УДК 519.833;51-77 DOI: http://doi.org/10.25728/pu.2022.1.3

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕКОТОРЫХ СОЦИАЛЬНО-ЭТИЧЕСКИХ НОРМ ПОВЕДЕНИЯ С ПОМОЩЬЮ ТЕОРЕТИКО-ИГРОВЫХ ПОДХОДОВ

К.Е. Красников

Аннотация. Представлен обзор теоретико-игровых подходов, позволяющих смоделировать, какое влияние оказывают на развитие некоторого сообщества такие преобладающие среди его представителей нормы поведения, как эгоизм и альтруизм, мораль (на примере императива Канта или золотого правила нравственности), а также изучается вопрос определения эффективности сообщества в зависимости от превалирующего среди его представителей мировоззрения. Для сообществ, представители которых преследуют в какой-то степени соблюдение общественных интересов, а не сугубо личных, исследуется вопрос равновесности точки максимума кооперативного дохода. Эффективность сообществ, представители которых следуют таким нравственным критериям, как императив Канта или золотое правило нравственности, исследуется на примере игровой модели социального выбора между двумя нормами поведения: одной – общепринятой, но устаревшей, и другой – новой, ещё не распространённой, но более передовой и прогрессивной. Полученные результаты могут быть использованы для оценки эффективности проводимой воспитательной работы и государственного планирования в сферах воспитания и образования.

Ключевые слова*:* теория игр, конфликтные равновесия, моделирование социально-этических норм поведения.

ВВЕДЕНИЕ

Чем руководствуется каждый индивидуум при выборе своей модели поведения? Известны два основных, по сути, противоположных ответа на этот вопрос.

Например, в экономике ещё начиная с работ Адама Смита сложилась традиция полагать, что человеком движет прежде всего интерес максимизации личного дохода. Есть и другой принцип, когда между индивидуумами складываются отношения сотрудничества и взаимопомощи, и они готовы в чём-то поступиться личными интересами для достижения лучшего общего результата. Этот принцип может иметь и экономическую интерпретацию, когда между участниками рассматриваемого процесса нет абсолютного антагонизма, а имеет место некое пересечение интересов и интеграция.

Но также вопрос выбора между двумя указанными моделями поведения (максимизацией личного дохода или же учёта общих интересов) может иметь и более общую и не менее важную морально-этическую интерпретацию. Ведь вопрос о том, какое влияние оказывают на развитие общества преобладающие среди его представителей этические принципы и жизненные установки, поднимался неоднократно.

В качестве лишь одного примера можно привести работу [1], авторы которой Т.Н. Микушина и М.Л. Скуратовская указывают на кризисное положение в таких сферах, как образование, здравоохранение, экология и др. и связывают такое положение дел не с экономической или политической обстановкой, но со снижающемся уровнем нравственности в обществе.

Однако данный вопрос может быть исследован и с математических позиций. В настоящей работе делается попытка проанализировать, какое влияние оказывают этические принципы, которыми руководствуются индивидуумы, на достижимость наиболее благоприятных ситуаций. При традиционном подходе, когда предполагается, что каждый участник максимизирует лишь собственный доход, точкой равновесия (по Нэшу) может оказаться далеко не самая выгодная для всех участников ситуация, что иллюстрируется хорошо известным примером – так называемой «дилеммой заключённого».

В модели же, предполагающей, что участники, помимо преследования сугубо личного интереса, с некоторым весовым коэффициентом учитывают интересы других (что моделирует уровень сотрудничества и взаимопомощи между участниками), оказывается, что наиболее выгодная игровая ситуация становится сильным равновесием.

Также в работе исследуется влияние морали (понимаемой здесь в смысле императива Канта или близкого к нему по значению золотого правила нравственности) на процесс принятия решений индивидуумами в некотором человеческом сообществе. Для этого рассматривается игровая модель выбора между двумя нормами поведения: одной – общепринятой, но менее эффективной, и второй – новой, ещё малоизвестной, но при этом более благоприятной для сообщества в целом в случае её повсеместного распространения. Данная модель весьма показательно иллюстрирует, как превалирующие среди представителей сообщества морально-этические нормы могут вести сообщество либо к прогрессу и благополучию, либо, напротив, к упадку и деградации.

Однако, прежде чем приступить к изложению основной части работы, дадим краткий обзор имеющихся в данной области результатов, полученных представителями отечественной и зарубежной научных школ.

1. ОБЗОР МЕТОДОВ МОДЕЛИРОВАНИЯ СОЦИАЛЬНО-ЭТИЧЕСКИХ НОРМ ПОВЕДЕНИЯ С ПОМОЩЬЮ ТЕОРЕТИКО-ИГРОВЫХ ПОДХОДОВ

Со времён отца-основателя экономической теории Адама Смита [2] было принято считать, что человеком движет прежде всего индивидуалистический мотив максимизации личного благосостояния. Появился даже термин *homo economicus* – «человек рациональный».

Однако даже сам Адам Смит ставил под сомнение эту предпосылку. Например, в работе «Теория нравственных чувств» [3] он уже вводит понятие «симпатии», которое присуще людям и заставляет их порой поступать в ущерб исключительно личным интересам.

В XX в. появилось такое направление, как поведенческая экономика (*behavioral economics*), изучающее, какое влияние оказывают на принятие решений психологические, морально-этические, когнитивные и культурные факторы. И такой анализ является крайне востребованным, поскольку более реалистично учитывает все аспекты, влияющие на принятие решения человеком, в отличие от ставшей классической, но тем не менее упрощённой и часто довольно грубой модели *homo economicus*.

Поскольку одним из математических инструментов, используемых для анализа экономических явлений, является теория игр, то и в этой области сделано немало для моделирования процессов и явлений, которые, как прежде казалось, были предметом изучения скорее социологии, философии и психологии.

Одна из первых попыток смоделировать морально-этические нормы поведения с помощью теоретико-игровых подходов была предпринята в 1955 г. профессором Р.Б. Брайсвайтом в прочитанной им в Кембридже лекции [4] и с тех пор такие попытки регулярно появляются в работах разных исследователей, занимающихся теорией игр.

Например, нобелевский лауреат Дж. Харсаньи в своей работе «Модели теории игр и принятия решений в этике» [5] утверждает, что этическое (или моральное) поведение основано на понятии коллективной рациональности, которая выходит за рамки традиционной для теории игр концепции максимизации каждым участником сугубо индивидуального или кооперативного дохода: «Теорию рационального поведения в социальной среде можно разделить на теорию игр и этику. Теория игр имеет дело с двумя или более индивидами, часто имеющими очень разные интересы, которые пытаются максимизировать свои собственные (эгоистичные или бескорыстные) интересы рациональным образом против всех других индивидов, которые также пытаются максимизировать свои собственные интересы (эгоистичные или бескорыстные)».

А в работе «Утилитаризм правил и теория принятия решений» [6] Дж. Харсаньи использует основополагающие концепции утилитаризма для построения более реалистичной модели принятия решений индивидуумами в социуме. Утилитаризм – направление в этике, согласно которому моральная или нравственная ценность любого поступка определяется совокупной *полезностью* или пользой, которую этот поступок приносит всем индивидуумам, на которых данное действие оказывает влияние [7]. В этой связи в теоретико-игровой интерпретации Дж. Харсаньи вводит *функцию социальной полезности*, значение которой для каждого участника в каждой точке (каждой стратегии поведения) определяется средним значением полезностей всех участников [5]. Отметим, что более подробно теория полезностей излагается в работе [8].

В настоящее время идеи Дж. Харсаньи были существенно развиты в работах многих современных специалистов по поведенческой экономике (*behavioral economics*) и теории игр [9–11].

Отдельного внимания заслуживает так называемая эволюционная теория игр, являющаяся приложением теории игр к исследованию развития популяций в биологии, а также в социологии. Особенностью этой теории является то, что в ней, как правило, рассматриваются повторяющиеся игры и, соответственно, каждая стратегия оценивается по тому, насколько она является эволюционно устойчивой, т. е. способной пройти проверку временем. Например, применительно к биологии различные стратегии представляют собой определяющие поведение особей генетические черты, которые наследуют потомки от своих пращуров. Именно с позиций эволюционной теории игр удалось обосновать нередко наблюдаемые в природе, особенно у социальных видов, примеры «джентльменского» и даже альтруистического поведения, т. е. поведения на благо вида, что никак не согласовалось с дарвиновским предположением о том, что естественный отбор происходит на индивидуальном уровне [12, 13].

В заключение данного весьма краткого и вовсе не претендующего на полноту обзора зарубежной литературы выделим работу С. Дж. Брамса «Теория игр и гуманитарные науки: соединяя два мира» [14], в которой приложением для теоретико-игровых подходов выступают такие гуманитарные дисциплины, как литература, политика, история и даже теология. Через призму задачи о выборе оптимальной стратегии поведения автор рассматривает дилеммы, возникающие перед героями таких классических литературных произведений, как «Гамлет», «Макбет», «Много шума из ничего» и др., а также Библейских преданий об Аврааме, исходе евреев из Египта, сказании о Самсоне и Далиле и др.

Среди работ представителей отечественной научной школы можно привести в пример монографию Ю.Б. Гермейера и И.А. Вателя «Игры с иерархическим вектором интересов» [15]. Рассматривая задачу распределения ресурсов между личными и общественными нуждами, авторы вводят понятие «эгоизма» по отношению к нуждам данного сообщества в том случае, если участник предпочитает тратить все имеющиеся в его распоряжении средства исключительно на личные цели, игнорируя при этом интересы сообщества.

Ряд идей, предложенных Ю.Б. Гермейером и И.А. Вателем, нашёл своё отражение в работах, посвящённых модели согласования общих и частных интересов (СОЧИ-модель) [16, 17]. В этой модели рассматривается двухуровневое сообщество и, как и в работе [15], исследуется вопрос распределения ресурсов между частными и общественными нуждами. При этом в работе [17] вводятся классы «индивидуалистов» и «коллективистов», на которые можно поделить участников задачи в зависимости от того, на личные или общественно полезные цели они предпочитают расходовать свои ресурсы.

Довольно большую известность приобрели и работы В.А. Лефевра, в частности вышедшая под заголовком «Алгебра совести» книга [18]. В данной работе автором моделируется процесс принятия решения человеком в целом и элемент рефлексии или, иначе говоря, анализ субъектом самого себя и других участников ситуации. Данная модель строится на основе булевых функций, вследствие чего множество исходов сводится, по сути, к двум: благоприятному и неблагоприятному. Также и множество допустимых каждым участников стратегий бинарно и представляет собой выбор между «добром» и «злом».

Особого внимания заслуживает разработанная В.И. Жуковским, К.С. Вайсманом и др. концепция равновесия по Бержу, предлагаемая авторами как аналог «эгоистического» равновесия по Нэшу. Авторы вводят новый тип игрового равновесия, отличающегося от классического равновесия по Нэшу тем, что, например, экстремум функции полезности (функции выигрыша) участника ищется не на множестве его допустимых стратегий, а на произведении множеств допустимых стратегий всех остальных участников, что предлагается авторами интерпретировать так: «…каждый игрок направляет все свои усилия, чтобы увеличить выигрыши остальных, «забывая о себе», о собственных интересах» [19].

Интерес представляют и работы Ф.Л. Зака [20, 21]. В работе [21] рассматривается модель альтруистического поведения, предложенную К. Саито [22], а в работе [20] – ещё одна модель принятия решения, основанная на понятии *кантовского равновесия*. Более подробно соответствующие концепции будут рассмотрены далее по тексту в § 5 и 6 соответственно.

В 2017 г. в специализирующемся на теории игр журнале «*Games*» (Базель, Швейцария) вышел специальный выпуск под заголовком «Этика, Мораль и Теория Игр» [10], в котором были собраны статьи разных современных авторов, объединённые общей тематикой моделирования морально-этических норм и их влияния на принятие решений участниками игровой задачи.

Особенно хочется отметить работу «Стратегии поведения моралистов и альтруистов» [11], которая примечательна тем, что в ней помимо уже отмечавшихся нами типов поведения, основанных на индивидуализме и коллективизме, вводится также третий тип участников, которые руководствуются при выборе своей стратегии поведения императивом Канта, согласно которому, «человек должен стремиться к тому, чтобы максима его поступка могла стать частью всеобщего законодательства» [7], или же золотым правилом нравственности: «Как ты хочешь, чтобы с тобой поступали люди, так и ты поступай с ними» [23]. Суть такого поведения применительно к теоретико-игровой модели сводится к тому, что прежде чем выбрать свою стратегию, каждый участник допускает, что с определённой вероятностью все участники выберут ту же стратегию, и уже исходя из этого допущения принимает решение, как именно следует поступить.

По аналогии с термином *homo economicus* – «человек рациональный», которым именуется первый тип участников-индивидуалистов, руководствующихся исключительно интересом максимизировать свой личный доход, игроки третьего класса именуются в работе [11] *homo moralis* – «человек нравственный».

Этот тип поведения может быть весьма успешно использован для моделирования некоторых социальных, экономических и других процессов, поскольку он в ряде случаев более реалистично описывает процесс принятия решения человеком, нежели классическая модель максимизации (минимизации) собственной платёжной функции.

В настоящей работе на примере задачи на согласование (*coordination game*) рассматривается динамическая модель социального выбора между двумя нормами поведения: одной – традиционной, но менее благоприятной и эффективной, и новой, ещё не применяемой большинством участников. Однако применение новой нормы подавляющей частью представителей рассматриваемого сообщества позволит сообществу в целом достичь гораздо лучших результатов. При этом показывается, что именно игроки класса *homo moralis* способны в каком-то смысле послужить примером, использовать новую норму поведения, даже находясь первое время в меньшинстве и терпя убытки, и тем самым постепенно вывести общество на принципиально новый качественный уровень.

Однако поскольку в естественных условиях, как показывается в работе, переход на новую норму поведения может не произойти, рассматривается также модель обучения, предполагающая, что уровень морали и «сознательности» в сообществе в результате некоторой просветительской деятельности повышается по определённому закону. Это приводит к тому, что всё большее количество индивидуумов переходит на новую норму поведения и постепенно она становится общепринятой в обществе, что ведёт сообщество к несомненному прогрессу.

2. МОДЕЛЬ

В данной работе рассматривается игровая модель с числом участников *N*, предполагающая, что все участники выбирают свои стратегии из одного и того же множества допустимых стратегий.

Допущение 1. Пусть Q – метрическое пространство, G – компактное множество: $G \overset{\Delta}{=} Q^N = \underbrace{Q \times \ldots \times Q}_{N}$.

Пусть на множестве G определены непрерывные функции (функционалы) $J_i(q)$, $i = \overline{1, N}$, $q = (q_1, \ldots, q_N) \in G$; q_i – стратегия *i*-го игрока, $q_i \in Q$, $q^i \overset{\Delta}{=} (q_1, \ldots, q_{i-1}, q_{i+1}, \ldots, q_N)$ – стратегии остальных $N-1$ игроков при фиксированной стратегии q_i i-го игрока, $q^i \in Q^{N-1}$; $J_i(q)$ – *платёжная функция (функционал)* игрока *i*, которая определяет размер некого блага или ресурса, который получает *i*-й участник при выборе им стратегии q_i и при выборе стратегии q^i остальными участниками. При этом функции $J_i(q)$, $i = \overline{1, N}$ предполагается рассматривать как *трансферабельные*, то есть предполагающие возможность любого деления и распределения дохода между игроками. Отметим, что применение механизмов управления организационными системами с трансферабельными функциями полезности подробно рассматривается в обзоре [24].

Пусть $G(q_i)$ и $G(q^i)$ – сечения (срезы) множества G при фиксированной стратегии *i*-го игрока (q_i) или всех игроков, кроме *i*-го (при обстановке q^i), соответственно.

Пусть $J(q) \overset{\Delta}{=} \sum_{k=1}^{N} J_k(q)$ – суммарная платёжная функция всех игроков, $J^i(q) \overset{\Delta}{=} \sum_{k \neq i} J_k(q)$ – суммарная платёжная функция всех игроков, кроме *i*-го.

Определение 1. Игровую задачу, удовлетворяющую допущению 1, будем называть классической игрой (или игрой Г), если каждый из игроков, выбирая стратегию $q_i \in Q$, стремится обеспечить максимум своей платёжной функции $J_i(q_i, q^i)$. ♦

Это классическая постановка задачи теории игр, моделирующая поведение, основанное на преследовании исключительно личных интересов. Чтобы отразить тот факт, что каждый игрок максимизирует лишь собственную платёжную функцию, и обозначить её отличие от модели, определяемой в следующих пунктах, будем называть её также моделью участников-«индивидуалистов» или же моделью *homo economicus*, как она называется в работе [11].

В качестве альтернативы рассматривается класс игровых задач, в которых предполагается, что каждый игрок с некоторым весовым коэффициентом учитывает интересы других участников задачи. Данный факт моделируется переходом от первоначально поставленной задачи, характеризующейся набором платёжных функций $\{J_i,\ i = \overline{1, N}\} = \{J_i\}$, к вспомогательной задаче, определяемой параметрическим семейством функций полезности $\{U_i(J_k, \alpha)\} = \{U_i\}$.

Определение 2. Игровую задачу, удовлетворяющую допущению 1, будем называть игрой Γ^α (или игрой в классе участников-«альтруистов»), если каждый из игроков стремится обеспечить максимум своей функции полезности U_i, которая выражается через платёжную функцию данного игрока $J_i(q)$ и суммарную платёжную функцию остальных игроков $J^i(q)$ так:

$$U_i(q) = (1-\alpha)J_i(q) + \frac{\alpha}{N-1} J^i(q),\quad q \in G,\ \alpha \in \mathbb{R},$$
$$\alpha \in \left[0, \frac{N-1}{N}\right],\ i = \overline{1, N}. \blacklozenge \qquad (1)$$

Мы используем термин «функция полезности» для U_i, чтобы подчеркнуть переход от первоначальных платёжных функций $J_i(q)$, на которых сформулирована задача, к некоторым новым, вообще говоря, искусственного сконструированным целевым функциям, призванным смоделировать особый вид рациональности или логики принятия решения агентом.

Термин «альтруизм» (от лат. *alter* – другой) использован для обозначения данного типа игровых задач с целью подчеркнуть особый вид рациональности или логики принятия решений игроками данного класса: они учитывают с некоторым весовым коэффициентом интересы других участников. В работе [15] подобный тип рациональности называется *коллективизмом*, а подобный вид поведения принято называть *просоциальным*.

Воспользуемся заменой $\beta \overset{\Delta}{=} \alpha \frac{N}{N-1}$. Поскольку $\alpha \in \left[0, \frac{N-1}{N}\right]$, то $\beta \in [0, 1]$, и функцию полезности $U_i(q)$ можно записать в виде

$$U_i(q) = (1-\beta)J_i(q) + \frac{\beta}{N} J(q),\ \beta \in [0, 1]. \qquad (2)$$

В такой форме модель, определяемую функциями полезности (2), можно рассматривать как *игру на общественное благо* (*public goods game*), где функции $\beta J_i(q)$ определяют взнос *i*-го участника, который он делает на некоторые общественно значимые нужды. Слагаемое $(1-\beta)J_i(q)$ определяет ту часть ресурса, которую он оставляет для собственных нужд, а сумма $\frac{\beta}{N} J(q)$ определяет то, что он получает от общества.

В разных игровых задачах бывает удобно пользоваться разными представлениями функции U_i. Например, в задачах с двумя участниками, т. е. когда $N = 2$, формула (1) приобретает вид: $U_i(q) = (1-\alpha)J_i(q) + \alpha J^i(q)$, что весьма удобно для использования. В задачах же со многими участниками удобнее пользоваться выражением (2), для которого и получены основные результаты в данной работе.

Отметим, что приём замены исходных целевых функций для каждого из участников некими новыми функциями, представляющими собой линейную комбинацию исходных целевых функций остальных участников, применяется и в теории активных систем для решения задач *критериального управления*, рассматриваемых, в частности, В.Н. Бурковым, Д.А. Новиковым и соавторами в работах [25, 26]. Поскольку для активных элементов, составляющих активную систему, индивидуальная рациональность (выгода) может отличаться от коллективной, то при наличии некоторого третьего лица (центра), заинтересованного в достижении именно наибольших коллективных результатов и наделённого соответствующими полномочиями, первоначальные индивидуальные целевые функции игроков заменяются линейными комбинациями целевых функций остальных участников, что отражает требование, предъявляемое к активным элементам: работать сообща на общий результат, критерий эффективности которого определяется центральным управляющим органом, вследствие чего становится возможно определить коэффициенты в линейной комбинации.

Также отметим вывод, к которому приходят в заключении авторы обзорной работы по современному состоянию дел в области согласования интересов [24]: «Эффективность функционирования социально-экономических систем не может быть обеспечена без согласования интересов участников системы».

3. СИСТЕМА КОНФЛИКТНЫХ РАВНОВЕСИЙ

Прежде всего, дадим определение классического равновесия по Нэшу с учётом введённых выше обозначений.

Определение 3. Ситуацию $q^* \in G$ назовём равновесием по Нэшу ($\bar{C}^N$-экстремальной), если

$$\max_{q_i \in G\left(q^{i*}\right)} J_i\left(q^{i*}, q_i\right) = J_i\left(q^*\right),\ i = \overline{1, N}, \qquad (3)$$

где $q^i = \left(q_1, \ldots, q_{i-1},\ q_{i+1}, \ldots, q_N\right)$. ♦

Максимум в выражении (3) берётся по всем допустимым стратегиям *i*-го участника q_i из сечения множества G с зафиксированными в равновесной ситуации q^* стратегиями остальных участников (обстановке) q^{i*}.

Однако данное равновесие обладает рядом недостатков: оно существует далеко не всегда и даже когда существует, может определять далеко не самую выгодную для всех участников задачи ситуацию (что будет продемонстрировано на разбираемом ниже примере). Поэтому, помимо этого ставшего классическим равновесия, в работе используется также система конфликтных равновесий, разработанная Э.Р. Смольяковым [27, 28]. Данная система представляет собой набор усиливающихся равновесий, самое слабое из которых существует в любой игровой задаче, удовлетворяющей допущению 1. Таким образом, для любой такой задачи можно найти наиболее сильное из существующих равновесий, что и будет являться её решением.

Ниже приводятся определения некоторых базовых равновесий данной системы.

Определение 4. Ситуацию (точку) $q^* \in G$ назовём A_i-экстремальной, если или $G\left(q^{i*}\right) = q_i^*$, или каждой стратегии $q_i \in G\left(q^{i*}\right) \setminus q_i^*$ *i*-го игрока можно поставить в соответствие по крайней мере одну ответную стратегию $\hat{q}^i = \hat{q}^i \left\langle q_i \right\rangle$ остальных $N-1$ игроков, такую, чтобы

$$J_i\left(\hat{q}^i, q_i\right) \le J_i\left(q^i\right).$$

Обозначая через A_i множество всех A_i-экстремальных ситуаций, ситуацию (точку) $q^* \in G$ назовём ситуацией симметричного слабого активного равновесия или, короче, *А*-равновесием, если $q^* \in A_1 \cap \ldots \cap A_N \overset{\Delta}{=} A$. ♦

Запись $\hat{q}^i \left\langle q_i \right\rangle$ обозначает, что остальные участники выбирают свою ответную стратегию $\hat{q}^i$ как реакцию на выбор стратегии q_i *i*-м участником в том случае, если он решит отклониться от равновесной стратегии $q_i^*\left(q_i \in G\left(q^{i*}\right) \setminus q_i^*\right)$.

Проще говоря, смысл равновесия, задаваемого определением 4, заключается в том, что если *i*-й участник пожелает отклониться от своей равновесной стратегии q_i^*, выбрав какую-то другую допустимую для него в данной игровой ситуации стратегию q_i (в погоне за более высоким значением своей платёжной функции J_i), то остальные участники могут «наказать» отступника ответной стратегией $\hat{q}^i \left\langle q_i \right\rangle$, в результате чего *i*-й участник получит не больше, чем он получил бы в равновесной игровой ситуации q^*. Поэтому ситуация q^* и называется равновесной в том смысле, что ни одному из участников не выгодно отклоняться от неё, поскольку иначе они рискуют быть «наказанными» остальными игроками.

Симметричное *А*-равновесие является самым слабым из предлагаемой к рассмотрению системы конфликтных равновесий. В работе [27] доказывается, что данное равновесие существует во всяком случае в любой ε-аппроксимации, $\forall \varepsilon > 0$, в любых игровых задачах, удовлетворяющих довольно общим допущениям 1. Поскольку при численном решении реальных задач равновесные ситуации ищутся приближённо, то для приложений неважно, окажется ли ситуация q^* точным *А*-равновесием или же равновесной с допустимой точностью ε, где ε – сколь угодно малое число. Таким образом, введение данного равновесия решает проблему существования решения игровой задачи.

Однако, как правило, *A*-равновесные ситуации оказываются не единственными. Поэтому следующие понятия определяют естественные усиления (сужения) множества *A*-равновесий.

Определение 5. Ситуацию (точку) $q^* \in A_i$ назовём B_i-экстремальной, если она удовлетворяет условию

$$\max_{q^i \in A_i(q_i^*)} J^i(q_i^*, q^i) = J^i(q^*). \tag{4}$$

Назовём ситуацию q^* $\in$-равновесием, если $q^* \in \bigcap_{i=1}^{N} B_i \stackrel{\Delta}{=} B$, где B_i – множество всех B_i-экстремальных ситуаций. ♦

Логика построения *B*-равновесия такова, что каждый из участников, отобрав для себя круг игровых ситуаций, от которых ему невыгодно отклоняться ввиду наличия угроз уменьшения выигрыша (множества A_i-равновесных ситуаций), предоставляет теперь остальным участникам возможность выбрать на этом множестве наилучшие для них игровые ситуации. Тем самым равновесная ситуация становится более устойчивой по отношению к отклонениям от неё участников задачи.

Поэтому в выражении (4) выбирается наилучшая для остальных участников ситуация в сечении множества A_i фиксированной в равновесной точке стратегией *i*-го участника q_i^*.

Равновесие, задаваемое следующим определением, является одним из возможных усилений *B*-равновесия.

Определение 6. Ситуацию (точку) $q^* \in A_i$ назовём C_i-экстремальной, если она удовлетворяет условию

$$\max_{q^i \in G(q_i^*)} J^i(q_i^*,\ q^i) = J^i(q^*). \tag{5}$$

Ситуацию $q^* \in G$ назовём *C*-равновесием, если $q^* \in \bigcap_{i=1}^{N} C_i \stackrel{\Delta}{=} C$, где C_i – множество всех C_i-экстремальных ситуаций. ♦

Отличие *B*- и *C*-равновесий заключается в том, что при поиске *B*-равновесия *i*-й участник предлагает остальным выбрать наилучшие для себя ситуации на множестве A_i-экстремальных ситуаций (максимум в выражении (4) берётся по сечению $A_i(q_i^*)$). Тогда как при поиске *C*-равновесия остальным участникам в выражении (5) предлагается выбрать наилучшую ситуацию на всём сечении игрового множества $G(q_i^*)$, что делает *C*-равновесие более устойчивым к отклонениям участников, нежели *B*-равновесие.

В играх двух лиц *C*-равновесие и равновесие по Нэшу совпадают.

Дадим ещё несколько определений, усиливающих соответственно *B*- и *C*-равновесия.

Определение 7. Ситуацию $q^* \in B_i$ назовём $\bar{D}_i$-экстремальной, если она удовлетворяет условию

$$\max_{q \in B_i} J_i(q) = J_i(q^*) \tag{6}$$

или (то же самое, только в развёрнутом виде) условию

$$\max_{q_i \in Pr_{Q_i} A_i} J_i\left(\operatorname{Arg} \max_{q^i \in A_i(q_i)} J^i(q_i, q^i)\right) = J_i(q^*)$$

и назовём её $\bar{D}$-равновесием, если $q^* \in \bigcap_{i=1}^{N} \bar{D}_i \stackrel{\Delta}{=} \bar{D}$. ♦

Данное понятие равновесия усиливает введённое выше понятие *C*-равновесия.

Смысл его заключается в том, что после того, как все участники, кроме *i*-го, отобрали для себя наиболее выгодные ситуации в сечениях множества $A_i(q_i)$, для каждой допустимой стратегии *i*-го участника (множество B_i-экстремальных ситуаций, аргумент функции J_i в выражении (6)) *i*-й участник выбирает стратегию (из проекции множества A_i на множество его допустимых стратегий Q_i – $Pr_{Q_i} A_i$), доставляющих максимум целевому функционалу J_i.

Аналогичный смысл имеет даваемое ниже определение D-экстремальных ситуаций, с той лишь разницей, что выбор *i*-м игроком производится не на множестве B_i, а на множестве C_i.

Определение 8. Ситуацию $q^* \in C_i$ назовём D_i-экстремальной, если она удовлетворяет условию

$$\max_{q \in C_i} J_i(q) = J_i(q^*),$$

и назовём её *D*-равновесием, если $q^* \in \bigcap_{i=1}^{N} D_i \stackrel{\Delta}{=} D$. ♦

В качестве примера рассмотрим использование данных равновесий для обоих классов игроков Γ и Γ^α.

4. СРАВНЕНИЕ РАЗНЫХ СИСТЕМ КОНФЛИКТНЫХ РАВНОВЕСИЙ

Отметим, что приведённый здесь принцип угроз и контругроз в разных вариациях используется и в других системах конфликтных равновесий, в частности, в концепции *равновесий в безопасных стратегиях* (РБС), предложенной и разрабатываемой М.Б. Искаковым и соавторами в работах [29, 30] и др.

Одним из ключевых понятий в этой концепции является понятие угрозы *i*-му игроку со стороны *j*-го в какой-то игровой ситуации $q \in G$.

Угрожающей называется такая ситуация $\left(q_j^{'}, q^j\right)$, что $J_j\left(q_j^{'}, q^j\right) \geq J_j(q)$, а $J_i\left(q_j^{'}, q^j\right) < J_i(q)$ [29].

Отметим два момента.

- В концепции РБС предполагается, что игроки угрожают друг другу по отдельности. То есть, например, возможность двух игроков совместно выбрать такую ситуацию, чтобы третий был «наказан», угрозой не считается. В работе [30] отмечено, что построение конструкции, аналогичной РБС для коалиционного взаимодействия, «пока представляется затруднительным». Из приведённого же здесь определении A-равновесия следует, что остальные игроки могут создавать угрозы коллективно (в виде общей стратегии $\hat{q}^i = \hat{q}^i\left\langle q_i \right\rangle$ остальных участников в ответ на стратегию q_i *i*-го участника).
- При построении A-равновесия предполагается, что игроки могут угрожать друг другу даже в ущерб себе, иначе говоря, отсутствует требование $J_j\left(q_j^{'}, q^j\right) \geq J_j(q)$, которое означает, что в угрожающей ситуации $\left(q_j^{'}, q^j\right)$ значение платёжной функции угрожающих игроков должно быть больше чем в ситуации $q \in G$, содержащей угрозу.

Отсутствие этого требования объясняется тем, что, вообще говоря, между игроками могут существовать какие-либо договорённости и скрытые коалиции, и кто-то может пожертвовать собой, закрыть, так сказать, грудью амбразуру – пойти на уменьшение собственной целевой функции, чтобы его команда в итоге победила. Но, как уже отмечалось выше, коллективное взаимодействие в РБС не рассматривается.

Ввиду перечисленных особенностей эти две системы проблематично сопоставить, поскольку, например, некая A-равновесная ситуация может содержать угрозы со стороны других игроков и поэтому не будет являться простым РБС (порядок безопасности 0 [29, 30]).

РБС же более высоких порядков может содержаться во множестве *A*-равновесных ситуаций, как, например, это имеет место быть в следующей биматричной игровой задаче из работы [30]:

$$J_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix},\ J_2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix};$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} + & + \\ + & . \end{bmatrix},\ A_2 = \begin{bmatrix} + & . \\ + & + \end{bmatrix},\ A = A_1 \cap A_2 = \begin{bmatrix} + & . \\ + & . \end{bmatrix};$$

$$B_1 = \left(a_{11}, a_{21}\right),\ B_2 = \left(a_{21}, a_{22}\right),\ B = \left\{a_{21}\right\};$$

$$C_1 = \left\{a_{11}\right\};\ C_2 = \left\{a_{21}\right\};\ C = \varnothing;$$

$$\bar{D}_1 = \left\{a_{21}\right\};\ \bar{D}_2 = \left\{a_{22}\right\};\ \bar{D} = \varnothing.$$

Таким образом, сильнейшим игровым равновесием из приведённых является $B = \left\{a_{21}\right\}$. В этой ситуации, кстати, достигается и максимум кооперативного дохода.

Простым РБС же здесь оказывается не самая выгодная для обоих участников ситуация a_{11}, однако РБС первого порядка будет уже a_{21} (см. работу [30]).

Отметим, что помимо различий, у сравниваемых систем прослеживается общий итеративный принцип построения. Например, если на начальной (нулевой) итерации мы бы не нашли ни одного равновесия более сильного, нежели равновесие *A*, то нам пришлось бы рассмотреть следующую итерацию (первую), которая отличалась бы тем, что в качестве множества допустимых игровых ситуаций мы рассматривали бы не всё множество *G*, а лишь его подмножество *A*-равновесных ситуаций. И для этой новой игровой задачи мы бы нашли соответствующие равновесия A^1, B^1, C^1, D^1. Этот процесс можно продолжать до тех пор, пока на очередном шаге не найдено достаточно сильное равновесие. Аналогично и в концепции РБС мы ищем равновесия нулевого, первого и так далее порядков.

Ещё одним примером итеративной процедуры поиска равновесной ситуации является концепция *двойного наилучшего ответа*, описываемая в работе Н.И. Базенкова [31], однако алгоритм нахождения равновесия, описанный в этой работе, останавливается после второй итерации.

В заключение заметим, что в работе [30] М.Б. Искаков, рассматривая систему конфликтных равновесий Э.Р. Смольякова, предполагает, что РБС может быть включено в эту систему как одно из равновесий среди A, B, C, D и др.

5. СУЩЕСТВОВАНИЕ КОНФЛИКТНЫХ РАВНОВЕСИЙ В КЛАССЕ Γ^α

Ещё раз приведём обозначения, введённые в допущении 1:

– суммарную платёжную функцию игроков в исходной игре *G* будем обозначать $J(q) \overset{\Delta}{=} \sum_{i=1}^{N} J_i(q) \quad q \in G$;

– суммарная платёжная функция всех игроков кроме *i*-го: $J^i(q) \overset{\Delta}{=} \sum_{k \neq i} J_k(q)$;

– функция полезности *i*-го игрока в игре Γ^α:
$U_i(q) \overset{\Delta}{=} (1-\alpha) J_i(q) + \frac{\alpha}{N-1} \sum_{\substack{k=1, \\ k \neq i}}^{N} J_k(q) \quad q \in G.$.

Определение 9. Будем говорить, что в игровой ситуации $q^* \in G$ достигается максимум суммарной платёжной функции J, если $\forall q \in G, q \neq q^*$: $J(q^*) \geq J(q)$. ♦

Исходя из допущения 1, $J_i(q)$ – непрерывные функции, определённые на G – компактном множестве, заданном в произведении $Q_1 \times \ldots \times Q_N$ метрических пространств Q_i, $i = \overline{1, N}$. Из чего можно сделать вывод, что и их сумма – суммарная платёжная функция $J(q) = \sum_{i=1}^{N} J_i(q)$ – является непрерывной функцией на множестве G.

Поскольку непрерывная функция достигает на компактном множестве своих точной верхней и нижней граней, то функция J достигает своего максимального значения на множестве G.

Сформулируем теорему существования равновесия по Нэшу в игровых задачах, удовлетворяющих допущению 1. Будем обозначать через $\Gamma^{\alpha_{NE}}$ игровые задачи типа Γ^α, в которых коэффициент α принимает значения α_{NE}.

Теорема. *Пусть в игровой задаче, удовлетворяющей допущению* 1, *в ситуации* q^* *достигается максимум суммарной платёжной функции. Тогда существует* $\alpha_{NE} \in \mathbb{R}, \alpha_{NE} \in \left[0, \frac{N-1}{N}\right]$ *такое, что:*

– в игре $\Gamma^{\alpha_{NE}}$ *ситуация* q^* *будет равновесием по Нэшу (*$\overline{C}^N$*-экстремальной),*

– $\forall \alpha \in \left[\alpha_{NE}, \frac{N-1}{N}\right]$ *в игровой задаче класса* Γ^α *ситуация* q^* *также будет равновесной по Нэшу.*

Доказательство теоремы 1 приводится в приложении. Аналогичным образом могут быть сформулированы и доказаны аналогичные теоремы существования для других введённых понятий равновесия (B, C, D).

Из сформулированной теоремы можно сделать вывод: в игровой задаче Γ^α, которая моделирует наличие элемента сотрудничества, взаимной интеграции между участниками, при определённом значении коэффициента $\alpha = \alpha_{NE}$ наиболее выгодная ситуация (т. е. та, в которой достигается максимум кооперативного дохода) становится равновесной (по Нэшу). И при всех α, больших данного значения, эта ситуация остаётся равновесием.

Понятно, что в неантогонистических играх, предполагающих возможность кооперации между участниками, стороны могут договориться о выборе соответствующих стратегий, реализующих ситуацию максимума кооперативного дохода, даже если она не является равновесием. Сказанное верно при одном условии: стороны смогут договориться о справедливом разделе кооперативного дохода, обладающем свойством устойчивости, т. е. ни один игрок не пожелает от него уклониться. К сожалению, классическая теория кооперативных игр не даёт такого решения.

Тем не менее, подходы, используемые в теории поиска справедливого дележа кооперативного дохода, могут быть применены для определения значений коэффициентов α. В работе «Справедливый делёж в кооперативных играх» [32] Э.Р. Смольяков предлагает способ раздела кооперативного дохода коалиции из N участников P_N, который достигается в некоторой игровой ситуации q^0, пропорционально значениям платёжных функций участников коалиции в точке наисильнейшего равновесия q^* (которая предполагается единственной). Основные равновесия, используемые для нахождения наисильнейшего, мы определили в предыдущем разделе. Их различные модификации определены в работе [27]. В работе [32] также приводится схема связей между равновесиями, позволяющая всегда выделить наисильнейшее равновесие из существующих в игре.

При этом раздел кооперативного дохода $J_{P_N}(q^0) = \sum_{k \in P_N} J_k(q^0)$ коалиции P_N в точке максимального дохода коалиции q^0 выглядит так: $x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_N = J_{P_N}(q^0)$, где x_i – доход *i*-го участника.

При этом $x_i = \gamma_i \cdot J_{P_N}(q^0)$, где

$$\gamma_i = \frac{J_i(q^*)}{J_{P_N}(q^*)} = \frac{J_i(q^*)}{\sum_{k \in P_N} J_k(q^*)}, \; i = 1, \; 2, \ldots, \; N. \quad (7)$$

При этом из вида выражения (7) следует, что $\sum_{k \in P_N} \gamma_k = 1$.

Для гетерогенных сообществ (т. е. тех, в которых значение коэффициента α для разных участников может отличаться) функции полезности $U_i(q)$ (2) могут быть представлены в виде

$$U_i(q) = (1-\gamma_i)J_i(q) + \\ +\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} J_k(q)\,\gamma_k,\ i=1, 2,..., N, \tag{8}$$

где значение коэффициента γ_i для каждого участника определяется согласно формуле (7) как доля значения целевой функции *i*-го участника J_i от кооперативного дохода $J(q^*) = \sum_{i=1}^{N} J_i(q^*)$, т. е. $\gamma_i = \frac{J_i(q^*)}{J(q^*)}$ в точке q^*, в которой достигается сильнейшее равновесие.

Отметим, что функции полезности в форме (2) и (8), по сути, задают правило распределения средств в рассматриваемом сообществе. Например, в работе Ф.Л. Зака «О некоторых моделях альтруистического поведения» [33] функция, подобная (8), используется для построения модели налогообложения. Если $J_i(q)$ интерпретировать как доход *i*-го участника, а γ_i – как налоговую ставку, то первое слагаемое в выражениях (8) представляет собой средства, оставшиеся у *i*-го участника после уплаты налогов.

Второе слагаемое в формуле (8) выражает размер получаемых каждым индивидуумом общественных благ, в данном случае одинаково распределённых между всеми членами сообщества. Недостатком такого вида распределения ресурсов в сообществе является то, что, как подчёркивает Ф.Л. Зак, равновесная по Нэшу ситуация оказывается неэффективной, т. е. может быть далека от ситуации, в которой достигается максимум кооперативного для всех участников дохода. Это происходит, поскольку каждый агент предполагает, что затраченные им усилия мало влияют на размер получаемых им общественных благ.

Конечно, вопрос справедливого распределения ресурсов в сообществе выходит за рамки чистой математики в область социологии, экономики и даже философии. Так, если принять во внимание тезис, предлагаемый некоторыми мыслителями, в частности, в работе [34], о том, что размер общественных благ, который причитается индивидууму, должен быть пропорционален вкладу, который данный индивидуум в эти самые общественные блага вносит, функцию $U_i(q)$ можно записать в виде

$$U_i(q) = (1-\gamma_i)J_i(q) + \\ +\gamma_i\sum_{k=1}^{N} J_k(q)\,\gamma_k,\ i=1, 2,..., N.$$

Разница с выражением (8) здесь в том, что суммарные блага $\sum_{i=1}^{N} J_i(q)\,\gamma_i$ распределяются между участниками сообщества не поровну, а пропорционально γ_i – доле вклада *i*-го участника в кооперативный доход $J(q^*)$ в точке сильнейшего равновесия.

В качестве выхода из затруднения Ф.Л. Зак предлагает рассмотреть несколько иной, отличный от нэшевского механизм определения равновесной ситуации, основанный на так называемом *кантовском равновесии*. Близкая по смыслу модель будет рассмотрена нами в следующем разделе.

6. МОДЕЛИРОВАНИЕ МОРАЛИ В СМЫСЛЕ СЛЕДОВАНИЯ ЗОЛОТОМУ ПРАВИЛУ НРАВСТВЕННОСТИ ИЛИ ИМПЕРАТИВУ КАНТА

Переходя к рассмотрению третьей модели, отметим, что у типов поведения и принятия решения, задаваемых определениями 1 и 2, есть нечто общее. Как игроки-индивидуалисты, так и игроки-коллективисты (или альтруисты, как их называют в ряде работ) несколько неразборчивы в средствах: если первые преследуют исключительно личный интерес, то вторые с некоторым весовым коэффициентом заботятся и об общественном благосостоянии. Однако, поскольку согласно допущению 1 множество возможных стратегий (действий) у всех участников одинаковое (Q), то игроки обоих классов не учитывают при выборе своей стратегии, что произойдёт в случае, если остальные участники выберут ту же стратегию. Однако такой анализ осуществляют игроки третьего класса – *homo moralis*, «человек нравственный», как он именуется в работах [11, 35].

В основе типа поведения, соответствующего данному классу, лежит известный этический принцип – категорический императив Канта: *«поступай так, чтобы максима твоей воли могла бы быть всеобщим законом»* [36]. Близкий по смыслу принцип известен в этике как золотое правило нравственности: *«Поступай с другими так, как желаешь, чтобы другие поступали с тобой»* [37].

В работах [11, 35] данный принцип предлагается моделировать следующим образом. Пусть *i*-й участник предполагает, что каждый из оставшихся игроков с вероятностью $k_i \in [0, 1]$ (которую можно воспринимать как уровень морали данного участника) выберет ту же стратегию, что и он, и с вероятностью $(1-k_i)$ – отличную стратегию. Таким образом, каждый участник, выбирая стратегию $q_i \in Q$, получает известную из теории вероятностей схему Бернулли из $N-1$ испытания (соответствующих оставшимся игрокам) и с двумя исходами для *j*-го испытания, $j = \overline{1, N-1}$: *j*-м участником выбрана стратегия $q_j = q_i$ или же выбрана другая стратегия $(q_j \neq q_i)$. При этом вместо первоначальных платёжных функций игра проводится на функциях полезности, которые для каждого игрока представляют собой математические ожидания описанного биноминального распределения.

Определение 10. Игровую задачу, удовлетворяющую допущению 1, будем называть игрой Γ^{hm} (игрой в классе участников-«моралистов»), если каждый из игроков вместо своей первоначальной платёжной функции J_i стремится обеспечить максимум функции полезности W_i, определяемой как математическое ожидание случайной величины $J_i(q_i, \tilde{q}^i)$:

$$W_i(q_i, q^i) = \mathbb{E}_{k_i}[J_i(q_i, \tilde{q}^{\,i})],\ q_i \in Q,$$

$$k_i \in \mathbb{R},\ k_i \in [0, 1],\ i = \overline{1, N}, \qquad (9)$$

где $\tilde{q}^i$ – случайный $(N-1)$-мерный вектор, принимающий значения из множества Q^{N-1} и имеющий такое распределение: с вероятностью $k_i^m (1-k_i)^{N-m-1}$ ровно $m \in \{0, \ldots, N-1\}$ из его компонент принимают значение равное q_i, а остальные компоненты сохраняют свои первоначальные значения. ♦

Отметим, что для каждого m имеется $\binom{N-1}{m} \overset{\Delta}{=} C_{N-1}^m$ способов выбрать *m* из $N-1$ компоненты q^i.

Отметим также, что при $k_i = 0$ ненулевая (а единичная, т. е. полная) вероятность будет только у одного значения случайного вектора $\tilde{q}^i = q^i$. То есть случайный вектор принимает единственное значение – то, которое стоит в аргументе функции W_i. В этом случае $W_i(q_i, q^i) \equiv J_i(q_i, q^i)$, т. е. игроки класса *homo moralis* с нулевым значением коэффициента k_i фактически являются участниками-индивидуалистами первого класса Γ. Более наглядно это будет продемонстрировано в рассматриваемой ниже модели социального выбора.

Например, для игры трёх лиц функция полезности (9) приобретает вид:

$$W_i(q_i, q_j, q_k) = (1-k_i)^2 J_i(q_i, q_j, q_k) +$$
$$+ k_i(1-k_i) J_i(q_i, q_i, q_k) +$$
$$+ k_i(1-k_i) J_i(q_i, q_j, q_i) + k_i^2 J_i(q_i, q_i, q_i).$$

Наоборот, при $k_i = 1$ данная модель принятия решения фактически будет идентичной предложенной впервые Дж. Дж. Лаффоном [38] и развитой впоследствии Дж. Рёмером [39, 40] модели *кантовского равновесия*. При кантовской оптимизации игроки спрашивают себя: «Если я отклонюсь от своей стратегии и все другие участники аналогичным образом отклонятся от своих стратегий, то предпочту ли я новое состояние?» [33].

7. СОЦИАЛЬНАЯ МОДЕЛЬ ВЫБОРА МЕЖДУ ДВУМЯ ПОВЕДЕНЧЕСКИМИ НОРМАМИ

В качестве простого примера игры на согласование рассмотрим следующую задачу. Пусть семейная пара должна принять решение, как провести вечер: пойти в гости или остаться дома. При этом значение платёжных матриц больше в диагональных элементах, которым соответствует то обстоятельство, что пара проводит вечер вместе (в гостях или дома). Таблица иллюстрирует платёжную матрицу данной задачи, где в скобках указаны значения выигрыша для каждой из сторон. Нетрудно видеть, что данная задача имеет два равновесия по Нэшу в случае, если супруги примут решения провести вечер вместе: в гостях или дома. Причём ситуация «пойти вдвоём в гости» является эффективной по Парето по отношению к ситуации «остаться вдвоём дома».

Задача «Семейный выбор»

	Пойти в гости	Остаться дома
Пойти в гости	(10, 10)	(0, 0)
Остаться дома	(0, 0)	(5, 5)

Отметим также, что игры на согласование имеют и массу экономических приложений, что показывается в работе [5].

Теперь перейдём к рассмотрению игры на согласование, описанной в работе [2] и представляющей собой социальную модель выбора в задаче со многими участниками. Пусть N участников некоторого сообщества независимо друг от друга делают выбор между двумя нормами поведения (стратегиями) A и B. Причём норма A является более эффективной, чем норма B в том смысле, что если все индивидуумы перейдут на норму A, то благосостояние (в широком смысле этого слова) каждого участника будет выше, чем в случае, когда все выбирают норму B. Однако норма B является общепринятой, поэтому в начале рассматриваемой социальной модели все участники выбирают норму B, а норма A является для них новой.

Например, нередко мы сталкиваемся с тем, что молодые люди, проходя процесс социализации, оказываясь в новых социальных группах (одноклассники, друзья, однокурсники и т. д.), перенимают от некоторых представителей этих групп не всегда полезные привычки. Но бывают и обратные примеры. Представим себе компанию знакомых, зависимых от какой-либо вредной привычки. Если кому-то из этой компании удаётся расстаться с этой привычкой, то первое время он испытывает определённый дискомфорт, поскольку становится своего рода «белой вороной». Однако постепенно примеру этого человека начинают следовать другие и, начиная с некоторой критической доли отказавшихся, уже на тех, кто подвержен вредной привычке, начинают «косо смотреть». Постепенно и в обществе в целом начинает изменяться отношение к этой вредной привычке: вводится запрет на её рекламу в СМИ, запрещается продажа несовершеннолетним и т. д. Таким образом, изменение отношения в обществе и всё усиливающиеся ограничения делают следование вредным привычкам всё более и более сложным, пока, наконец, здоровый образ жизни не становится нормой. Это, в свою очередь, приводит к уменьшению различных заболеваний, рождению более здоровых детей, укреплению генофонда – одним словом, переход на новую норму поведения оказывает весьма позитивное воздействие на развитие сообщества в целом. Можно привести массу других аналогичных примеров.

Постараемся выяснить, при каких условиях сообщество способно будет перейти с менее эффективной, старой нормы B на более эффективную новую норму A. Для этого сформулируем описанную модель в терминах игровой задачи. Сначала рассмотрим статический случай, а потом исследуем, как будет вести себя модель в динамике.

Пусть $q_i \in Q = \{0, 1\}$ – выбор i-го участника, где $q_i = 1$ означает, что выбрана норма A, а $q_i = 0$ – что выбрана норма B. Если i-й участник выбирает норму A, и n_A других участников выбирают эту же норму, то платёжная функция i-го участника принимает значение $a\, n_A$. Если же он выбирает норму B и n_B других участников поступает так же, то значение его функции полезности равно $b\, n_B$. Будем полагать, что $0 < b < a$.

В модели участников-индивидуалистов Г платёжные функции выглядят так:

$$J_i(q_i, q^i) = aq_i \sum_{\substack{j=1,\\ j\neq i}}^{N} q_j + b(1-q_j) \sum_{\substack{j=1,\\ j\neq i}}^{N} (1-q_i), \quad q_i \in Q,\ q^i \in Q^{N-1}. \tag{10}$$

Для участников-коллективистов Γ^α функция полезности принимает вид:

$$U_i(q_i, q^i) = (1-\alpha) J_i(q_i, q^i) + \frac{\alpha}{N-1} \sum_{\substack{k=1,\\ k\neq i}}^{N} J_k(q_k, q^k),\ q_i \in Q,\ q^i \in Q^{N-1}, \tag{11}$$

где J_i и J_k определяются формулой (10), $\alpha \in \left[0, \frac{N-1}{N}\right]$ – параметр, определяющий в какой степени каждый индивидуум отдаёт предпочтение общественным интересам. При $\alpha = 0$ функции (10) и (11) становятся эквивалентными: $J_i \equiv U_i$. Нетрудно видеть, что как для первого класса игроков, так и для второго вне зависимости от значения коэффициента α в задаче будут две равновесные по Нэшу ситуации: либо когда все участники выбирают норму A: $q = (1, \ldots, 1)$, либо когда все выбирают норму B: $q = (0, \ldots, 0)$.

Таким образом в случае, если норма B считается общепринятой и каждый игрок полагает, что остальные выберут именно её, а игроков достаточно много и прямая договорённость (кооперация) между ними невозможна, то для участников, преследующих исключительно личные интересы, норма B продолжит оставаться равновесием, поскольку, решив выбрать норму A в одиночку, игрок ничего не получит.

Аналогичная ситуация сложится и в классе игроков Γ^α, учитывающих интересы других. Даже при наибольшем значении коэффициента α, когда $U_i(q) = \frac{1}{N} J(q) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} J_k$, т. е. функция полезности, которую максимизирует каждый игрок, прямо пропорциональна суммарной платёжной функции, ни один из игроков не пожелает отклониться от менее эффективной нормы B, поскольку сообщество в целом от перехода одного участника на норму A получит меньше.

Таким образом, в обоих классах норма *B* продолжит оставаться равновесием, т. е. сообщество в целом не сможет перейти на новую норму.

Однако ситуация в корне меняется для третьего класса игроков – *homo moralis*. Функции полезности, максимум которым стремятся доставить игроки данного класса, в соответствии с определением 3 имеют вид математического ожидания:

$$W_i(q) = \mathbb{E}_{k_i}\,[J_i(q_i,\ \tilde{q}^i)],$$

где $\tilde{q}^i$ – случайный вектор, распределение которого таково, что с вероятностью $k_i^m(1-k_i)^{N-m-1}$ ровно $m \in \{0,\ldots,N-1\}$ из его компонент принимают значение, равное q_i, а остальные компоненты сохраняют свои первоначальные значения. Это распределение похоже на широко известное из теории вероятностей биноминальное распределение $B_{k_i}^{N-1}$, однако отличается от него тем условием, что $(N-m-1)$ компонент должны сохранить свои первоначальные значения (т. е. значения в точке $q \in G$, в которой определяется значение функции $W_i(q)$).

Таким образом, значение функции $W_i(q_i, q^i)$ определяется выражением

$$W_i(q_i, q^i) = \sum_{m=0}^{N-1}\binom{N-1}{m}k_i^m(1-k_i)^{N-m-1}\times$$
$$\times[\overbrace{aq_i\ (mq_i + \frac{N-1-m}{N-1}\sum_{\substack{j=1,\\ j\neq i}}^{N}q_j)}^{\mathrm{I}} +$$
$$\underbrace{+b(1-q_i)(m(1-q_j) + \frac{N-1-m}{N-1}\sum_{\substack{j=1,\\ j\neq i}}^{N}(1-q_j))}_{\mathrm{II}}], \quad (12)$$

где выражение I отвечает случаю, когда $q_i = 1$, а II – случаю, когда $q_i = 0$. Слагаемые с коэффициентом $\frac{N-1-m}{N-1}$ отражают положение о том, что остальные игроки, кроме тех m, стратегии которых считаются равными q_i, сохраняют свои первоначальные стратегии.

Нетрудно убедиться, что при $k_i = 0$ формулы (10) и (12) становятся тождественны, что ещё раз наглядно демонстрирует уже отмечавшуюся нами особенность: при $k_i = 0$ $W_i(q_i, q^i) \equiv J_I(q_i, q^i)$, т. е. участники *homo moralis* с нулевым значением коэффициента k_i становятся игроками-индивидуалистами.

Если все игроки выбирают стратегию *A*, то *i*-й участник получает $(n-1)a$, также выбирая стратегию *A*, а в случае, если он решает выбрать стратегию *B*, его функция полезности равна

$$W_i(0,\ q^i = (1,\ldots,1)) = \\ = \sum_{m=0}^{N-1}\binom{N-1}{m}k_i^m(1-k_i)^{N-m-1}m. \quad (13)$$

Упростим выражение (13). Так как при $m = 0$ соответствующий член ряда также равен нулю, то суммирование можно производить начиная с $m = 1$.

Выражение (13) можно переписать в виде

$$W_i(0,\ q^i = (1,\ldots,1)) = b(n-1)k_i.$$

Если же все игроки выбирают стратегию *B*, то поступая как все, *i*-й участник получает $W_i(0,\ldots,\ 0) = (N-1)b$, а выбирая в одиночку стратегию *A*, он получает

$$W_i(1,\ q^i = (0,\ldots,0)) = \sum_{m=0}^{N-1}\binom{N-1}{m}k_i^m \times \\ \times(1-k_i)^{N-m-1}m = a(n-1)k_i.$$

Таким образом, при $k_i > \frac{b}{a}$ оказывается, что $W_i(1,\ q^i = (0,\ldots,0)) > W_i(0,\ldots,0)$, т. е. игрок с достаточно высоким значением коэффициента k_i готов перейти на более эффективную норму *A* даже в одиночестве. А в гомогенном (однородном) сообществе, где у всех участников одинаковое значение коэффициента $k_i > \frac{b}{a}$, ситуация $q = (1,\ldots,1)$, т. е. когда все участники выбирают норму A, оказывается единственным равновесием по Нэшу.

Однако более реалистичным является так называемый гетерогенный (неоднородный) случай, когда коэффициенты k_i у разных представителей рассматриваемого сообщества могут разниться.

8. ПОРОГОВЫЕ ЗНАЧЕНИЯ В МОДЕЛИ НЕОДНОРОДНЫХ СООБЩЕСТВ

Чтобы исследовать такие неоднородные сообщества, введём понятие *порогового значения*. Под пороговым значением θ_i *i*-го участника будем понимать наименьшую долю от общего количества других участников сообщества, перешедших на норму A, необходимую для того, чтобы i-й участник также сделал выбор в пользу нормы A. Например, i-й участник переходит на норму A, если он полагает, что её выберет половина сообщества, а j-й – если треть. Тогда $\theta_i = \frac{1}{2}$, а $\theta_j = \frac{1}{3}$.

Отметим, что впервые концепция пороговых значений для описания динамики принятия решений в больших сообществах появилась в работах американского социолога М. Грановеттера [41] и Т. Шеллинга [3], однако эта концепция нашла многих сторонников и получила существенное развитие в работах современных исследователей. В частности, отметим работы В.В. Бреера [42–44], посвящённые исследованию так называемого *конформного поведения* – поведения, основанного на следовании устоявшимся социальным нормам.

Определить пороговое значение для каждого номера можно исходя из следующих соображений. Пусть i-й участник предполагает, что $i \in \{1, N\}$ $\tilde{n} \in \{0, \ldots, N-1\}$ других участников выберут норму A. Тогда его функция полезности в случае выбора B примет вид:

$$W_i(0, q^i) = b\sum_{m=0}^{N-1}\binom{N-1}{m}k_i^m(1-k_i)^{N-1-m} \times$$
$$\times[\frac{N-1-m}{N-1}(N-\tilde{n}-1)+m] =$$
$$= b\,[(N-\tilde{n}-1)+\tilde{n}k_i]\,.$$

Если при тех же условиях i-й участник выбирает норму A, то он получает

$$W_i(1,\, q^i) =$$
$$= b\sum_{m=0}^{N-1}\binom{N-1}{m}k_i^m(1-k_i)^{N-1-m}[\frac{N-1-m}{N-1}\,\tilde{n}+m] =$$
$$= a\,[(1-k_i)\tilde{n}+(N-1)k_i] = a\,[\tilde{n}+(N-\tilde{n}-1)k_i].$$

Таким образом, i-й участник сделает выбор в пользу нормы A, если $W_i(1,\, q^i) > W_i(0,\, q^i)$: $a\,[\tilde{n}+(N-\tilde{n}-1)k_i] \geq b\,[(N-\tilde{n}-1)+\tilde{n}k_i]$. Это условие равносильно следующему:

$$\frac{\tilde{n}}{N-1} \geq \frac{b-k_i a}{(a+b)(1-k_i)} \stackrel{\Delta}{=} \theta_i\,,$$

где θ_i – пороговое значение – минимальная доля выбравших норму A участников от общего количества, при которой i-й участник также готов сделать выбор в пользу нормы A. Отметим, что при $k_i > \dfrac{b}{a}$ пороговое значение θ_i будет отрицательным, что можно трактовать таким образом, что при достаточно большом значении коэффициента k_i (определяющего уровень морали, как он интерпретируется в работе [2]) i-й участник готов перейти на новую норму даже в одиночестве.

Отметим также, что у игроков с самым низким допустимым значением коэффициента $k_i = 0$ пороговое значение $\theta_i = \dfrac{b}{a+b}$. То есть если доля перешедших на норму A представителей сообщества превышает эту отметку, то даже игроки-индивидуалисты переходят на норму A.

Чтобы смоделировать неоднородность сообщества относительно коэффициента k_i и соответствующего ему порогового значения θ_i каждого индивидуума, рассмотрим функцию распределения $F(x): \mathbb{R} \to [0, 1]$, значения которой равны доле от общего количества тех представителей сообщества, пороговое значение θ_i которых не превосходит x.

Если пороговое значение θ у некоторого представителя сообщества представить в качестве случайной величины, принимающей значения на интервале $(-\infty, \dfrac{b}{a+b}]$, то функцию $F(x)$ можно понимать также как функцию распределения данной случайной величины: $F(x) = P(\theta < x)$, где P – соответствующая вероятность, равная доле от общего количества тех представителей сообщества, пороговое значение θ которых не превосходит значения x.

Для численного определения параметров распределения порогового значения, в соответствии с которым представители сообщества готовы перейти на новую норму поведения, может пригодиться опыт специального раздела статистических исследований – моральной статистики.

Моральная статистика охватывает широкий круг проблем, связанных как с негативными явлениями в обществе, такими как различного рода преступления и нарушения общественного порядка, а также нарушения морально-этических норм, так и с позитивными, которые характеризуют моральный облик людей. К таким явлениям относятся участие граждан в общественных организациях по охране окружающей среды, бескорыстное донорство, участие в различного рода спасательных службах и т. д. [45].

Например, если допустить, что на некотором предприятии или в вузе происходит регулярный добровольный сбор донорской крови, то у каждого сотрудника предприятия или учащегося есть две стратегии: участвовать в сборе (норма A) или нет (норма B). Поскольку чувство морального удовлетворения, которое испытывает человек, участвующий в таких мероприятиях, трудно формализовать, определить численные значения коэффициентов a и b не представляется возможным. Однако численные значения пороговых значений перехода от нормы A к норме B вполне поддаются численному определению.

Для этой цели можно провести социологическое исследование среди пришедших сдавать кровь, в результате которого выяснить у участников, какое количество их знакомых участвовало в сдаче крови прежде, чем они сами решились на такой поступок. Это позволит определить пороговое значение для каждого участника.

Конечно, конкретный вид функции распределения будет отличаться от задачи к задаче. Однако в связи с тем, что рассматриваемая социальная модель предполагает достаточно большое количество участников, для дальнейших рассуждений в качестве вида функции $F(x)$ порогового значения можно выбрать функцию нормального распределения (Гаусса) с математическим ожиданием μ и дисперсией σ^2, где μ и σ – параметры, характеризующие сообщество: $F(x) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-(u-\mu)^2/(2\sigma^2)} du$ (рис. 1).

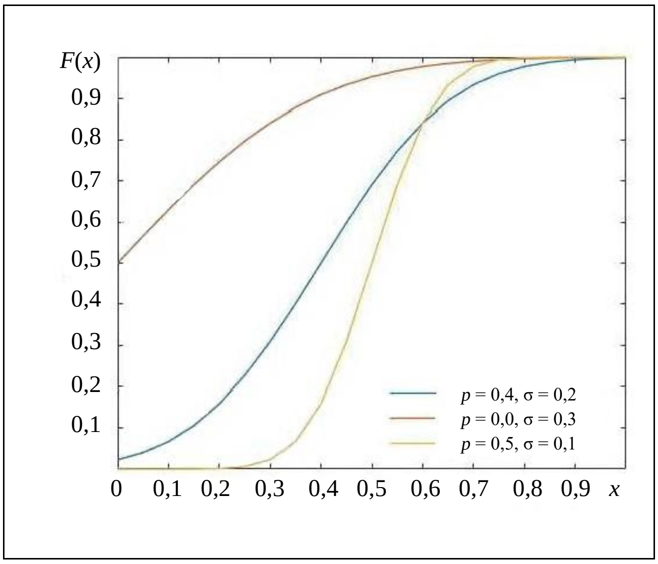

Рис. 1. График функции распределения $F(x)$ порогового значения θ_i

Однако отметим, что в литературе имеются примеры использования и других функций распределения пороговых значений. В частности, в работе [44] предлагается использовать β-распределение.

В рассмотренном примере со сдачей крови среднее значение пороговых значений для всех опрошенных участников позволит определить математическое ожидание, а средний квадрат отклонений от математического ожидания – дисперсию.

Графики распределения при разных значениях параметров μ и σ представлены на рис. 2. Отметим, что $F(x) = 1$ при $x \geq \dfrac{b}{a+b}$.

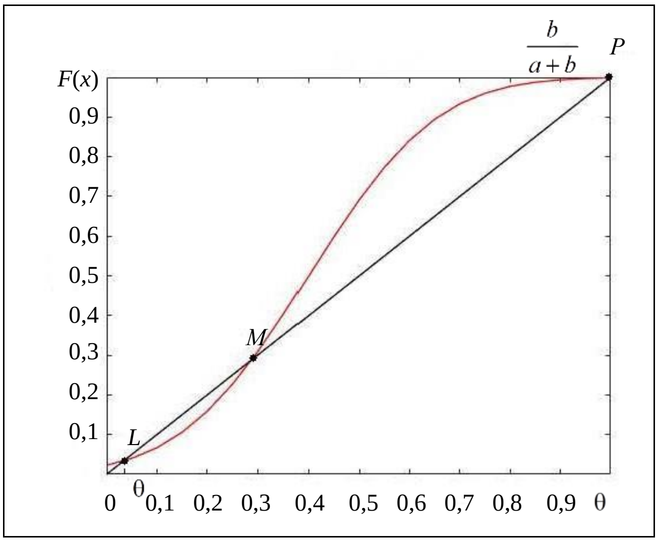

Рис. 2. График функции распределения пороговых значений с отмеченными точками состояний равновесия

Нормальное распределение использовано здесь лишь в качестве некоторого приближения, поскольку в реальности при анализе социальных процессов следует учитывать человеческий фактор ввиду способности людей к самоорганизации и наличия у них памяти.

В ряде классических работ (например, Ф. Блэкмена [46], Л. Берталанфи [47]) для описания функции распределения вероятности смены состояния в социальных системах используется логистическая модель и, соответственно, сигмоидальная (S-образная) функция, что вполне подходит для наших дальнейших рассуждений.

В работах же ряда современных авторов (Д.О. Жуков, Т.Ю. Хватова и др. [48, 49]) исследуется стохастическая динамика в социальных системах на основе клеточного автомата с учётом наличия у представителей системы памяти, т. е. зависимости состояния, в котором находится каждый индивидуум, от его же состояния в предшествующие моменты времени. Данная модель позволяет, задав некоторые начальные параметры системы (например, количество контактов между представителями сообщества), построить функцию распределения пороговых значений, необходимых для перехода сообщества в целом от одного состояния к другому.

Теперь проанализируем, как будет протекать процесс перехода между нормами *A* и *B* в динамике.

9. СОЦИАЛЬНАЯ МОДЕЛЬ В ДИНАМИКЕ

Будем рассматривать динамику перехода представителей сообщества между нормами *A* и *B* на некотором временном промежутке $[t_0, T]$. Вначале рассмотрим модель с неким дискретным шагом Δt, а затем устремим Δt к нулю. Пусть $N_A(t)$ – количество представителей сообщества, выбирающих норму *A* в момент времени t. По условию задачи $N_A(t_0) = 0$.

Тогда $\dfrac{N_A(t)}{N-1}$ задаёт долю перешедших на норму *A* в момент t. А в соответствии с определением функции $F(x)$, $F\left(\dfrac{N_A(t)}{N-1}\right)$ есть доля от общего количества индивидуумов, пороговое значение у которых не превосходит $\dfrac{N_A(t)}{N-1}$. Поэтому количество перешедших на норму A в некий следующий момент времени определяется отношением $N_A(t+\Delta t) = F\left(\dfrac{N_A(t)}{N-1}\right)N$. Если полагать, что сообщество достаточно большое, то $N-1 \approx N$. Обозначив через $x(t) \overset{\Delta}{=} \dfrac{N_A(t)}{N}$ долю перешедших на норму A участников в момент времени t, получим соотношение

$$x(t+\Delta t) = F(x(t)) \qquad (14)$$

или

$$x(t+\Delta t) - x(t) = F(x(t)) - x(t).$$

Из последнего выражения следует, что если $F(x) > x$, то $x(t)$ и, соответственно, $N_A(t)$ возрастают по времени, а если $F(x) < x$, то убывают. Если же в равенстве (14) устремить Δt к нулю, то получим условие равновесия $x(t) = F(x(t))$, при котором количество индивидуумов, перешедших на норму *A*, стабилизируется. Состояниям равновесия соответствуют неподвижные точки отображения *F*, однако эти состояния могут быть как устойчивы, так и неустойчивы. Чтобы проиллюстрировать этот факт, обратимся к примеру.

10. УСТОЙЧИВОСТЬ СОСТОЯНИЙ РАВНОВЕСИЯ

Рассмотрим сообщество, которому соответствует функция распределения $F(x)$ порогового значения θ, график которой представлен на рис. 2. Сначала рассмотрим модель с дискретным временем. По условию задачи $N_A(t_0) = 0$. Первыми на норму A перейдут индивидуумы с отрицательным значением пороговой величины, поэтому $N_A(\Delta t) = F(0)\cdot N$. В следующий момент перейдут те, чьё пороговое значение не превышает долю участников, выбравших *A* в предыдущий момент времени. То есть $N_A(2\cdot\Delta t) = F\left(\dfrac{N_A(\Delta t)}{N}\right) = F(F(0))$ и т. д. Устремив Δt к нулю, получим процесс, непрерывный по времени.

Функция *F*, изображённая на рис. 2, имеет три неподвижные точки и соответствующие им состояния равновесия: точку L вблизи нуля, точку M и точку P вблизи единицы.

При этом точки L и P обладают свойством устойчивости: если доля перешедших на норму A индивидуумов подходит близко к пороговому значению θ_L или θ_P, то она будет колебаться вблизи этих значений. Действительно, как показано выше, при $x < \theta_L$ $F(x) > x$, поэтому количество $N_A(t)$ будет увеличиваться. И наоборот, $N_A(t)$ будет уменьшаться при $x > \theta_L$.

Равновесная точка *M* же является неустойчивой: если доля перешедших на норму A превышает θ_M на сколь угодно малую величину, то $F(x) > x$, $N_A(t)$ будет возрастать, пока доля выбравших *A* не стабилизируется, достигнув ближайшей устойчивой равновесной точки $\theta_P = 1$, что будет соответствовать тому, что сообщество в целом перешло на норму *A*. И наоборот, если доля $x(t) = \dfrac{N_A(t)}{N}$ сколь угодно меньше порогового значения θ_M, то она продолжит уменьшаться пока не стабилизируется вблизи порогового значения θ_L, т. е. сообщество «скатится» обратно к неэффективной норме B. Более подробно теория устойчивости неподвижных точек применительно к ряду экономических, социальных и биологических процессов рассматривается в работе [50].

Отметим, что для непрерывной функции распределения неподвижные точки, в которых достигается равновесие, будут точками изменения состояния выпуклости и вогнутости функции. Если в неподвижной точке функция вогнута слева, то точка устойчива, если же выпукла, то неустойчива.

Поскольку $F(x)=1$ при $x>\frac{b}{a+b}$, то функция $F(x)$ будет выпуклой при $x\to 1-0$. Поэтому точка $x=1$, соответствующая тому, что всё сообщество перешло на новую норму *A*, всегда будет устойчивой. Но если функция распределения *F* такова, что существует неподвижная точка, являющаяся устойчивым равновесием, со значением меньшим единицы, то сообщество никогда полностью не перейдёт на более эффективную норму, «застряв» в окрестности ближайшей к нулю точки устойчивого равновесия, если не предположить, что в обществе проводится некоторая просветительская (образовательная) деятельность, в результате которой повышается уровень морали в обществе и соответственно общество в целом способно перейти на более совершенную норму поведения. Более подробно наличие элементов обучения в модели социального выбора и то, как изменяется в этом случае вид графика функции распределения вероятностей и, соответственно, положение точек равновесия на этом графике, рассматривается в работе [53, с.78–80].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотренная здесь модель поведения индивидуумов, следующих принципу морали в смысле императива Канта, разработанная и представленная в ряде работ (например, [11, 51]) И. Элджер и Й. Вибулом, показывает существенное отличие между поведением индивидуумов, которых мы обозначили *homo moralis*, и традиционно рассматриваемых в работах по теории игр *homo economicus*.

В качестве другой встречающейся в литературе модели можно рассмотреть модель коллективизма или альтруизма, которая предполагает учёт каждым участником с некоторым весовым коэффициентом интересов других участников. В ряде исследований (к примеру, в работах [9, 11]) коллективизм моделируется таким образом, что, например, в задаче с двумя участниками каждый стремится обеспечить максимум не своей первоначальной платёжной функции $J_i(q)$, но специальной функции полезности $U_i(q)=(1-\alpha)J_i(q)+aJ^i(q)$, $\alpha\in[0,1]$, или, как она была обобщена для произвольного количества участников *N* в работе [52], $U_i(q)=(1-\alpha)J_i(q)+\frac{\alpha}{N}\sum_{k=1}^{N}J_k(q), \alpha\in[0,1]$. Частным случаем такой функции полезности при $\alpha=1$ можно считать предложенную Дж. Херсаньи [5] функцию $U_i(q)=\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}J_k(q)$.

Существенное отличие *homo moralis* от так называемых индивидуалистов (*homo economicus*) и даже альтруистов заключается в том, что если первые (*homo moralis*), оценивая преимущества, открывающиеся в случае, если все представители сообщества перейдут на новую норму поведения, способны стать своего рода катализаторами процесса, первопроходцами, то ни участники-индивидуалисты, ни так называемые альтруисты на это оказываются не способны.

Данная особенность позволяет говорить о наличии некоторой эволюционной устойчивости для такой модели поведения, что, оказывается, можно косвенно подтвердить и методами эволюционной теории игр. Как уже было сказано, в этой теории принято рассматривать повторяющиеся игры и исследовать каждую из стратегий поведения на успех не в одной конкретной игровой ситуации, но в долгосрочной перспективе, на основе длительной череды игровых ситуаций.

Например, особую модель альтруистического поведения исследовали на эволюционную устойчивость с помощью бесконечно повторяющейся дилеммы заключённого авторы работы [54].

Напомним, что суть дилеммы сводится к тому, что два игрока стоят перед выбором: сотрудничать или предать товарища. В случае, если оба игрока выбирают сотрудничество, они оказываются в плюсе. Но при этом каждый из них испытывает соблазн обмануть, поскольку, если обман удастся, обманувший получит даже больше, чем при обоюдном решении сотрудничать, а вот обманутый терпит убытки. Если же оба игрока, поддавшись соблазну, решают обмануть друг друга, то они становятся наказаны собственной алчностью, получив наименее благоприятную в игре игровую ситуацию.

Нетривиальным результатом, к которому пришли авторы работы [54], стало то, что альтруизм будет эволюционно более устойчивым (то есть суммарное значение функции полезности по итогам многих повторений дилеммы будет выше) только в том случае, если члены сообщества будут хотя бы приблизительно представлять предпочтения друг друга. Иначе, например, случайно попавший в общество альтруистов эгоист будет иметь существенные преимущества, поскольку будет пользоваться хорошим расположением окружающих, пока характер его поведения не будет раскрыт. Именно этим обстоятельством авторы объясняют то, что альтруизм, или просоциальное поведение, как правило, возникает между родственниками, друзьями, коллегами – одним словом, людьми, которые знают что-то друг о друге.

Тем не менее, исходя из рассмотренных выше рассуждений об устойчивости равновесий в гетерогенных (разнородных) сообществах, можно сделать вывод, что в естественных условиях новая, более прогрессивная модель поведения может никогда не стать общепринятой нормой. В таком случае общество может навсегда «застрять» на старой, менее эффективной модели поведения, если не будут приняты некоторые дополнительные меры, способствующие подъёму уровня морали (роста коэффициента k_i в нашей модели). К таким мерам может относиться, в частности, просветительская, воспитательная работа.

Однако отметим, что недостатком рассмотренной модели является то, что используемые в ней параметры (например, коэффициенты k_i) являются трудноформализуемыми, что затрудняет их численное определение, необходимое для практического применения.

Вместе с тем применение различных статистических методов [45] позволит решить данную проблему, что, в свою очередь, позволит использовать представленную здесь теоретическую основу, например, для оценки эффективности проводимых на государственном уровне мероприятий в сфере образования и воспитания молодёжи.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы. Согласно определению 3, ситуация q^* будет равновесной по Нэшу, если выполняется соотношение

$$U_i\left(q^*\right) \geq U_i\left(q^{i*}, q_i\right), \ \forall q_i \in G\left(q^{i*}\right), \ i = \overline{1, N}, \qquad (\text{П}1)$$

где $q^{i*} \overset{\Delta}{=} \left(q_1^*, \ldots, q_{i-1}^*, q_{i+1}^*, \ldots, q_N^*\right)$ – вектор стратегий всех игроков, кроме i-го, образующих ситуацию q^*. Воспользовавшись определением платёжной функции (2), неравенство (П1) можно переписать в виде:

$$\begin{gathered}(1-\alpha) J_i\left(q^*\right) + \frac{\alpha}{N-1} J^i\left(q^*\right) \geq (1-\alpha) J_i\left(q^{i*}, q_i\right) + \\ + \frac{\alpha}{N-1} J^i\left(q^{i*}, q_i\right), \ \forall q_i \in G\left(q^{i*}\right), \ i = \overline{1, N}.\end{gathered} \qquad (\text{П}2)$$

Воспользуемся заменой $\beta \overset{\Delta}{=} \alpha \dfrac{N}{N-1}$. Тогда платёжную функцию $U_i(q)$ можно записать в эквивалентной форме: $U_i(q) = (1-\beta) J_i(q) + \dfrac{\beta}{N} J(q), \beta \in [0,1]$.

А неравенство (П2) примет вид:

$$\begin{gathered}(1-\beta)\left(J_i\left(q^*\right) - J_i\left(q^{*i}, q_i\right)\right) + \frac{\beta}{N}\left(J\left(q^*\right) - J\left(q^{*i}, q_i\right)\right) \geq 0, \\ \forall q_i \in G\left(q^{i*}\right), \ i = \overline{1, N}.\end{gathered} \qquad (\text{П}3)$$

Выражение слева в неравенстве (П3) задаёт при $\beta \in [0, 1]$ отрезок на действительной прямой между точками:

$$\begin{gathered}Q\left(q_i\right) \overset{\Delta}{=} J_i\left(q^*\right) - J_i\left(q^{*i}, q_i\right), \\ P\left(q_i\right) \overset{\Delta}{=} \frac{1}{N}\left(J\left(q^*\right) - J\left(q^{*i}, q_i\right)\right).\end{gathered} \qquad (\text{П}4)$$

Значение $P(q_i) \geq 0$, так как в точке q^* достигается максимум $J(q)$ при $q \in G$, поэтому $\forall q_i \in G(qi^*)$ либо отрезок между точками $Q(q_i)$ и $P(q_i)$ лежит справа от нуля, если $Q(q_i) > 0$, либо ноль лежит внутри отрезка $\left[Q(q_i), P(q_i)\right]$, если $Q(q_i) < 0$, либо совпадает с одной из его границ, если $Q(q_i) = 0$ или $P(q_i) = 0$, либо совпадает с обеими границами, если $P(q_i) \equiv Q(q_i) = 0$ (в этом случае отрезок становится точкой). Иначе говоря, найдётся значение $\beta_{NE}^i \langle q_i \rangle \in \mathbb{R}, \beta_{NE}^i \in [0, 1]$ такое, что $\forall \beta \in \left[\beta_{NE}^i, 1\right]$ справедливо неравенство (П4).

Поскольку мы можем каждому $q_i \in G(qi^*)$ поставить в соответствие значение $\beta_{NE}^i \langle q_i \rangle \in [0,1]$, то таким образом мы можем задать ограниченную функцию $\beta_{NE}^i(q_i) \leq 1, \forall q_i \in G(qi^*)$:

$$\beta_{NE}^i\left(q_i\right) \overset{\Delta}{=} \begin{cases} \dfrac{-Q\left(q_i\right)}{P\left(q_i\right) - Q\left(q_i\right)}, \text{ если } Q\left(q_i\right) < 0, \\ 0, \text{ если } Q\left(q_i\right) \geq 0. \end{cases}$$

Пусть $\beta_{NE}^i \overset{\Delta}{=} \sup\limits_{q_i \in G\left(q^{*i}\right)} \beta_{NE}^i\left(q_i\right)$. Поскольку $\beta_{NE}^i\left(q_i\right) \leq 1$, то $\beta_{NE}^i \leq 1$.

Введём $\beta_{NE} \overset{\Delta}{=} \max\limits_{i=1,N} \beta_{NE}^i$. Поскольку $\beta_{NE}^i \leq 1$, то и $\beta_{NE} \leq 1$ и $\forall \beta \in [\beta_{NE}, 1]$ точка q^* будет равновесием по Нэшу в игровой задаче с функциями полезности $U_i(q)$, определёнными по форме (2), где $\beta = \beta_{NE}$.

Возвращаясь, наконец, к исходным обозначениям параметров $\alpha_{NE} = \dfrac{N-1}{N}\beta_{NE}$, мы получили значение α_{NE} такое, что $\forall \alpha \in \left[\alpha_{NE}, \dfrac{N-1}{N}\right]$ ситуация q^* будет равновесием по Нэшу в игре $\Gamma^{\alpha_{NE}}$.

Тем самым оба утверждения теоремы доказаны. ♦

ЛИТЕРАТУРА

1. *Микушина Т.Н., Скуратовская М.Л.* Проблема нравственности и глобальный кризис общества // Материалы II международной научно-практической конференции “Мир на

пороге новой эры. Как это будет?”. – Саратов, 2014. – С. 74–79. [*Mikushina, T.N., Skuratovskaya, M.L.* Problema nravstvenno-sti i globalnyiy krizis obschestva // Materialyi II mezhdunarodnoy nauchno-prakticheskoy konferentsii “Mir na poroge novoy eryi. Kak eto budet?”. – Saratov, 2014. – S. 74–79. (In Russian)]
2. *Smith, A.* An Inquiry into the Nature and Causes of the Wealth of Nations. – Oxford, UK: Oxford University Press, 1776.
3. *Smith, A.* The Theory of Moral Sentiments. – Oxford, UK: Oxford University Press, 1759.
4. *Braithwaite, R.B.* Theory of Games as a Tool for the Moral Philosopher. An Inaugural Lecture Delivered in Cambridge on 2 December 1954. – Cambridge, UK: Cambridge University Press, 1955.
5. *Harsanyi, J.C.* Chapter 19 Game and decision theoretic models in ethics // Handbook of Game Theory with Economic Applications. – Amsterdam: Elsevier, 1992. – Vol. 1. – P. 669–707.
6. *Harsanyi, J.C.* Rule utilitarianism and decision theory // Erkenntnis. – 1977. – Vol. 11. – P. 25–53.
7. *Гусейнов А.А.* История этических учений. М.: Академический проект; Трикста, 2015. – С. 716–724. [*Guseynov, A.A.* Istoriya eticheskih ucheniy. M.: Akademicheskiy proekt; Triksta, 2015. – S. 716–724. (In Russian)]
8. *Льюис Р.Д., Райфа Х.* Игры и решения. – М.: Издательство иностранной литературы, 1961. – С. 33–67. [*Lyuis, R.D., Rayfa, H.* Igryi i resheniya. – M.: Izdatelstvo inostrannoy literaturyi, 1961. – S. 33–67. (In Russian)]
9. *Kranz, S.* Moral norms in a partly compliant society // Games and Economic Behavior. – Academic Press, 2010. – Vol. 68, no. 1. – P. 255–274.
10. *Alfano, M., Rusch, H., Uhl, M.* Ethics, Morality, and Game Theory // Games. – 2018. – Vol. 9. – P. 1–4.
11. *Alger, I., Weibull, J.W.* Strategic Behavior of Moralists and Altruists // Games. – 2017. – Vol. 8. – P. 1–21.
12. *Smith, J.M.* Evolution and the Theory of Games. – Cambridge: Cambridge University Press, 1982.
13. *Newton, J.* Evolutionary game theory: A renaissance // Games. – 2018. – Vol. 9. – P. 1–67.
14. *Brams, S.J.* Game theory and the humanities : bridging two worlds. – London: The MIT Press, 2011.
15. *Гермейер Ю.Б., Ватель И.А.* Игры с иерархическим вектором интересов // Известия АН СССР. Техническая кибернетика. – 1974. – № 3. – С. 54–69. [*Germeyer, Yu.B., Vatel, I.A.* Igryi s ierarhicheskim vekto-rom interesov // Izvestiya AN SSSR. Tehnicheskaya kibernetika. – 1974. – No. 3. – S. 54–69. (In Russian)]
16. *Горбанева О.И., Угольницкий Г.А.* Цена анархии и механизмы управления в моделях согласования общественных и частных интересов // Математическая Теория Игр и её Приложения. – 2015. – Т. 7, № 1. – С. 50–73. [*Gorbaneva, O.I., Ougolnitsky, G.A.* Price of Anarchy and Control Mechanisms in Models of Concordance of Public and Private Interests // Matematicheskaya Teoriya Igr i Ee Prilozheniya. – 2015. – Vol. 7, no. 1. – P. 50–73. (In Russian)]
17. *Горбанева О.И.* Модели сочетания общих и частных интересов независимых агентов // Математическая Теория Игр и её Приложения. – 2018. – Т. 10, № 4. – С. 3–15. [*Gorbaneva, O.I.* Models of social and private interests combining with independed agents // Matematicheskaya Teoriya Igr i Ee Prilozheniya. – 2018. – Vol. 10, no. 4. – P. 3–15. (In Russian)]
18. *Лефевр В.А.* Алгебра совести / пер. с англ. – М.: “Когнито-Центр,” 2003. – 426 с. [*Lefevr, V.A.* Algebra sovesti / per. s angl. – M.: “Kognito Centr”, 2003. – 426 s. (In Russan)]
19. *Гусейнов А.А., Жуковский В.И., Кудрявцев К.Н.* Математические основы Золотого правила нравственности: Теория нового альтруистического равновесия в противоположность “эгоистическому” равновесию по Нэшу. – М.: ЛЕНАНД, 2016. – 280 с. [*Gusejnov, A.A., Zhukovskij, V.I., Kudryavcev, K.N.* Matematiche-skie osnovy Zolotogo pravila nravstvennosti: Teoriya novo-go al'truisticheskogo ravnovesiya v protivopolozhnost' “egoisticheskomu” ravnovesiyu po Neshu. – M.: LENAND, 2016. – 280 s. (In Russian)]
20. *Зак Ф.Л.* О некоторых моделях альтруистического поведения // Журнал Новой экономической ассоциации. – 2021. – Т. 42, № 1. – С. 12–52. [*Zak, F.L.* Central Economics and Mathematics Institute, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia On some models of altruistic behavior // Journal of the New Economic Association. – 2021. – Vol. 42, no. 1. – P. 12–52.]
21. *Зак Ф.Л.* Психологические игры в теории выбора. II. Стыд, сожаление, эгоизм и альтруизм // Журнал Новой экономической ассоциации. – 2014. – Т. 22, № 2. – С. 12–40. [*Zak, F.L.* Central Economics Mathematical Institute of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia Psychological Games in the Theory of Choice. II. Shame, Regret, Egoism and Altruism // Journal of the New Economic Association. – 2014. – Vol. 22, no. 2. – P. 12–40. (In Russian)]
22. *Saito, K.* Impure Altruism and Impure Selfishness // J. Econ. Theory. – 2015. – Vol. 158. – P. 336–370.
23. *Гусейнов А.А.* «Золотое правило» нравственности // Вестник Московского университета. Философия. – 1972. – Т. 4. – С. 53–63. [*Gusejnov, A.A.* «Zolotoe pravilo» nravstvennosti // Vestnik Moskovskogo universiteta. Filosofiya. – 1972. – Vol. 4. – P. 53–63. (In Russian)]
24. *Бурков В.Н., Еналеев А.К., Коргин Н.А.* Согласованность и неманипулируемость механизмов организационного управления: текущее состояние проблемы, ретроспектива, перспективы развития теоретических исследований // Автоматика и телемеханика. – 2021. – № 7. – С. 5–37. [*Burkov, V.N., Enaleev, A.K., Korgin, N.A.* Incentive compatibility and strategy-proofness of mechanisms of organizational behavior control: retrospective, state of the art, and prospects of theoretical research // Automation and Remote Control. – 2021. – Vol. 82, no. 7. – P. 1119–1143.]
25. *Леонтьев С.В., Новиков Д.А., Петраков С.Н.* Критериальное и мотивационное управление в активных системах // Автоматика и телемеханика. – 2002. – № 7. – С. 107–116. [*Leont'ev, S.V., Novikov, D.A., Petrakov, S.N.* Control in Active Systems Based on Criteria and Motivation // Automation and Remote Control. – 2002. – Vol. 63, no. 7. – P. 1137–1145.]
26. *Бурков В.Н., Новиков Д.А.* Механизмы критериального управления активными системами в задачах стимулирования // Сборник трудов ИПУ РАН. – 2000. – С. 76–85. [*Burkov, V.N., Novikov, D.A.* Mekhanizmy kriterial'nogo upravleniya aktivnymi sistemami v zadachah stimulirovaniya // Sbornik trudov IPU RAN. – 2000. – S. 76–85. (In Russian)]
27. *Смольяков Э.Р.* Методы решения конфликтных задач: Учебное пособие. – М.: МГУ, 2010. – 244 с. [*Smol'yakov, E.R.* Metody resheniya konfliktnyh zadach: Uchebnoe posobie. – M.: MGU, 2010. 244 s. (In Russian)]
28. *Смольяков Э.Р.* Теория конфликтных равновесий. – М.: Эдиториал УРСС, 2005. [*Smol'yakov, E.R.* Teoriya konfliktnyh ravnovesij. – M.: Editorial URSS, 2005. (In Russian)]
29. *Искаков М.Б.* Равновесие в безопасных стратегиях // Автоматика и телемеханика. – 2005. – № 3. – С. 139–153. [*Iskakov, M.B.* Equilibrium in safe strategies // Automation and Remote Control. – 2005. – Vol. 66, no. 3. – P. 465–478.]
30. *Искаков М.Б.* Равновесие в безопасных стратегиях и равновесия в угрозах и контругрозах в некооперативных играх // Автоматика и телемеханика. – 2008. – № 2. – С

114–134. [*Iskakov, M.B.* Equilibrium in safety strategies and equilibriums in objections and counterobjections in noncooperative games // Automation and Remote Control. – 2008. – Vol. 69, no. 2. – P. 278–298.]
31. *Базенков Н.И.* Динамика двойных наилучших ответов в игре формирования топологии беспроводной ad hoc сети // Управление большими системами. – 2013. – № 43. – С. 217–239. [*Bazenkov, N.I.* Double best response dynamics in topology formation game for ad hoc networks // Large-Scale Systems Control. – 2013. – Vol. 43. – P. 217–239. (In Russian)]
32. *Смольяков Э.Р.* Справедливый делёж в кооперативных играх // Доклады Академии Наук. – 2008. – Т. 418, № 2. – С. 176–180. [*Smol'yakov, E.R.* Spravedlivyj delyozh v kooperativnyh igrah // Doklady Akademii Nauk. – 2008. – Vol. 418, no. 2. – S. 176–180. (In Russian)]
33. *Зак Ф.Л.* О некоторых моделях альтруистического поведения // Журнал Новой экономической ассоциации. – 2021. – Т. 1, № 49. – С. 12–52. [*Zak, F.L.* Central Economics and Mathematics Institute, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia On some models of altruistic behavior // Journal of the New Economic Association. – 2021. – Vol. 1, no. 49. – P. 12–52. (In Russian)]
34. *Микушина Т.Н., Ильина Е.Ю.* О России. – Омск: ИД “СириуС”, 2021. – 60 с [*Mikushina, T.N., Il'ina, E.Yu*. O Rossii. – Omsk: ID “SiriuS,” 2021. – 60 s. (In Russian)]
35. *Sarkisian, R.* Team Incentives under Moral and Altruistic Preferences: Which Team to Choose? // Games. – 2017. – Vol. 8. – P. 1–24.
36. *Кант И.* Основы метафизики нравственности. Сочинения в шести томах. – М.: «Мысль». – 1963–1966. – С. 211–310. [*Kant, I.* Osnovy metafiziki nravstvennosti. Sochineniya v shesti tomah. – M.: «Mysl'». – 1963–1966. – S. 211–310. (In Russian)]
37. *Галицкая З.И., Ильина Е.Ю., Марченко О.В., Павлова Г.Л.* Нравственность – сила нации. Учебное пособие. – Омск: Фонд “ЗаНравственность!”. – 212 с. [*Galickaya, Z.I., Il'ina, E.Yu., Marchenko O.V., Pavlova G.L.* Nravstvennost' – sila nacii. Uchebnoe posobie. – Omsk: Fond “ZaNravstvennost'!”. – 212 s. (In Russian)]
38. *Laffont, J.-J.* Macroeconomic Constraints, Economic Efficiency and Ethics: An Introduction to Kantian Economics // Economica. – 1975. – Vol. 42, no. 168. – P. 430–437.
39. *Roemer, J.* How We Cooperate: A Theory of Kantian Optimization. – New Haven, CT: Yale University Press, 2019.
40. *Roemer, J.* Kantian Optimization: A Microfoundation for Cooperation // Journal of Public Economics. – 2014. – Vol. 127. – P. 45–57.
41. *Granovetter, M., Soong, R.* Threshold models of interpersonal effects in consumer demand // Journal of Economic Behavior & Organization. – 1986. – Vol. 7, no. 1. – P. 83–99.
42. *Бреер В.В., Новиков Д.А., Рогаткин А.Д.* Модели порогового коллективного поведения в задачах управления эколого-экономическими системами // Управление большими системами. – 2015. – № 55. – С. 35–54. [*Breer, V.V., Novikov, D.A., Rogatkin, A.D.* Models of collective threshold behavior in control problems of ecological-economic systems // Large-Scale Systems Control. – 2015. – No. 55. – P. 35–54. (In Russian)]
43. *Бреер В.В.* Теоретико-игровые модели бинарного коллективного поведения // Математическая теория игр и ее приложения. – 2020. – Т. 12, № 2. – С. 3–19. [*Breer, V.V.* Game-theory models of binary collective behavior // Matematicheskaya teoriya igr i ee prilozheniya. . – 2020. – Vol. 12, no. 2. – P. 3–19. (In Russian)]
44. *Бреер В.В.* Модели толерантного порогового поведения (от Т. Шеллинга к М. Грановеттеру) // Проблемы управления. – 2016. – № 1. – С. 11–20. [*Breer, V.V.* Models of Tolerant Threshold Behavior (From T. Shelling to M. Granovetter) // Control Sciences. – 2016. – No. 1. – P. 11–20. (In Russian)
45. *Соболевская М.К., Стрекалова С.А.* Анализ показателей моральной статистики России за 2000–2015 гг. // Молодой ученый. – 2016. – № 20 (124). – С. 419–421. [*Sobolevskaya, M.K., Strekalova, S.A.* Analiz pokazatelej moral'noj statistiki Rossii za 2000–2015 gg. // Molodoj uchenyj. – 2016. – No. 20 (124). – P. 419–421. (In Russian)]
46. *Blackman, F.F.* Optima and limiting factors // Annals of Botany. Oxford Academic. – 1905. – Vol. os-19, no 2. – P. 281–296.
47. *Bertalanffy, L. von, Woodger, J.H.* Modern Theories of Development. – London: Humphrey Milford, 1938.
48. *Istratov, L.A., Smychkova, A.G., Zhukov, D.O.* Modeling group behavior based on stochastic cellular automata with memory and systems of differential kinetic equations with delay // Vestnik Tomskogo Gosudarstvennogo Universiteta. – Upravlenie, Vychislitel’naya Tekhnika i Informatika. – 2020. – No. 51. – P. 45–54.
49. *Zhukov, D., Khvatova, T.Yu., Zaltcman, A.D.* Modelling the stochastic dynamics of transitions between states in social systems incorporating self-organization and memory // Technological Forecasting and Social Change. – 2020. – Vol. 158. – P. 120–134.
50. *McLennan, A.* The Index +1 Principle. – Queensland, Australia: University of Queensland, 2016.
51. *Alger, I., Weibull, J.* Homo Moralis-Preference Evolution Under Incomplete Information and Assortative Matching // Econometrica. – 2013. – Vol. 81, no. 6. – P. 2269–2302.
52. *Красников К.Е.* Моделирование социально-этических принципов в терминах игровых задач // Экономика вчера, сегодня, завтра. – 2020. – Т. 10. – № 2а. – С. 221–237. [*Krasnikov, K.E.* Modeling of social and ethical principles in terms of game tasks // Economics: Yesterday, Today and Tomorrow. – 2020. – Vol. 10, is. 2A. – P. 224–240 (In Russian)]
53. *Красников К.Е.* Математическое моделирование некоторых социальных процессов с помощью теоретико-игровых подходов и принятие на их основе управленческих решений // Российский технологический журнал. – 2021 – Т. 9. – № 5 – С. 67–83. https://doi.org/10.32362/2500-316X-2021-9-5-67-83 [*Krasnikov, K.E.* Mathematical modeling of some social processes using game-theoretic approaches and making managerial decisions based on them // Russian Technological Journal. – 2021. – Vol. 9, no. 5. – P. 67–83. https://doi.org/10.32362/2500-316X-2021-9-5-67–83 (In Russian)]
54. *Bester, H., Güth, W.* Is altruism evolutionarily stable? // J. Econ. Behav. Organ. – 1998. – Vol. 34, no. 2. – P. 193–209.

Статья представлена к публикации членом редколлегии чл.-корр. Д.А. Новиковым.

Поступила в редакцию 21.06.2021,
после доработки 13.01.2022.
Принята к публикации 13.01.2022.

Красников Кирилл Евгеньевич – ассистент, Московский институт радиотехники электроники и автоматики (РТУ МИРЭА), г. Москва, ✉ krasnikovkirill@yandex.ru.

SOME SOCIAL AND ETHICAL NORMS OF BEHAVIOR: MATHEMATICAL MODELING USING GAME-THEORETIC APPROACHES

K.E. Krasnikov

Russian Technological University (MIREA), Moscow, Russia

✉ krasnikovkirill@yandex.ru

Abstract. This paper overviews game-theoretic approaches to model the impact of prevailing behavioral norms (selfishness and altruism, morality on the example of Kant's imperative or the Golden Rule of ethics) on the development of some community. In addition, we study the effectiveness of the community depending on the prevailing worldview of its representatives. The equilibrium of the maximum cooperative income is investigated for communities whose representatives observe, to some extent, public interests rather than personal ones. The effectiveness of communities whose representatives follow Kant's imperative or the Golden Rule of ethics is considered using a game-theoretic model of social choice between two norms of behavior: one generally accepted but obsolete, and another new, not yet widespread, but advanced and progressive. The results can be used to assess the effectiveness of ongoing pedagogical work and state planning in the areas of upbringing and education.

Keywords*:* game theory, conflict equilibria, modeling of social and ethical norms of behavior.