad i = \overline{1, n}$. При проектировании электромеханической систе-

мы, предназначенной для выполнения различных работ в условиях неопределенности, ставится задача выбора ИУ определенной мощности, способных обеспечить заданную точность слежения δ_1 (5) с учетом наихудших возмущений. В данной работе решается именно эта проблема, которая разделяется на две последовательно решаемых подзадачи:

— в механической подсистеме решается задача слежения за заданными траекториями выходных переменных (5) путем синтеза обобщенных моментов $v = \text{col}(v_1, \dots, v_n)$;

— в ИУ (2) решается задача слежения за сформированными обобщенными моментами $v^* \in R^n$, т. е. задача стабилизации ошибки слежения $v - v^* \in R^n$ путем синтеза истинного разрывного управления $u = \text{col}(u_1, \dots, u_n)$, $u_i = k_{3i} \text{sign}(v_i - v_i^*)$, $i = \overline{1, n}$. Выбор амплитуд переключений $b_i k_{3i} > 0$ обуславливает выбор подходящих ИУ. Заметим, что в условиях неполных измерений ставится также задача оценивания с помощью наблюдателя состояний неизмеряемых сигналов, необходимых для формирования задающих воздействий $v^*(t)$ для ИУ.

Таким образом, в системе (1), (2) обобщенные моменты v выполняют двойную функцию, что накладывает ряд ограничений на выбор локальной связи. В механической подсистеме (1) они играют роль фиктивных управлений и должны выбираться из класса непрерывных ограниченных функций, способных обеспечить точность (5). Эти сигналы для электрической подсистемы (2) служат задающими воздействиями $v^*(t)$, их обработка обеспечивается с помощью истинного управления u , следовательно, и производные этих сигналов должны быть ограниченными до k -го порядка включительно, k — относительная степень учитываемой динамической модели ИУ. В данном случае (2) $k = 1$, отсюда следует требование (3).

В замкнутой системе реализуется принцип декомпозиции и появляется возможность выбора различных комплектных ИУ, способных отработать задающие воздействия, сформированные в механической подсистеме с учетом требований (3). Решение именно этой проблемы не вызывает трудностей, так как модель исполнительных устройств (2) является элементарной. В то же время, принимая во внимание существенную неопределенность механической подсистемы (1), решение предварительных задач — синтез обобщенных моментов, обеспечивающих точность (5) с учетом требований (3), и формирование задающих сигналов для ИУ, — требует привлечения и разработки специальных подходов, которые представлены в § 2.

2. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ СЛЕЖЕНИЯ В МЕХАНИЧЕСКОЙ ПОДСИСТЕМЕ

2.1. Представление модели манипулятора относительно ошибок слежения

К синтезу системы управления пространственной ориентацией рабочего органа возможно два подхода. Первый состоит в том, что с помощью обратных функций $q_1(y_1)$ формируются задающие воздействия для обобщенных координат и на основе модели (1) реализуются известные методы синтеза, например, представленные в работах [5–9]. Однако обратная задача о положении имеет однозначное и аналитическое решение только для ограниченного класса простых манипуляторов [1]. Поэтому большую значимость приобретает второй, так называемый прямой метод решения [4, 10, 11], который реализуется в данной работе. Суть прямого метода заключается в том, что синтез выполняется на основе системы дифференциальных уравнений, записанной непосредственно относительно регулируемых переменных $y_1 = h(q_1(t))$ и их производных.

С помощью диффеоморфной замены локальных переменных приведем механическую подсистему (1) к указанному виду:

$$\dot{y}_1 = J(q_1)q_2 = y_2, \quad \dot{y}_2 = J'(q_1, q_2)q_2 + J(q_1)\dot{q}_2 = A_2(q_1, q_2, t) + B_2(q_1)v, \quad (6)$$

где $J_{n \times n} = (\partial h / \partial q_1) = (J_{ij})$, $J'_{n \times n} = (J'_{ij})$, $J'_{ij} = (\partial J_{ij} / \partial q_1)q_2$; матрица $B_2 = J(q_1)H^{-1}(q_1)$ является произведением невырожденных матриц, следовательно, $\det B_{2(n \times n)}(q_1) \neq 0 \forall q_1 \in \bar{Q}_1$; ее элементы и элементы вектор-функции $A_2 = J'(q_1, q_2)q_2 - B_2(q_1)[C(q_1, q_2)q_2 + G(q_1) - \eta(t)]$ содержат известные, ограниченные составляющие.

Система (6) имеет блочно-канонический вид, что позволяет реализовать блочный принцип управления [2, 9–12]. Запишем первое уравнение системы (6) относительно ошибок слежения $e_1 = y_1 - g \in R^n$: $\dot{e}_1 = y_2 - \dot{g}$. Согласно идеологии блочного подхода, здесь вектор y_2 трактуется как фиктивное управление и выбирается в виде $y_2^* = \dot{g} - K_1 e_1$, где $K_1 = \text{diag}(k_{1i})$, $k_{1i} = \text{const} > 0$, $i = \overline{1, n}$. Для обеспечения сформированной локальной связи нужно решить задачу стабилизации невязки между реальным и выбранным фиктивным управлением $e_2 = y_2 - \dot{g} + K_1 e_1$. После ука-



занных невырожденных замен переменных в силу системы (6) получим

$$\dot{e}_1 = -K_1 e_1 + e_2, \quad (7)$$

$$\dot{e}_2 = \varphi(t) + B_2(q_1)v, \quad (8)$$

где элементы вектор-функции $\varphi(t) = A_2(q_1, q_2, t) - \ddot{g}(t) - K_1^2 e_1(t) + K_1 e_2(t)$ и их производные в силу априорных предположений ограничены: $|\varphi_i^{(j)}(t)| \leq F_{ji} = \text{const} \forall t \geq 0, i = \overline{1, n}, j = 0, 1$.

Линейная локальная связь $y_2 = \dot{g} - K_1 e_1$ принята с целью обеспечить в подсистеме (7) экспоненциальную сходимость ошибок слежения в заданную окрестность нуля (5). Здесь и далее для формализации достаточных условий сходимости применяется второй метод Ляпунова, в котором также реализуется принцип декомпозиции. Так, для системы (7), (8) вводится квадратичная форма в виде суммы квадратичных форм

$$V = V_1 + V_2 = \frac{1}{2} e_1^T e_1 + \frac{1}{2} e_2^T e_2, \\ V_j = \sum_{i=1}^n V_{ji} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} (e_{ji})^2, \quad j = 1, 2. \quad (9)$$

Для производной первого слагаемого квадратичной формы (9) справедлива оценка: $\dot{V}_1 = e_1^T \dot{e}_1 = e_1^T (e_2 - K_1 e_1) \leq \sum_{i=1}^n |e_{1i}| (|e_{2i}| - k_{1i} |e_{1i}|)$. Неравенство $\dot{V}_1 < 0$ обеспечивается вне области $|e_{1i}| \leq |e_{2i}|/k_{1i} \leq \delta_1, i = \overline{1, n}$ при выполнении условий $k_{1i} > |e_{2i}|/\delta_1$, откуда при фиксированных значениях k_{1i} определяется точность

$$|e_{2i}(t)| \leq k_{1i} \delta_1 = \delta_{2i} = \text{const} \forall t \geq T, \quad i = \overline{1, n}, \quad (10)$$

которую требуется обеспечить при стабилизации переменных подсистемы (8). Коэффициенты $k_{1i} > 0$ назначаются, исходя из заданных темпов затухания собственных движений ошибок слежения $e_{1i}(t)$

(5), а именно $|e_{1i}(0)| e^{-k_{1i} T} < \delta_1$, в которых учтены конструктивные ограничения (4) на переменные состояния механической системы $|e_{1i}(t)| \leq 2Y_{0i}, |\dot{e}_{1i}(t)| \leq 2Y_{1i} \forall t \geq 0$:

$$\frac{1}{T} \ln \frac{|e_{1i}(0)|}{\delta_1} < k_{1i} < \frac{Y_{1i}}{Y_{0i}}, \quad i = \overline{1, n}. \quad (11)$$

Задача синтеза фиктивного управления $v \in R^n$ в подсистеме (8), обеспечивающего точность (10), нетривиальна: входные каналы действия v пред-

ставлены матрицей $B_2 = J(q_1)H^{-1}(q_1)$, которая в отличие от матрицы $H^{-1}(q_1) > 0$ не является знакоопределенной и содержит существенную параметрическую неопределенность, обусловленную неизвестной массой груза. Из-за невозможности сформировать комбинированное управление, будем искать закон фиктивного управления в виде $v^*(e_2)$. Класс допустимых локальных связей — непрерывные, ограниченные функции с ограниченными производными (3), с помощью которых можно обеспечить ε -инвариантность к имеющимся неопределенностям. Этим требованиям удовлетворяет S -образная гладкая сигма-функция. В отличие от обычно используемой линейной обратной связи с большими коэффициентами, необходимыми для подавления возмущений, сигма-функция всюду ограничена, что позволяет учесть ограничения на обобщенные моменты на стадии синтеза. В Приложении приведены базовые сведения о сигмоидальном управлении как допредельной реализации разрывного управления, на основе которых далее получены основные результаты данной работы. В п. 2.2 представлена иерархическая процедура синтеза сигмоидальных обобщенных моментов, обеспечивающих заданную точность слежения (5) в условиях неопределенности матрицы перед фиктивным управлением. В п. 2.3 с помощью укороченного наблюдателя с сигмоидальными корректирующими воздействиями решена задача оценивания неизмеряемых переменных.

2.2. Иерархическая процедура синтеза сигмоидальных обобщенных моментов в условиях неопределенности входных каналов

Опишем процедуру синтеза сигмоидальных локальных связей $v^*(e_2)$ в подсистеме (8), удовлетворяющих требованиям (3) и обеспечивающих точность (10) в условиях параметрической неопределенности матрицы $B_2 = (b_{ij})$. Рассматривается общий случай, когда матрица B_2 невырожденная, не имеет преобладающей диагонали, аналитический вид ее элементов известен, их текущие значения неизвестны, но ограничены:

$$\bar{b}_{ijj} \leq |b_{ij}(q_1, t)| \leq \bar{b}_{ij} \quad \forall q_1 \in \bar{Q}_1 \subset Q_1, \quad \forall t \geq 0, \\ i, j = \overline{1, n}. \quad (12)$$

Будем обозначать миноры матрицы B_2 различных порядков путем непосредственного перечисления сначала номеров строк, а потом номеров столбцов, на пересечении которых стоят образующие их элементы, например, $\Delta_{1,1} = b_{11}, \Delta_{12,12} = b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21}, \Delta_{13,12} = b_{11}b_{32} - b_{12}b_{31}$ и т. д. Для простоты изложения будем полагать, что все

главные диагональные миноры матрицы B_2 не обращаются в нуль в рассматриваемой области и их знаки известны, т. е. в упрощенных обозначениях $\Delta_{1,1} := \Delta_1 \neq 0$, $\Delta_{12,12} := \Delta_2 \neq 0$, ..., $\Delta_{12\dots n, 12\dots n} := \Delta_n = \det B_2 \neq 0$ и

$$\text{sign} \Delta_i(q_1) = \text{const} \quad \forall q_1 \in \bar{Q}_1 \subset Q_1, \quad i = \overline{1, n}, \quad (13)$$

при этом в системе (8) порядковые номера управляемых переменных e_{2i} и управляющих ими переменных v_i ($i = \overline{1, n}$) совпадают. Заметим, что сопоставление управляемых и управляющих переменных будет иным, если окаймляющие миноры от первого до $(n-1)$ -го порядка другой цепочки не обращаются в нуль. Так как матрица B_2 полного ранга, такая цепочка миноров существует, но может быть разной в разных участках области \bar{Q}_1 , что потребует логического переключения алгоритма управления в зависимости от разбиения области \bar{Q}_1 (см. § 4).

Для подсистемы (8) с учетом обозначений (13) введем закон сигмоидального управления

$$v_i^* = -m_{2i} \text{sign} \tilde{b}_{ii} \sigma(k_{2i} e_{2i}), \quad m_{2i}, k_{2i} = \text{const} > 0, \\ i = \overline{1, n}, \quad (14)$$

где $\sigma(k_{2i} e_{2i}) = \frac{2}{1 + \exp(-k_{2i} e_{2i})} - 1$, $\tilde{b}_{11} = b_{11} = \Delta_1$,

$\tilde{b}_{ii} = \Delta_i / \Delta_{i-1} \neq 0$, $i = \overline{2, n}$. В силу условия (10), выражений (П.2) и (П.4) — см. Приложение — сразу составим неравенства для выбора коэффициентов наклона

$$|e_{2i}| \leq 3/k_{2i} \leq k_{1i} \delta_1 = \delta_{2i} \Rightarrow k_{2i} \leq 3/(k_{1i} \delta_1), \\ i = \overline{1, n}, \quad (15)$$

а для нахождения амплитуд сигмоидальных управлений (14), обеспечивающих сходимость переменных состояния в заданные окрестности нуля (15), воспользуемся идеологией метода иерархии управлений [10, 13], основанной на иерархии сходимости компонент вектора e_2 в области (15), которая, например, совпадает с их порядковыми номерами:

$$|e_{21}| \leq \delta_{21} \quad \forall t > t_{21} > 0 \Rightarrow |e_{22}| \leq \delta_{22} \quad \forall t > t_{22} > t_{21} \Rightarrow \dots \\ \dots \Rightarrow |e_{2n}| \leq \delta_{2n} \quad \forall t > t_{2n} > t_{2, n-1}. \quad (16)$$

Идея заключается в том, что для замкнутой подсистемы (8), (14) последовательно, сверху вниз составляются неравенства типа (П.3) для выбора значений m_{2i} , при которых за конечное время последовательно обеспечивается стабилизация переменных состояния с заданной точностью (16). Как показано в Приложении, при этом уравнения ста-

тики $\dot{e}_{2i} = 0$, $\ddot{e}_{2i} = 0$ выполняются с некоторой точностью: $|\dot{e}_{2i}| \leq \beta_{1i}$, $|\ddot{e}_{2i}| \leq \beta_{2i} \quad \forall t \geq t_{2i}$, $i = \overline{1, n}$. Тот факт, что верхние оценки областей сходимости производных не зависят непосредственно от параметров m_{2i} , k_{2i} (см. (П.5), (П.7)), позволяет после анализа каждого i -го уравнения выразить из него v_i и подставить в нижние уравнения подсистемы (8) с номерами $i+1$, $i+2$, ..., n . Таким образом, управления v_p , $i = \overline{1, n-1}$ последовательно исключаются из подсистемы (8), а для матрицы B_2 в режиме off-line будет получен аналитически верхнетреугольный вид.

Формализуем указанный алгоритм. Как известно [14], приведение матрицы B_2 методом Гаусса к верхнетреугольному виду при выполнении условий (13) равносильно ее умножению слева на преобразующую матрицу $T_{n \times n}$, $\det T \neq 0$, которая является произведением нижнетреугольных матриц с единицами на главной диагонали: $T_{n \times n} = T_{n-1} T_{n-2} \dots T_2 T_1$, $\det T_i \neq 0$.

Пусть T_{ij} — j -й n -мерный столбец матрицы $T_i = (T_{i1} T_{i2} \dots T_{in}) \in R^{n \times n}$, $i = \overline{1, n-1}$, во всех матрицах все столбцы T_{ij} при $i \neq j$ единичные, т. е. в них j -й элемент равен единице, остальные равны нулю; $T_{ii} = \text{col}(a_{1i}, a_{2i}, \dots, a_{ni})$, где $a_{ki} = 0$ при $1 \leq k < i$; $a_{kk} = 1$, при $i < k \leq n$ имеем: $a_{ki} = -\Delta_{12\dots i-1, k; 12\dots i-1} / \Delta_i$, в частности,

$$a_{k1} = -\Delta_{k,1} / \Delta_1 \Rightarrow T_{11} = \\ = \text{col}(1, -b_{21}/b_{11}, -b_{31}/b_{11}, \dots, -b_{n1}/b_{11}); \\ a_{k2} = -\Delta_{1k,12} / \Delta_2 \Rightarrow T_{22} = \\ = \text{col}(0, 1, -\Delta_{13,12} / \Delta_2, -\Delta_{14,12} / \Delta_2, \dots, -\Delta_{1n,12} / \Delta_2), \dots; \\ T_{n-1, n-1} = \\ = \text{col}(0, 0, \dots, 0, 1, -\Delta_{12\dots n-2, n; 12\dots n-2, n-1} / \Delta_{n-1}).$$

Соответственно, матрица T также является нижнетреугольной с единицами на главной диагонали, ее элементы $T = (\tilde{a}_{ij})$ определяются рекуррентно:

$$\tilde{a}_{ij} = 0 \quad \forall i > j, \quad \tilde{a}_{ii} = 1, \quad \tilde{a}_{ij} = \sum_{k=i-1}^j a_{ik} \tilde{a}_{kj} \\ \forall i > j, \quad i = \overline{1, n}, \quad j = \overline{1, n},$$

например $\tilde{a}_{i, i-1} = a_{i, i-1}$, $i = \overline{2, n}$; $\tilde{a}_{i, i-2} = a_{i, i-1} \times \tilde{a}_{i-1, i-2} + a_{i, i-2}$, $i = \overline{3, n}$.

Умножив обе части уравнения (8) на матрицу T , получим:

$$T \dot{e}_2 = T \varphi + T B_2 v^* \Rightarrow \dot{e}_2 = \psi + \gamma + \tilde{B}_2 v^*, \quad (17)$$



где $\psi(t) = T\varphi$; $\gamma = -\tilde{T} \dot{e}_2$, $\tilde{T} = T - E_n$, E_n — единичная матрица, т. е. $\gamma = \text{col}(0, \gamma_2, \dots, \gamma_n)$, $\gamma_i = -\sum_{j=1}^{i-1} \tilde{a}_{ij} \dot{e}_{2j}$;

$\tilde{B}_2 = TB_2 = (\tilde{b}_{ij})$ — верхнетреугольная матрица, первая строка которой совпадает с первой строкой матрицы B_2 ; $\tilde{b}_{ij} = 0 \forall i > j$; $\tilde{b}_{ii} = \Delta_i/\Delta_{i-1} \neq 0$ (13);

при $2 \leq i < j$ имеем $\tilde{b}_{ij} = \Delta_{12\dots i-1, i, 12\dots j-1, j}/\Delta_{i-1}$. В силу ограничений (12) вычислим нижние оценки диагональных и верхние оценки остальных ненулевых элементов верхнетреугольной матрицы \tilde{B}_2 :

$$\forall q_1 \in \bar{Q}_1 \subset Q_1, \forall t \geq 0: \tilde{b}_{ii} \leq |\tilde{b}_{ii}(q_1, t)|, \quad i = \overline{1, n},$$

$$|\tilde{b}_{ij}(q_1, t)| \leq \bar{b}_{ij}, \quad 2 \leq i < j.$$

Последовательно, сверху вниз составим аналитические неравенства для выбора амплитуд сигмоидальных управлений (14) на основе системы (17). При этом нижняя оценка m_{2i} , $i = \overline{1, n-1}$ зависит от m_{2j} , $j = \overline{i+1, n}$; на i -м шаге ($i = \overline{2, n}$) функция γ_i и ее производная считаются ограниченными аналогично выражениям (П.5) и (П.6) с учетом неравенств (15). Достаточные условия сходимости переменных в последовательности (16) получим из оценок производных второго слагаемого квадратичной формы (9):

$$\begin{aligned} \dot{V}_{21} &= e_{21} \dot{e}_{21} = \\ &= e_{21} \left(\varphi_1 + \sum_{j=2}^n b_{1j} v_j^* - b_{11} m_{21} \text{sign} b_{11} \sigma(k_{21} e_{21}) \right) \leq \\ &\leq |e_{21}| \left(|\varphi_1| + \sum_{j=2}^n \bar{b}_{1j} m_{2j} - 0,9 \bar{b}_{11} m_{21} \right) < 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow m_{21} > 1,1 \left(|\varphi_1| + \sum_{j=2}^n \bar{b}_{1j} m_{2j} \right) / \bar{b}_{11}; \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \dot{V}_{2i} &= e_{2i} \dot{e}_{2i} = e_{2i} \left(\varphi_i + \gamma_i + \sum_{j=i+1}^n \tilde{b}_{2j} v_j^* - \right. \\ &\quad \left. - \tilde{b}_{ii} m_{2i} \text{sign} \tilde{b}_{ii} \sigma(k_{2i} e_{2i}) \right) \leq \\ &\leq |e_{2i}| \left(|\varphi_i| + |\gamma_i| + \sum_{j=i+1}^n \bar{b}_{2j} m_{2j} - 0,9 \bar{b}_{ii} m_{2i} \right) < 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow m_{2i} > 1,1 \left(|\varphi_i| + |\gamma_i| + \sum_{j=i+1}^n \bar{b}_{2j} m_{2j} \right) / \bar{b}_{ii}, \\ &\quad i = \overline{2, n-1}. \end{aligned}$$

После непосредственного выбора численного значения m_{2n} на основе неравенства

$$\begin{aligned} \dot{V}_{2n} &= e_{2n} \dot{e}_{2n} = e_{2n} (\varphi_n + \gamma_n + \\ &+ \tilde{b}_{nn} m_{2n} \text{sign} \tilde{b}_{nn} \sigma(k_{2n} e_{2n})) \leq |e_{2n}| (|\varphi_n| + |\gamma_n| - \\ &- 0,9 \bar{b}_{nn} m_{2n}) < 0 \Rightarrow m_{2n} > 1,1 (|\varphi_n| + |\gamma_n|) / \bar{b}_{nn} \end{aligned} \quad (19)$$

обратным ходом, снизу вверх последовательно выбираются значения m_{2i} , $i = \overline{n-1, 1}$. При выборе параметров сигмоидального управления в виде (15), (18), (19) квадратичная форма (9) является функцией Ляпунова для замкнутой системы (7), (8), (14), что гарантирует решение поставленных задач (10) и, следовательно, (5).

Для сигмоидальных фиктивных управлений (14) ограничения (3), которые служат основой для выбора ИУ, определяются в силу оценок (П.1) и формулы (8):

$$\begin{aligned} |v_i^*(t)| \leq m_{2i} = \bar{v}_{0i}, \quad |v_i^*(t)| &\leq \left| \frac{\partial v_i^*(e_2)}{\partial e_{2i}} \right| |e_{2i}| \leq \\ &\leq 0,5 m_{2i} k_{2i} \left(F_{0i} + \sum_{j=1}^n \bar{b}_{ij} m_{2j} \right) = \bar{v}_{1i} \\ &\forall t \geq 0, \quad i = \overline{1, n}. \end{aligned} \quad (20)$$

2.3. Синтез укороченного наблюдателя состояний с сигмоидальными корректирующими воздействиями

Для решения задачи слежения в ИУ требуется сформировать задающий сигнал $v^*(e_2(t))$ (14). Вычисление в реальном времени сигнала $e_1(t) = y_2 + K_1 e_1 - \dot{g} = J(q_1) q_2 + K_1 (y_1 - g) - \dot{g}$ требует слишком много информации: сигнал $e_1(t) = h(q_1(t)) - g(t)$ можно вычислить по измеряемым сигналам $g(t)$ и $q_1(t)$, но возникает проблема измерений или оценки $q_2(t)$ и $\dot{g}(t)$. Покажем, что можно снизить требования к объему априорной информации и существенно упростить структуру регулятора, если непосредственно оценивать сигнал $e_2(t)$ с помощью укороченного наблюдателя состояний, построенного на основе подсистемы (7) в виде

$$\dot{z} = -K_1 z + v, \quad (21)$$

где $z \in R^n$ — вектор состояния, $v \in R^n$ — вектор корректирующих воздействий наблюдателя. Задача наблюдения сводится к задаче стабилизации системы, записанной относительно ошибки наблю-

дения $\varepsilon = e_1 - z$, $\varepsilon \in R^n$, которая в силу (7) и (21) имеет вид

$$\dot{\varepsilon} = -K_1\varepsilon + e_2 - v. \quad (22)$$

Как показано в Приложении, выбором параметров m_i , $k_i = \text{const} > 0$, $i = \overline{1, n}$ сигмоидальных корректирующих воздействий

$$v = M\sigma(K\varepsilon), \quad M = \text{diag}(m_i), \quad K = \text{diag}(k_i), \\ \sigma(K\varepsilon) = \text{col}(\sigma(k_1\varepsilon_1), \dots, \sigma(k_n\varepsilon_n)) \quad (23)$$

в замкнутой системе (22), (23) за заданное время $t > t_0 > 0$ с заданной точностью можно обеспечить стабилизацию не только ошибок наблюдения, но и их производных

$$|\varepsilon_i(t)| \leq \alpha_p, \quad |\dot{\varepsilon}_i| \leq (k_{1i} + 1)\alpha_i \Rightarrow |e_{2i} - v_i| \leq \alpha_i \ll \delta_{2i}, \\ i = \overline{1, n}, \quad (24)$$

тогда оценки неизмеряемых сигналов $e_2(t)$ дадут непосредственно сигмоидальные корректирующие воздействия $v(t) \approx e_2(t) \forall t > t_0$.

Анализ квадратичной формы $V = \frac{1}{2}\varepsilon^T\varepsilon + \frac{1}{2}\dot{\varepsilon}^T\dot{\varepsilon}$ выполним на основе системы $\dot{\varepsilon} = -K_1\varepsilon + e_2 - M\sigma(K\varepsilon)$, $\ddot{\varepsilon} = -\left(K_1 + M\frac{\partial\sigma(K\varepsilon)}{\partial\varepsilon}\right)\dot{\varepsilon} + \varphi(t) + B_2(q_1)v$, полученной в силу (22), (23) и (8). Для производных квадратичной формы с учетом оценок (П.1) и выражений (П.2) имеем:

$$\varepsilon^T\dot{\varepsilon} \leq \sum_{i=1}^n |\varepsilon_i|(-k_{1i}|\varepsilon_i| + |e_{2i}| - 0,9m_i) < 0$$

вне окрестности $|\varepsilon_i(t)| \leq 3/k_i \leq \alpha_i$ при $m_i > 1, 1|e_{2i}|$, где $|e_{2i}(t)| \leq 2Y_{2i} + 2k_{1i}Y_{1i} \forall t \geq 0, \forall i = \overline{1, n}$;

$$\dot{\varepsilon}^T\ddot{\varepsilon} \leq \sum_{i=1}^n |\dot{\varepsilon}_i| \left(|\varphi_i| + \sum_{j=1}^n \bar{b}_{ij}m_{2j} - (k_{1i} + 0,1k_i m_i)|\dot{\varepsilon}_i| \right) < 0$$

вне окрестности $|\dot{\varepsilon}_i| \leq (k_{1i} + 1)\alpha_i$ при $k_i > k_i^* = 10 \left(|\varphi_i| + \sum_{j=1}^n \bar{b}_{ij}m_{2j} \right) / (m_i(k_{1i} + 1)\alpha_i) - 10k_{1i}/m_i, \forall i = \overline{1, n}$. Требования (24) будут выполнены при следующем выборе параметров (23):

$$m_i > 2,2(Y_{2i} + k_{1i}Y_{1i}), \quad k_i > \max\{3/\alpha_p, k_i^*\}, \quad i = \overline{1, n}.$$

3. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ СЛЕЖЕНИЯ В ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ПОДСИСТЕМЕ

На втором этапе с помощью истинного, разрывного управления u требуется обеспечить стабилизацию ошибки слежения $e_3 = v - v^* \in R^n$ — невязки между истинным $v(t)$ и сформированным $v^*(e_2(t))$ (14) фиктивным управлением. В силу (2) дифференциальное уравнение относительно ошибки слежения имеет вид

$$\dot{e}_3 = -Ae_3 + f(t) + Bu,$$

где $f(t) = -Av^*(t) - Dq_2(t) - \dot{v}^*(t)v$, $A = \text{diag}(a_i)$, $B = \text{diag}(b_i)$, $D = \text{diag}(d_i)$, $a_i, b_i, d_i = \text{const} > 0$, элементы вектор-функции $f = \text{col}(f_1, \dots, f_n)$ в силу $q_2 \in Q_2 \subset R^n$ и (20) ограничены. Базовый закон разрывного управления с постоянной амплитудой

$$u = -K_3\text{sign}e_3, \quad (25)$$

где $K_3 = \text{diag}(k_{3i})$, $k_{3i} = \text{const} > 0$, $i = \overline{1, n}$, $\text{sign}e_3 = \text{col}(\text{sign}e_{31}, \dots, \text{sign}e_{3n})$, приводит к замкнутой подсистеме $\dot{e}_3 = -Ae_3 + f(t) - BK_3\text{sign}e_3$. При выполнении достаточных условий $e_3^T\dot{e}_3 < 0$ [13] на многообразии $e_3 = 0$ за конечное время возникнет скользящий режим. Неравенства для выбора амплитуды разрывного управления имеют вид

$$b_i k_{3i} > |f_i(t)|, \quad |f_i(t)| \leq a_i \bar{v}_{0i} + d_i |q_{2i}| + \bar{v}_{1i} \quad \forall t \geq 0, \\ i = \overline{1, n} \quad (26)$$

и служат основой для выбора ИУ, способных отработать задающие воздействия (14), (20).

В замкнутой системе управления с наблюдателем (21), (23) базовый закон разрывного управления (25) реализуется в виде $u = -K_3\text{sign}(v(t) - v^*(v))$.

Использование разрывного управления и организация в замкнутой системе скользящих режимов служит эффективным инструментом декомпозиции, обеспечения инвариантности к внешним возмущениям и робастности к параметрическим и функциональным неопределенностям, принадлежащим пространству управления [13]. Синтез разрывных управлений вполне естественен в электрических ИУ, выполненных на базе безынерционных силовых элементов, которые функционируют исключительно в ключевом режиме. Однако эти алгоритмы нельзя задействовать для формирования локальных обратных связей из-за наличия ограничений на фазовые переменные. Именно этот факт обусловил введение в качестве альтернативы функции знака S -образной, гладкой сигма-функ-



ции, использование которой позволило обеспечить непрерывность и ограниченность сигналов, а также сохранить преимущества систем с разрывными управлениями в допредельной ситуации.

4. РЕЗУЛЬТАТЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ

Разработанные алгоритмы применены для решения задачи управления движением конечной точки трехзвенного манипулятора типа UMS-2 в цилиндрической системе координат $y_1 = \text{col}(x, y, z) \in R^3$. Обобщенные координаты такого манипулятора $q_1 = \text{col}(q_{11}, q_{12}, q_{13})$ совершают вращательные, вертикальные линейные и горизонтальные линейные движения соответственно. Матрицы механической подсистемы (1) имеют вид [15]:

$$H_{3 \times 3} = \text{diag}(H_i) > 0,$$

$$H_1 = (m'_3 + m_3)q_{13}^2 + m'_3 l q_{13} + m'_3 \frac{l^2}{3} + I_1 + I_2, \\ H_2 = m_2 + m'_3 + m_3, \quad H_3 = m'_3 + m_3; \quad (27)$$

$$Cq_2 = \text{col}(C_1, C_2, C_3),$$

$$C_1 = 2 \left[(m'_3 + m_3)q_{13} - m'_3 \frac{l}{2} \right] q_{23} q_{21}, \quad C_2 = 0,$$

$$C_3 = \left[m'_3 \frac{l}{2} - (m'_3 + m_3)q_{13} \right] q_{21}^2;$$

$$G = \text{col}(G_1, G_2, G_3), \quad G_1 = 0,$$

$$G_2 = (m_2 + m'_3 + m_3)g, \quad G_3 = 0,$$

где $I_1 = 0,03$ [кг · м²] — приведенный момент инерции частей манипулятора, участвующих во вращательном движении; $m_2 = 6,5$ [кг] — приведенная масса частей, участвующих в поступательном вертикальном движении; $I_2 = 0,06$ [кг · м²] — момент инерции этих частей, приведенный к вертикальной оси; $m'_3 = 5,5$ [кг] — масса руки, которая представлена однородным стержнем длиной $l = 0,9$ [м]; $m_3(t) = [0,1 \div 3]$ [кг] — точечная масса схвата с грузом; $g = 9,8$ [м/с²] — ускорение свободного падения. Конструктивные ограничения $Q_1: 0,3 \leq q_{12}(t) \leq 1,9$, $0,1 \leq q_{13}(t) \leq 1,8$ [м]; $Q_2: |q_{21}(t)| \leq 1$ [рад/с]; $|q_{22}(t)| \leq 1$, $|q_{23}(t)| \leq 1$ [м/с]. При моделировании масса схвата с грузом m_3 и внешние возмущения $\eta = \text{col}(\eta_1, \eta_2, \eta_3)$ полагались кусочно-гладкими периодическими функциями времени $t \geq 0$ [с] с указанными главными периодами:

$$m_3 = 2 \cos \frac{t}{2}, \quad 0 \leq t < 3; \quad \eta_1 = \begin{cases} 0, & 0 \leq t \leq 2; \\ 0,2, & 2 < t < 4; \end{cases}$$

$$\eta_2(t) = 0; \quad \eta_3(t) = 0,1t - 0,2, \quad 0 \leq t < 3.$$

Требовалось обеспечить движение конечной точки манипулятора по пространственной траектории, заданной параметрически в системе координат схвата

$$x: g_1 = (0,2 \cos 0,4t + 0,5) \cos 0,4t;$$

$$y: g_2 = (0,2 \cos 0,4t + 0,5) \sin 0,4t;$$

$$z: g_3 = 0,4 \sin 0,4t + 1.$$

Выходные переменные системы (1), (27) являются функциями обобщенных координат

$$y_1 = \text{col}(x, y, z): x = q_{13} \cos q_{11}, \quad y = q_{13} \sin q_{11}, \quad z = q_{12},$$

в представлении системы (29) в виде (7), (8) матрицы $J = (\partial y_1 / \partial q_1)$ и B_2 имеют вид:

$$J = \begin{pmatrix} -q_{13} \sin q_{11} & 0 & \cos q_{11} \\ q_{13} \cos q_{11} & 0 & \sin q_{11} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$B_2 = JH^{-1} = \begin{pmatrix} -q_{13} \sin q_{11} H_1^{-1} & 0 & \cos q_{11} H_3^{-1} \\ q_{13} \cos q_{11} H_1^{-1} & 0 & \sin q_{11} H_3^{-1} \\ 0 & H_2^{-1} & 0 \end{pmatrix}, \quad (28)$$

$$\det J = q_{13} \neq 0, \quad 0,08 \leq H_1^{-1} \leq 0,47,$$

$$0,07 \leq H_2^{-1} \leq 0,08, \quad 0,12 \leq H_3^{-1} \leq 0,18.$$

В силу структуры матрицы B_2 (28) в подсистеме (8) переменная e_{23} независимо управляется с помощью фиктивного управления

$$v_2^* = -m_{22} \sigma(k_{23} e_{23}), \quad m_{22} > 1, 1|\Phi_3| \bar{H}_2, \\ k_{23} \geq 3/(k_{13} \delta_1). \quad (29)$$

Для управления переменными e_{21} и e_{22} применяем метод иерархии (16). Условия типа (13) не выполняются $\forall q_{11}$, поэтому разобьем главный период $0 \leq q_{11}(t) \leq 2\pi$ на 4 интервала знакопостоянства элементов $\Delta_1 = b_{11}$ и $\Delta_{1,3} = b_{13}$, $\Delta_2 = \Delta_{12,13} = -q_{13} H_1^{-1} H_3^{-1} < 0$, где сопоставление управляемых e_{21} , e_{22} и управляющих v_1 , v_3 переменных будет разным, а именно:

$$1) \quad q_{11} \in [0; \pi/4], (7\pi/4; 2\pi]: \quad v_1^* = -m_{21} \sigma(k_{22} e_{22}), \\ v_3^* = -m_{23} \sigma(k_{21} e_{21}); \quad (30)$$

$$2) \quad q_{11} \in (\pi/4; 3\pi/4]: \quad v_1^* = +m_{21} \sigma(k_{21} e_{21}), \\ v_3^* = -m_{23} \sigma(k_{22} e_{22});$$

3) $q_{11} \in (3\pi/4; 5\pi/4]$: $v_1^* = +m_{21}\sigma(k_{22}e_{22})$,
 $v_3^* = +m_{23}\sigma(k_{21}e_{21})$;

4) $q_{11} \in (5\pi/4; 7\pi/4]$: $v_1^* = -m_{21}\sigma(k_{21}e_{21})$,
 $v_3^* = +m_{23}\sigma(k_{22}e_{22})$; $k_{2j} \leq 3/(k_{1j}\delta_1)$, $j = 1, 3$.

Во 2-м и 4-м интервалах $\text{sign}b_{11} = \text{const}$, за основу принимается главная диагональ, в процессе преобразования матрицы B_2 обнуляется элемент \tilde{b}_{21} . Аналогично условиям сходимости (18) имеем:

$$m_{21(2,4)} > 1,1(|\varphi_1| + \bar{b}_{13} m_{23(2,4)})/\bar{b}_{11};$$

$$m_{23(2,4)} > 1,1(\bar{b}_{11}|\varphi_2| + \bar{b}_{21}(|\dot{e}_{21}| + |\varphi_1|))/\bar{\Delta}_{12,13}. \quad (31)$$

В 1-м и 3-м интервалах $\text{sign}b_{13} = \text{const}$, за основу принимается побочная диагональ, в процессе преобразования матрицы B_2 обнуляется элемент \tilde{b}_{23} :

$$m_{23(1,3)} > 1,1(|\varphi_1| + \bar{b}_{11} m_{21(1,3)})/\bar{b}_{13};$$

$$m_{21(1,3)} > 1,1(\bar{b}_{13}|\varphi_2| + \bar{b}_{23}(|\dot{e}_{21}| + |\varphi_1|))/\bar{\Delta}_{12,13}. \quad (32)$$

Для математической модели (7), (8), составленной для манипулятора (27), (28) с сигмоидальными фиктивными управлениями (29), (30), ставилась задача синтеза разрывного управления (25) и

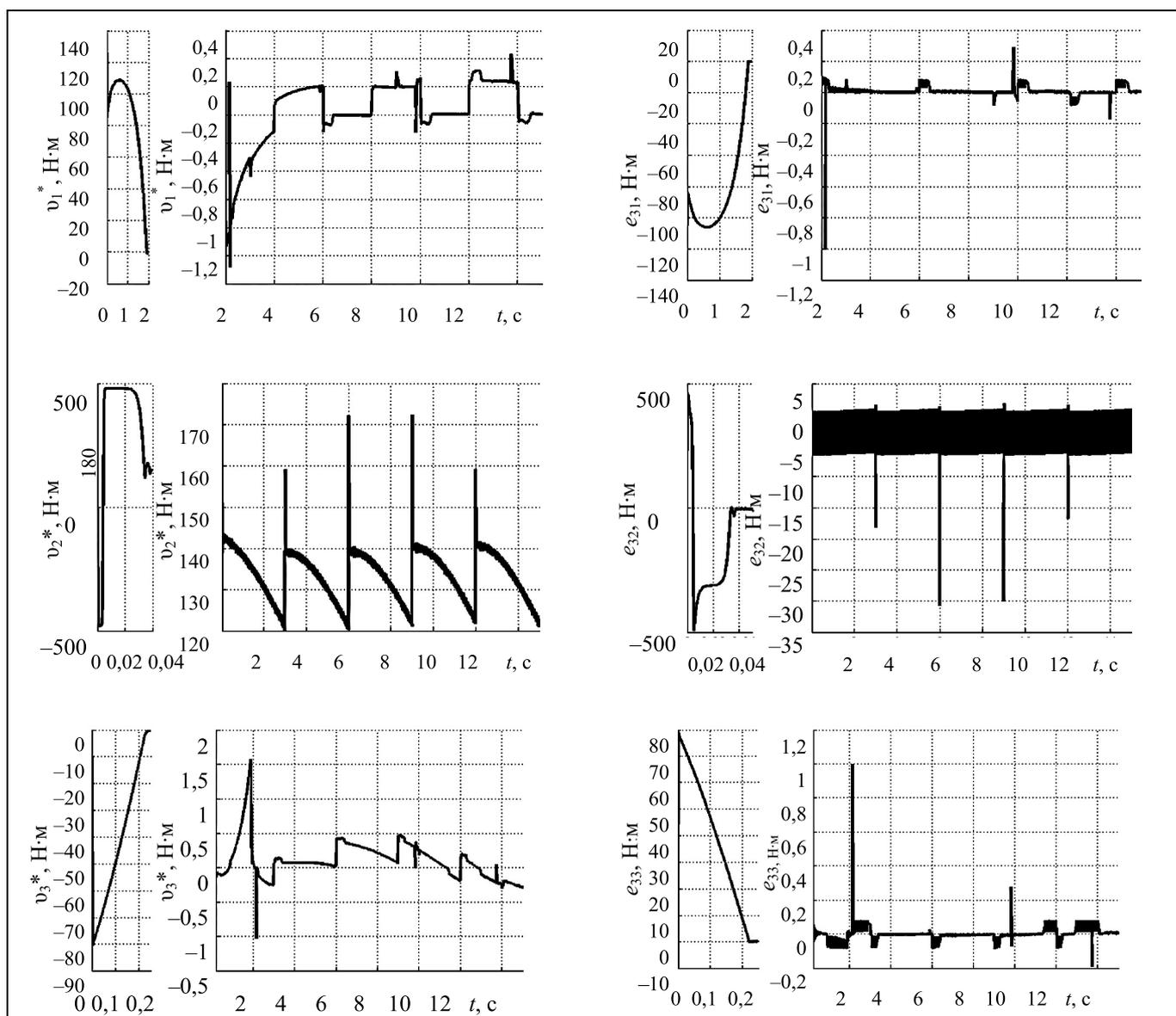


Рис. 1. Графики задающих воздействий $v_i^*(t)$ и ошибок слежения $e_{3i}(t) = v_i(t) - v_i^*(t)$, $i = 1, 2, 3$, в электрической подсистеме

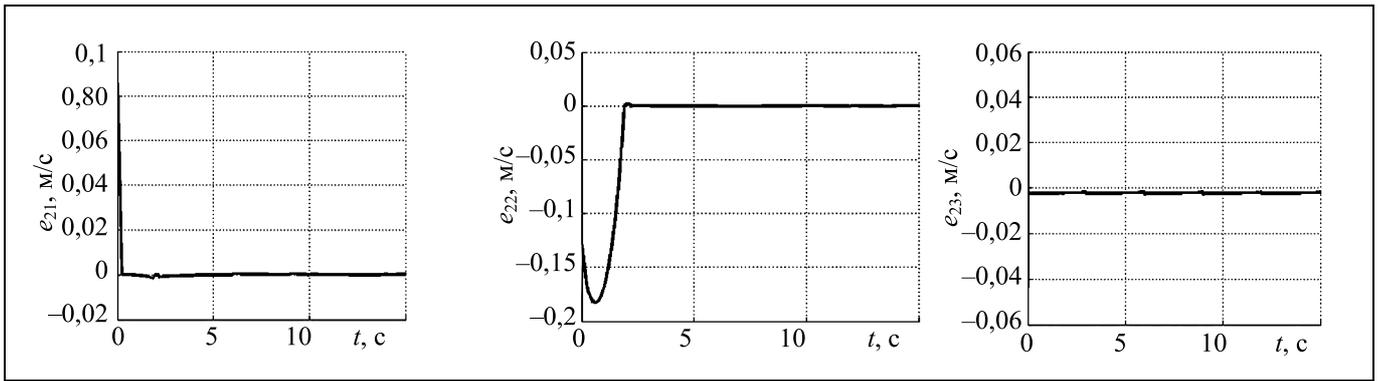


Рис. 2. Графики невязок $e_{2i}(t) = y_{2i} - \dot{g}_i + k_{1i}e_{1i}$, $i = 1, 2, 3$

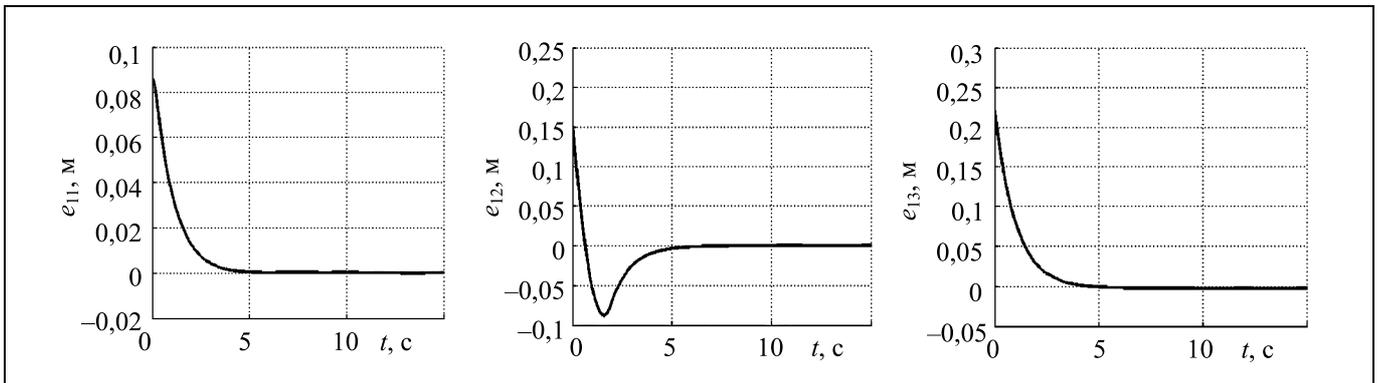


Рис. 3. Графики ошибок слежения $e_{1i}(t) = y_{1i}(t) - g_i(t)$, $i = 1, 2, 3$, в механической подсистеме

выбора ИУ (2), обеспечивающих решение задачи слежения (5), где

$$|e_{1i}(t)| \leq 0,05 \text{ [м]} \quad \forall t \geq 3 \text{ [с]}, \quad i = 1, 2, 3. \quad (33)$$

После подстановки параметров манипулятора в неравенства (11), (15), (29), (31) и (32) были приняты коэффициенты локальных связей $k_{1i} = 1$, $i = \overline{1, 3}$, $k_{21} = k_{22} = 10$, $k_{23} = 250$, $m_{21(2,4)} = m_{23(1,3)} = 180$, $m_{23(2,4)} = m_{21(1,3)} = 120$, $m_{22} = 880$, на основе которых с учетом ограничений (20), (26) были выбраны ИУ (2) с параметрами

$$A = \text{diag}(430, 430, 430), \quad D = \text{diag}(2, 8, 2),$$

$$B = \text{diag}(42, 3000, 58), \quad k_{3i} = 24 \text{ [В]}.$$

Замкнутая система (1), (2), (27) с разрывным управлением (25) и наблюдателем (21) моделировалась в среде Matlab-Simulink. Выбор параметров сигмоидальных корректирующих воздействий (23) $M = \text{diag}(6, 37, 4)$, $k_i = 1000$, $i = 1, 2, 3$, обеспечил оценки $|e_{2i}(t) - v_i(t)| \leq 0,00014 \quad \forall t > t_0 = 0,002 \text{ [с]}$, на

их основе и логики переключений (29), (30) сформированы фиктивные сигмоидальные управления $v^*(v(t))$. Данные сигналы для всех степеней подвижности, а также графики ошибок слежения $e_{3i}(t) = v_i(t) - v_i^*(t)$, $i = 1, 2, 3$ в ИУ показаны на рис. 1. Из-за достаточно больших амплитуд переключений разрывных управлений $b_1 k_{31} = 1008$, $b_2 k_{32} = 72\,000$, $b_3 k_{33} = 1392$ наблюдается так называемый реальный скользящий режим, который возникает за конечное время в пограничном слое, ширина которого прямо пропорциональна амплитуде переключений: $|e_{31}(t)| \leq 0,1$, $|e_{32}(t)| \leq 5$, $|e_{33}(t)| \leq 0,1 \text{ [Нм]}$. Существенно, что достаточно значимые ошибки слежения в ИУ не оказывают влияния на точность слежения в механической подсистеме (33), так как при синтезе обобщенных моментов ставилась задача обеспечения ε -инвариантности к имеющимся неопределенностям.

На рис. 2 и 3 представлены графики переменных подсистем (8) и (7) соответственно — невязок $e_{2i}(t)$ и ошибок слежения $e_{1i}(t) = y_{1i}(t) - g_i(t)$,

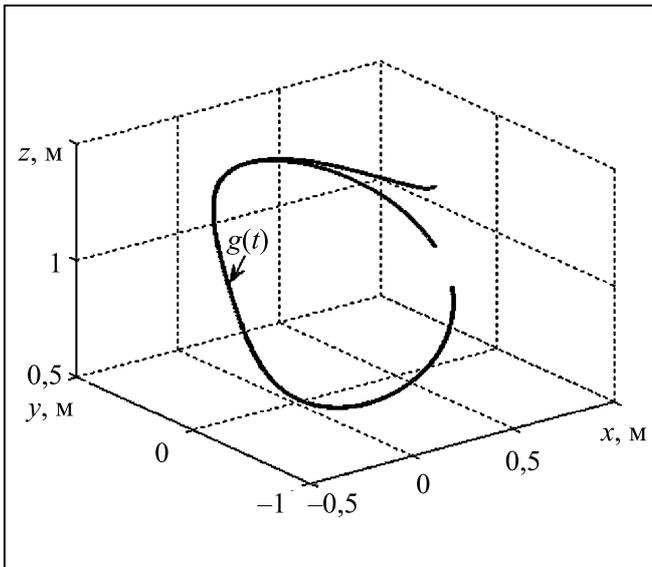


Рис. 4. Заданная $g(t)$ и реальная $y_1(y)$ пространственные траектории конечной точки манипулятора

$i = 1, 2, 3$. Как видим, поставленная цель управления (33) обеспечивается. Тот факт, что неравенства (11), (15), (18), (19) для выбора коэффициентов локальных связей получены из достаточных (избыточных) условий, обеспечивает в установившемся режиме существенно более высокую по сравнению с поставленной целью (33) точность слежения: $|e_{11}(t)| \leq 1,7 \cdot 10^{-4}$, $|e_{12}(t)| \leq 1,47 \cdot 10^{-4}$, $|e_{13}(t)| \leq 0,0022$ [м]. На рис. 4 показаны заданная пространственная траектория и траектория конечной точки манипулятора. Результаты моделирования подтверждают эффективность разработанного подхода.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основной результат данной работы — иерархическая процедура синтеза фиктивных сигмоидальных управлений в условиях неполной информации о входных каналах (см. п. 2.2), представляется перспективным и может быть распространен на общий случай параметрически неопределенных квазилинейных систем, сохраняющих структурные свойства управляемости при допустимой вариации параметров, и приводимых к блочному виду [16]. В отличие от обычно используемых линейных управлений с большими коэффициентами, приводящих к перерегулированию в начале переходного процесса, синтез сигмоидальных локальных связей обеспечивает ε -инвариантность по от-

ношению к неопределенностям при соблюдении в процессе управления ограничений на фазовые переменные и их производные.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Рассмотрим нелинейную гладкую ограниченную сигма-функцию $\sigma(kx) = 2/(1 + e^{-kx}) - 1$, $k = \text{const} > 0$, которая является допредельной реализацией функции знака $y = \text{sign} x$ в смысле: $\sigma(-kx) = -\sigma(kx)$, $\sigma(kx) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} kx/2$, $\sigma(kx) \underset{k \rightarrow +\infty}{\sim} \text{sign} x$. Первая производная сигма-функции — положительная ограниченная четная функция $\sigma'(kx) = k(1 - \sigma^2(kx))/2$; вторая производная — ограниченная нечетная функция $\sigma''(kx) = -k\sigma'(kx)\sigma(kx)$. Для сигма-функции и ее первой производной в указанных интервалах справедливы оценки:

$$\sigma(k\Delta) < |\sigma(kx)| < 1, \quad 0 < \sigma'(kx) < \sigma'(k\Delta) \quad \forall |x| > \Delta > 0;$$

$$\sigma(k\Delta)|x|/\Delta \leq |\sigma(kx)| \leq \sigma(k\Delta),$$

$$0 < \sigma'(k\Delta) \leq \sigma'(0) = k/2 \quad \forall |x| \leq \Delta. \quad (\text{П.1})$$

Из оценок (П.1) следует, что при $|x| > \Delta$ сигма-функция близка к постоянной функции, а при $|x| \leq \Delta$ — к линейной. В качестве границы указанного разделения сигма-функции при $x \geq 0$ рекомендуется принять точку $k\Delta = c$, где $\pm c \approx \pm 3$ — абсциссы вершин сигма-функции, в которых ее кривизна достигает максимума [2, 3], при этом

$$\sigma(\pm 3) \approx \pm 0,9, \quad \sigma'(\pm 3) \approx 0,1k, \quad k\Delta \approx 3. \quad (\text{П.2})$$

Рассмотрим возмущенную систему первого порядка $\dot{x} = f(t) - u$, где $x \in R$ — переменная состояния, $u = M\sigma(kx)$ — сигмоидальное управление с параметрами M , $k = \text{const} > 0$, $f(t)$ — неизвестная, ограниченная функция времени $|f(t)| \leq F = \text{const} > 0 \quad \forall t \geq 0$. Найдем нижнюю оценку для выбора амплитуды сигмоидального управления с учетом выражений (П.1) и (П.2) из достаточных условий $x\dot{x} < 0$. Это неравенство выполняется вне окрестности $|x| \leq \Delta$, если $x\dot{x} = x(f - M\sigma(kx)) \leq |x|(F - 0,9M) < 0 \Rightarrow M > 1,1F$. При выборе ограниченной амплитуды

$$M > 1,1(|x(0)|/t_0 + F) \quad (\text{П.3})$$

за конечное время $t_0 \geq 0$ обеспечивается попадание переменной состояния в некоторую окрестность нуля $|x(t)| \leq \Delta$, которая в силу (П.2) определяется выбором второго параметра:

$$|x(t)| \leq 3/k \leq \Delta \Rightarrow k \leq 3/\Delta \quad \forall t \geq t_0. \quad (\text{П.4})$$

При микропроцессорной реализации данного алгоритма на выбор k накладывается ограничение сверху $k \leq 1/\text{macheps}$, обусловленное разрядностью процессора.

Покажем, что если первая и вторая производные внешнего возмущения ограничены $|f^{(j)}(t)| \leq F_j = \text{const} > 0 \quad \forall t \geq 0, j = 1, 2$, то при $t > t_0$ первая и вторая производные переменной состояния в замкнутой системе с сигмоидаль-



дальним управлением также будут ограничены. Для их оценки составим вспомогательные уравнения

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= \dot{f} - M\sigma'(kx)\dot{x}, \\ \ddot{x} &= \ddot{f} - M\sigma'(kx)\ddot{x} - M\sigma''(kx)\dot{x}^2 = \\ &= \ddot{f} - M\sigma'(kx)\ddot{x} + Mk\sigma'(kx)\sigma(kx)\dot{x}^2 \end{aligned}$$

и рассмотрим квадратичную форму $V = V_1 + V_2 = \frac{1}{2}\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\ddot{x}^2$. В силу (П.1) и (П.2) неравенство $\dot{V}_1 < 0$ выполняется вне окрестности $|\dot{x}| \leq \beta_1$, если

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 = \dot{x}\ddot{x} = \dot{x}(\dot{f} - M\sigma'(kx)\dot{x}) &\leq |\dot{x}|(F_1 - 0,1kM|\dot{x}|) < 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow k > 10F_1/(M\beta_1). \end{aligned}$$

При уже выбранных параметрах M (П.3) и k (П.4) имеет место оценка

$$\begin{aligned} |\dot{x}| \leq 10F_1/(Mk) \leq \beta_1 \leq 3,3\Delta F_1/M \leq 3\Delta F_1/F \\ \forall t > t_0. \end{aligned} \quad (\text{П.5})$$

Обратим внимание, что при выборе параметров сигмоидального управления в виде (П.3) и

$$k > \max\{3/\Delta; 10F_1/(M\beta_1)\}$$

за конечное время с заданной точностью обеспечивается стабилизация не только переменной состояния $|x(t)| \leq 3/k \leq \Delta$ (П.4), но и ее производной $|\dot{x}(t)| \leq \beta_1$ (П.5). Тогда при $\forall t > t_0$ уравнение статики реализуется с заданной точностью $|\dot{x}(t)| = |f(t) - u(t)| \leq \beta_1$, а управляющий сигнал непосредственно дает оценку внешнего возмущения $u(t) = f(t) \pm \beta_1$. Этот подход может быть применен для оценки неизвестных сигналов с заданной точностью без ввода их динамической модели при построении наблюдателя состояний с сигмоидальными корректирующими воздействиями.

Для производной второго слагаемого V_2 квадратичной формы справедлива оценка $\dot{V}_2 = \ddot{x}(\dot{f} - M\sigma'(kx)(\dot{x} - k\sigma(kx)\dot{x}^2)) \leq |\ddot{x}|(F_2 - 0,1Mk(|\dot{x}| - k|\dot{x}|^2))$. Неравенство $\dot{V}_2 < 0$ при выбранных M (П.3) и k (П.4) обеспечивается вне области, в которую сходится вторая производная:

$$\begin{aligned} |\ddot{x}(t)| \leq 10F_2/(Mk) + k\beta_1^2 \leq \beta_2 \leq \Delta(3F_2/F + 27F_1^2/F^2) \\ \forall t > t_0. \end{aligned} \quad (\text{П.6})$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Зенкевич С.Л., Ющенко А.С.* Основы управления манипуляционными роботами: Учебник для вузов. — М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2004. — 480 с.
2. *Краснова С.А., Мысик Н.С.* Каскадный синтез наблюдателя состояния с нелинейными корректирующими воздействи-

ями // Автоматика и телемеханика. — 2014. — № 2. — С. 106—128.

3. *Краснова С.А., Уткин А.В.* Сигма-функция в задачах синтеза наблюдателей состояний и возмущений // Проблемы управления. — 2015. — № 5. — С. 27—36.
4. *Краснова С.А., Уткин А.В.* Анализ и синтез минимально-фазовых нелинейных SISO-систем при действии внешних несогласованных возмущений // Проблемы управления. — 2014. — № 6. — С. 22—30.
5. *Черноусько Ф.Л., Ананьенский И.М., Решмин С.А.* Методы управления нелинейными механическими системами. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006. — 328 с.
6. *Матюхин В.И.* Управление механическими системами. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2009. — 320 с.
7. *Пятницкий Е.С.* Синтез иерархических систем управления механическими и электромеханическими объектами на принципе декомпозиции // Автоматика и телемеханика. — 1989. — № 1. — С. 87—99; № 2. — С. 71—86.
8. *Ананьевский И.М.* Управление механическими системами с неопределенными параметрами посредством малых сил // Прикладная математика и механика. — 2010. — Т. 77, вып. 1. — С. 161—178.
9. *Краснова С.А., Уткин В.А., Уткин А.В.* Блочный синтез управления механическими системами в условиях неопределенности // Мехатроника, Автоматизация, Управление. — 2009. — № 6. — С. 41—54.
10. *Краснова С.А., Уткин В.А., Уткин А.В., Нгуен Тхань Тиен.* Прямой метод синтеза системы управления рабочим органом манипулятора при неполных измерениях // Проблемы управления. — 2008. — № 1. — С. 10—18.
11. *Кочетков С.А., Уткин В.А.* Метод декомпозиции в задачах управления мобильными роботами // Автоматика и телемеханика. — 2011. — № 10. — С. 87—103.
12. *Краснова С.А.* Каскадный синтез системы управления манипулятором с учетом динамики электроприводов // Автоматика и телемеханика. — 2001. — № 11. — С. 51—72.
13. *Уткин В.И.* Скользящие режимы в задачах оптимизации и управления. — М.: Наука, 1981. — 368 с.
14. *Воеводин В.В., Кузнецов Ю.А.* Матрицы и вычисления. — М.: Наука, 1984. — 318 с.
15. *Вукобратович М., Стокич Д., Кирчански Н.* Неадаптивное и адаптивное управление манипуляционными роботами. — М.: Мир, 1989. — 376 с.
16. *Краснова С.А., Сиротина Т.Г., Уткин В.А.* Структурный подход к робастному управлению // Автоматика и телемеханика. — 2011. — № 8. — С. 65—95.

Статья представлена к публикации членом редколлегии Л.Б. Рапопортом.

Краснова Светлана Анатольевна — д-р техн. наук, гл. науч. сотрудник, Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, г. Москва; профессор, Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана, ✉ krasnova@ipu.ru,

Ангилов Алексей Семенович — студент, Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана, ✉ scholes18@mail.ru.