УДК 519.876.2

УПРАВЛЕНИЕ РАВНОВЕСНЫМИ СОСТОЯНИЯМИ БИЛИНЕЙНЫХ НОРМИРОВАННЫХ МОДЕЛЕЙ

Е.К. Корноушенко

Рассмотрен класс так называемых билинейных нормированных моделей (БНМ), состояния которых и внешние воздействия определены в кубе $[0, 1]^n$, а допустимые управления — в кубе $[-1, 1]^p$, $p < n$. В предположении, что совокупности управлений и внешних воздействий на БНМ являются константными векторами, а БНМ — асимптотически устойчива, решается задача поиска управлений, переводящих БНМ в какое-либо равновесное состояние, «достаточно близкое» к наперед заданному состоянию. Представлены процедуры обеспечения условий, достаточных для решения указанной задачи и гарантирующих корректность интерпретации процессов в БНМ в терминах качественных шкал [0, 1] и [−1, 1]. Приведен пример, иллюстрирующий все этапы решения исходной задачи управления.

Ключевые слова: билинейная нормированная модель, асимптотическая устойчивость, управляемое равновесное состояние, допустимое управление.

ВВЕДЕНИЕ

При разработке интеллектуальных систем управления широко используются графовые модели как средство наглядного отображения структуры информационных потоков в исследуемой системе [1]. При исследовании динамики графовой модели каждой переменной модели сопоставляется уравнение, описывающее в функциональной форме зависимость значений данной переменной от значений переменных, непосредственно влияющих на данную переменную. В литературе большое внимание по понятным причинам уделяется линейным графовым моделям. Подчеркивается необходимость обращения к более сложным моделям, разработки методологии использования таких моделей в практических ситуациях [1].

При моделировании разнообразных практических ситуаций (экономических, политических и др.) приходится учитывать тот факт, что некоторые переменные могут входить в модель лишь как мультипликаторы при других переменных (к таким мультипликаторам относятся удельные цены (товаров, услуг и т. п.), всевозможные ставки налогов, пошлин и т. д.). Учет подобных мультипликаторов в модели приводит к тому, что в уравнения модели начинают входить билинейные члены, что сразу же ограничивает возможность применения линейных методов при анализе такой модели.

Предмет настоящего рассмотрения — качественные билинейные нормированные модели (БНМ), функционирующие в дискретном времени, причем значения координат состояния БНМ определены в качественной непрерывной шкале [0, 1]. Некоторые (или все) уравнения БНМ содержат билинейные члены в виде произведений мультипликаторов на координаты состояния БНМ, эти мультипликаторы рассматриваются как управления, с помощью которых можно изменять динамику БНМ. Рассмотрение ограничено выбором константных управлений, значения которых лежат в интервале [−1, 1]. Основная задача настоящей работы состоит в том, чтобы для асимптотически устойчивой БНМ, определенной в кубе $[0, 1]^n$, найти константные управления, переводящие БНМ из произвольного начального состояния в какое-либо равновесное состояние, «достаточно близкое» (разъяснение этого термина см. далее в § 2) к наперед заданному состоянию (не обязательно равновесному). Сформулированы достаточные условия, при которых эта задача имеет решение, предложена процедура нахождения искомого управления.

В общем случае анализ управляемости (равновесных) состояний билинейной системы представляет собой довольно сложную математическую задачу. Так, в работе [2] проведен детальный анализ особых множеств лишь для двумерной билинейной модели и показано, что даже в этом случае особые множества могут иметь весьма сложную форму. Возможность получения результатов, представленных в настоящей работе, обусловлена рядом существенных упрощений: введением дискретного времени, константностью управлений, наложением достаточных условий, гарантирующих асимптотическую устойчивость БНМ.

1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим БНМ, функционирующую в безразмерном дискретном времени и определяемую в матричной форме как

$$X(t + 1) = AX(t) + B(U)X(t) + W, \quad t \in J_+. \quad (1)$$

Здесь t — моменты дискретного времени, принадлежащие множеству J_+ неотрицательных целых чисел, состояния $X(t)$ для любого $t \in J_+$ принадлежат положительному единичному кубу $K = [0, 1]^n$, A — $(n \times n)$-матрица коэффициентов при линейных членах БНМ, $U_K = [-1, 1]^p$ — множество p-векторов $U = (u_1, ..., u_p)$ константных управлений, $u_k \in [-1, 1]$, $k = 1, ..., p$, $p < n$. Запись $B(U)$ означает, что элементами $(n \times n)$-матрицы B являются те или иные управления u_i, являющиеся координатами вектора U и стоящие (с соответствующими коэффициентами) при тех или иных координатах вектора состояния X. Структура матрицы $B(U)$ определяется конкретным видом модели (1). Координаты вектора W интерпретируются как независимые внешние воздействия на БНМ, также определенные в интервале [0, 1], внешние воздействия считаются неизменными на рассматриваемом интервале моделирования. При переходе к другому интервалу моделирования (например, при моделировании какого-либо сценария развития ситуации) вектор W заменяется на константный вектор W', соответствующий другому интервалу моделирования и т. д.

Замечание 1. Далее считаем, что каждое управление $u_i \in U$ может входить не более одного раза в каждое из уравнений БНМ и каждое из уравнений БНМ содержит не менее одного управления. ♦

Для каждого состояния $X(0) \in K$, каждого константного вектора управлений $U \in U_K$ и вектора внешних воздействий W обозначим через $x(\cdot, X(0), U, W)$ траекторию БНМ с начальным состоянием $X(0)$ и заданными векторами U и W. Для БНМ каждая траектория определяется однозначно на J_+ для каждого $t \in J_+$, при этом $X(t, X(0), U, W)$ непрерывно зависит от $X(0)$, U и W. При существовании предела $\lim\limits_{t \to \infty} X(t, X(0), U, W)$ предельная точка $X^*(U, W)$ называется *управляемым равновесным состоянием* (РС)[1], соответствующим векторам U и W.

Наложим очень важное ограничение на БНМ. Будем считать, что для любого константного вектора $U \in U_K$ справедливо:

$$\|A + B(U)\| < 1, \quad (2)$$

где $\|A + B(U)\|$ — евклидова норма матрицы $A + B(U)$. Из неравенства (2) следует, что БНМ в этом случае асимптотически устойчива (а. у.), т. е. всякая траектория БНМ стремится к соответствующему РС. Для обеспечения условия (2) может потребоваться дополнительная процедура стабилизации БНМ, рассматриваемая в § 3.

Следующая проблема вытекает из того факта, что даже при выполнении условия (2) множество управляемых РС может выходить за границы куба K. Достаточным условием принадлежности всех траекторий БНМ к кубу K служит выполнение следующих покоординатных соотношений:

$$A_iX(t) + B(U)_iX(t) + W_i \in [0, 1],$$
$$i = 1,..., n, \quad t \in J_+, \quad X(t) \in K, \quad U \in U_K, \quad (3)$$

для каждого i, где индекс i при матрице обозначает i-ю строку этой матрицы. В § 4 показано, что для обеспечения условий (3) необходимо в общем случае введение соответствующих ограничений на величину допустимого интервала значений для каждого из управлений. В силу этого исходный куб управлений U_K «сжимается» до параллелепипеда $U_B = [u_k^{\min}, u_k^{\max}]^p$. С множеством U_B, которое назовем *множеством допустимых управлений*, ассоциируется *множество* $X_{упр}$ (U_B, W) *управляемых РС*, определяемое как множество предельных точек $X^*(U, W)$ траекторий $X(t, X(0), U, W)$, $X(0) \in K$, $U \in U_B$ при фиксированном векторе W. Множество $X_{упр}$ (U_B, W) может иметь весьма сложную форму (как минимум, не быть выпуклым множеством), его оценка даже для БНМ небольшой размерности может представлять довольно трудоемкую задачу.

Замечание 2. Обеспечение «вложимости» траекторий БНМ в куб K необходимо в целях корректной интерпретации процессов в БНМ в терминах качественных шкал [0, 1] для значений координат состояний БНМ и [−1, 1] для значений управлений.

[1] Далее везде звездочка при векторе состояния будет обозначать РС.

2. ФОРМУЛИРОВКА И РЕШЕНИЕ ИСХОДНОЙ ЗАДАЧИ УПРАВЛЕНИЯ

Будем считать, что для исходной БНМ выполняются условия (2) и (3), т. е. исходная БНМ а. у., и ее траектории при начальных состояниях из куба K полностью принадлежат кубу K при допустимых управлениях из множества $U_B = U_K = [-1, 1]^p$. Нетрудно привести примеры таких БНМ. Поскольку при фиксированных константных векторах $U \in U_B$ и W динамика БНМ описывается уравнением

$$X(t+1) = (A + B(U))^{t+1}X(0) + \\ + \left(I + \sum_{s=1}^{t} (A + B(U))^s\right) W, \qquad (4)$$

где I — единичная ($n \times n$)-матрица, то в силу условия (2) первое слагаемое в правой части соотношения (4) стремится к нулю с возрастанием t, а РС в данном случае определяется формулой

$$X^*(U, W) = \left(I + \sum_{t=1}^{\infty} (A + B(U))^t\right) W, \qquad (5)$$

и матричный ряд по степеням матрицы $A + B(U)$ — сходящийся. В случае, когда

$$\det(I - (A + B(U)) \neq 0, \qquad (6)$$

РС $X^*(U, W)$ может быть найдено из условия $X^*(U, W) = (A + B(U))X^*(U, W) + W$, откуда

$$X^*(U, W) = (I - (A + B(U))^{-1}W. \qquad (7)$$

При выполнении условия (2) матрица $(I - (A + B(U))^{-1}$ в формуле (7) является сходящимся рядом. Важно подчеркнуть, что координаты вектора U, входящие в эту формулу существенно нелинейным образом (в виде отрезков степенных рядов), принадлежат некоторому p-мерному многообразию в кубе K. Какие-либо конструктивные утверждения о структуре множества $X_{упр}(W)$ требуют отдельного рассмотрения (см., в частности, замечания в конце настоящего параграфа).

Воспользуемся следующей грубой оценкой множества $X_{упр}(U_B, W)$. Обозначим через vert(U_B) множество вершин параллелепипеда U_B, а через $\{X^*(U_v)\}$ — множество управляемых РС, соответствующих вершинам $U_v \in$ vert(U_B) и, естественно, принадлежащих множеству $X_{упр}(U_B, W)$. Обозначим через X_B интервальный вектор (брус), описанный вокруг множества $\{X^*(U_v)\}$, рассматриваемого как многогранник. Сложности с оценкой множества $X_{упр}(U_B, W)$ возникают, в частности, в силу того, что в общем случае многогранник $\{X^*(U_v)\}$ может быть криволинейным, при этом элементы его граней могут выходить за границы множества X_B.

Формальная постановка решаемой в данной работе задачи выглядит следующим образом. Пусть $X' \in X_B$ — некоторое заданное состояние (не обязательно равновесное). Необходимо определить вектор $U(X') \in U_B$ константных управлений, переводящий БНМ из произвольного начального состояния внутри бруса X_B в РС[2] X^*, «достаточно близкое[3]» к состоянию X', и оценить степень близости состояния X^* к состоянию X'.

Для решения этой задачи вначале предположим, что задаваемое состояние X' само является равновесным, тогда справедливо предположить, что

$$(A + B(U))\, X' = X' - W. \qquad (8)$$

В соотношениях (8) неизвестны лишь значения «точечных» константных управлений из множества U_B, образующих искомый вектор U. Перенося все известные слагаемые в правую часть, получаем переопределенную систему из n линейных уравнений относительно p управлений:

$$GU^T = H, \qquad (9)$$

в которой допустимое решение U^* должно принадлежать множеству U_B. Это требование реализуется наложением p соответствующих двусторонних ограничений на значения координат u_k искомого вектора U:

$$u_k \geq -1, \quad u_k \leqslant 1, \quad k = 1, ..., p. \qquad (10)$$

Для простоты ограничимся случаем, когда (n, p)-матрица G ($p < n$) в выражении (8) имеет полный ранг[4], т. е.

$$\mathrm{rank}(G) = p. \qquad (11)$$

Решение задачи (9), (10) находится с помощью обыкновенного метода наименьших квадратов (МНК) с учетом ограничений. Из условия (11) следует единственность МНК-решения U^*, определяющего РС $X^*(U^*)$. В силу ограничений (10)

---

[2] В силу сказанного ранее, искомое РС X^* может не принадлежать брусу X_B.

[3] Не зная границ множества $X_{упр}(U_B, W)$, говорить о РС, ближайшем к состоянию X', некорректно; в этом случае термин «достаточная близость» означает тот факт, что порядки покоординатных разностей между X' и X^* меньше порядка тех значащих цифр, которые учитываются при моделировании в указанных качественных шкалах.

[4] Это условие всегда можно обеспечить незначительной коррекцией координат заданного состояния X'.

вектор U^* является допустимым управлением, так что РС $X^*(U^*) \in K$. При выполнении для вектора U^* условия (6) искомое РС $X^*(U^*)$ вычисляется по формуле (7), а близость решения $X^*(U^*)$ к X' связывается с порядком покоординатных разностей между X' и $X^*(U^*)$ (см. предыдущую сноску). Описанный подход к решению исходной задачи можно назвать *МНК-подходом*. Практическая пригодность этой задачи зависит от размеров множества $X_{\text{упр}}$ в кубе K, что определяется свойствами самой БНМ, и от размеров бруса X_B.

Расширение МНК-подхода на поиск допустимых управлений путем учета нелинейных вхождений управлений u_k в выражение (5) и применения алгоритмов нелинейной оптимизации вряд ли возможно для практических значений n и p (по крайней мере, такая задача составляет предмет отдельного рассмотрения). Кроме того, с учетом сказанного ранее о сложности формы множества $X_{\text{упр}}$, можно предположить, что плотность распределения управляемых РС может оказаться разной в разных областях множества $X_{\text{упр}}$. В такой ситуации невозможно предложить какие-либо априорные оценки для координат разностей $X' - X^*(U^*)$, связав их с координатами задаваемого состояния X'. С другой стороны, учитывая качественный характер рассматриваемой БНМ, высокая точность решения $X^*(U^*)$ может и не потребоваться, поскольку при качественном рассмотрении ситуаций важно правильно управлять тенденциями протекающих процессов. В этом плане предложенный подход может быть практически перспективен.

3. ФОРМАЛЬНАЯ ПРОЦЕДУРА СТАБИЛИЗАЦИИ БНМ

Суть стабилизации состоит в том, чтобы, не изменяя структуры исходных уравнений БНМ, уменьшить (но не обнулить) количественные значения коэффициентов (но не управлений) при координатах состояния в этих уравнениях. Рассмотрим два варианта стабилизации БНМ: путем нормировки столбцов матрицы $A + B(U)$ и путем умножения этой матрицы на стабилизирующий множитель.

Вариант А. Стабилизация путем нормировки столбцов матрицы $A + B(U)$. Обозначим через f_k правые части уравнений (1). Поскольку каждая из функций f_k непрерывна по переменным состояния, рассмотрим якобиан $J(X) = \left\{\dfrac{\partial f_k}{\partial x_i}\right\}_{i,\, k\, =\, 1,\, \dots,\, n}$, вычисляемый в некоторой точке $X \in K$ и зависящий от управлений u_s как от параметров. Заменим все элементы каждой строки в нем их абсолютными значениями и положим $u_s = 1$, $s = 1, \dots, p$, результирующую неотрицательную матрицу обозначим как M_J. Нормируем матрицу M_J, для чего элементы k-го столбца в матрице M_J делим на соответствующий нормирующий множитель N_k. $k = 1, \dots, n$, определяемый как сумма элементов этого столбца плюс некоторая константа $\alpha > 0$ (о которой см. далее). В итоге для результирующей матрицы $M_{J,\,N} = M_JD$, где D — диагональная матрица с элементами $1/N_k$ на главной диагонали, обеспечивается условие $\|M_{J,N}\| < 1$. Обозначим $A' + B'(U) = (A + B(U))D$, при этом для любого $U \in U_K \|A' + B'(U)\| < 1$.

Назовем БНМ с матрицами A' и $B'(U)$ *стабилизированной*. Для удобства переменные состояния в стабилизированной БНМ обозначим как z_k, причем значения переменных z_k по-прежнему принадлежат интервалу [0, 1], а управлений — интервалу [−1, 1]. Достоинство данного варианта заключается в его «щадящем» характере: нормирующие множители для столбцов матрицы M_J выбираются независимо, и их значения зависят от суммы модулей элементов соответствующего столбца.

Вариант Б. Стабилизация путем умножения матрицы $A + B(U)$ на стабилизирующий множитель. Это частный случай варианта А, когда $D = k_{stab}I$, где, как и ранее, I — единичная $(n \times n)$-матрица. Его достоинство состоит в пропорциональности евклидовых норм матриц M_J и M_JD:

$$\|M_{J,\,N}\| = k_{stab}\|M_J\|. \tag{12}$$

Отсюда получаем простое правило выбора значения k_{stab}: значение нормы матрицы $M_{J,\,N}$ выбирается с учетом длины интервала моделирования, наблюдаемых скоростей сходимостей процессов в БНМ к равновесным значениям и т. д. Для выбранного значения $\|M_{J,\,N}\|$ значение k_{stab} определяется из соотношения (12), причем

$$A' + B'(U) = k_{stab}(A + B(U)). \tag{13}$$

Важное свойство данного варианта стабилизации заключается в пропорциональности собственных значений матриц $A' + B'(U)$ и $A + B(U)$: $\lambda'_i = k_{stab}\lambda_i$, $i = 1, \dots, n$. Это говорит о том, что апериодические и колебательные составляющие в динамике исходной БНМ сохраняются и в стабилизированной БНМ. Более того, из соотношений (5) и (13) следует, что для любого конечного T между элементами матричного ряда $\sum\limits_{t=1}^{T} (A + B(U))^t$ исходной БНМ и элементами матричного ряда

$\sum_{t=1}^{T}(A' + B'(U))^t$ стабилизированной БНМ существует зависимость

$$(A' + B'(U))^t = k_{stab}^t (A + B(U))^t, \quad \forall t \in J_+, \quad t > 0. \tag{14}$$

Поскольку на конечном интервале моделирования длины T динамика исходной БНМ описывается уравнением (4), то при условии, что траектории исходной и стабилизированной БНМ начинаются из нулевого состояния $X(0) = 0$, между элементами этих траекторий существует взаимосвязь вида (14).

Замечание 3. При выполнении условия (6) асимптотическая оценка для любого управляемого РС стабилизированной БНМ находится с помощью формулы (7), в которой матрицы A и $B(U)$ заменены на матрицы A' и $B'(U)$. Выбор константы α в варианте А стабилизации БНМ либо значения k_{stab} в варианте Б определяется эмпирически путем анализа скорости сходимости элементов матричного ряда $\sum_{t=1}^{\infty}(A'' + B''(U))^t$ к предельным значениям. Условием выбора этих параметров служит выполнение неравенства

$$\sum_{t=|T|+1}^{\infty}(A' + B'(U))^t \leqslant \|\beta\|,$$

где $|T|$ — наименьшая длина используемых интервалов моделирования, а $\|\beta\|$ — евклидова норма допустимой накапливаемой ошибки из-за обрезания матричного ряда на уровне $|T|$. ♦

Наличие линейных членов и аддитивных добавок w_i в уравнениях стабилизированной БНМ может привести к тому, что при использовании интервала $[-1, 1]$ для значений управлений возможен выход некоторых из управляемых РС из куба K. Чтобы устранить подобные ситуации, допустимые интервалы для значений управлений необходимо сузить до некоторых пределов, что и описывается далее.

4. ВЛОЖЕНИЕ ТРАЕКТОРИЙ СТАБИЛИЗИРОВАННОЙ БНМ В КУБ *K*

Рассмотрим два варианта сужения интервалов допустимых управлений.

Вариант 1. Пусть каждое управление u_k в стабилизированной БНМ может принимать константные значения из интервала $[u_k^-, u_k^+]$, где $0 \geqslant u_k^- \geqslant -1$, $0 \leqslant u_k^+ \leqslant 1$ — неизвестные значения. Обозначим через $\bar{X}^i$ интервальный вектор, координаты которого, соответствующие переменным состояний, входящих в i-е уравнение БНМ, заменены интервалами $[0, 1]$. Аналогично, пусть, $\bar{U}^i$ — интервальный вектор, в котором каждое управление u_k, входящее в i-е уравнение БНМ, заменено интервалами $[u_k^-, u_k^+]$, а w_i — исходное «точечное» значение. Найдем наименьшее ($f_i^-(\bar{X}^i, \bar{U}^i, w_i)$) и наибольшее ($f_i^+(\bar{X}^i, \bar{U}^i, w_i)$) значения интервальной функции $\bar{f}_i(\bar{X}^i, \bar{U}^i, w_i)$, $i = 1, ..., n$ по правилам интервальной арифметики[5]. При этом каждое из условий вида (3) трансформируется в два линейных неравенства вида:

$$f_i^-(\bar{X}^i, \bar{U}^i, w_i) \geqslant 0, \; u_k^-, u_k^+ \in U^i, \quad i = 1, ..., n, \tag{15}$$

$$f_i^+(\bar{X}^i, \bar{U}^i, w_i) \leqslant 1, \; u_k^+, u_k^- \in U^i, \quad i = 1, ..., n. \tag{16}$$

Подчеркнем, что эти условия формируются с учетом ограничений

$$0 \geqslant u_k^+ \geqslant -1, \quad 0 \leqslant u_k^- \leqslant 1, \quad k = 1, ..., p,$$

поэтому достаточно проверить лишь совместность совокупности неравенств (15), (16). Если система неравенств (15), (16) совместна, ее решение определяет p-мерный параллелепипед $U_B = [u_k^{*-}, u_k^{*+}]^p$ в кубе K с длинами сторон $[u_k^{*-}, u_k^{*+}]$, $k = 1, ..., p$, содержащий нулевой вектор управлений $U = 0$. Этот факт является недостатком варианта 1 в силу его неприменимости в ряде ситуаций. Так, если в матрице A_i отсутствуют положительные элементы, а сумма Sa_i^- абсолютных значений отрицательных элементов i-й строки матрицы A_i меньше w_i, для вектора $U = 0$ невозможно выполнение условия (15). Аналогично, если в матрице A_i отсутствуют отрицательные элементы, а сумма Sa_i^+ положительных элементов i-й строки матрицы A_i больше $1 - w_i$, для вектора $U = 0$ невозможно выполнение условия (16). Вариант 2 свободен от подобных недостатков.

Вариант 2. Будем считать, что каждое управление u_k может принимать константные значения из интервала $[u_k^{\min}, u_k^{\max}]$, где $u_k^{\min} \geqslant -1$, $u_k^{\max} \leqslant 1$ — неизвестные значения (т. е. в отличие от варианта 1 интервалы $[u_k^{\min}, u_k^{\max}]$ могут быть знакоопреде-

[5] Другими словами, для каждого из $2n$ интервальных уравнений, реализующих соответствующее условие (3), найдем границы *объединенного множества решений* (см., например, работу [3]).

ленными). При этом система неравенств (15), (16) трансформируется в систему

$$f_t^-(\bar{X}^i,\ \bar{U}^i,\ w_i) \geqslant 0,$$
$$u_k^{\min},\ u_k^{\max} \in U^i, \quad i = 1, ..., n, \tag{17}$$
$$f_t^+(\bar{X}^i,\ \bar{U}^i,\ w_i) \leqslant 1,$$
$$u_k^{\max},\ u_k^{\min} \in U^i, \quad i = 1,..., n, \tag{18}$$
$$u_k^{\min} \geqslant -1, \quad u_k^{\max} \leqslant 1, \quad k = 1, ..., p,$$
$$u_k^{\max} - u_k^{\min} \geqslant 0, \quad k = 1, ..., p.$$

Поскольку, по аналогии с вариантом 1, неравенства (17), (18) формируются с учетом соответствующих ограничений на значения $u_k^{\min}$, $u_k^{\max}$, на совместность достаточно проверить систему неравенств (17), (18). Для такой проверки удобен критерий С.Н. Черникова (см. работу [4], теорему 1.5). В Приложении на конкретном примере показано применение этого критерия. Искомые значения $u_k^{\min}$, $u_k^{\max}$, $k = 1, ..., p$, находятся с помощью обыкновенного МНК.

Таким образом, в результате выполнения описанных этапов исходная БНМ трансформируется в стабилизированную БНМ с множеством U_B допустимых управлений, для которой полностью пригодна процедура решения исходной задачи, описанная в § 2. Приводимый далее простой пример служит конкретной иллюстрацией рассмотренных этапов. Построение и анализ более сложной БНМ для конкретной экономической ситуации планируется представить в отдельной работе.

ПРИЛОЖЕНИЕ

ПРИМЕР

Исходные данные. Пусть исходная БНМ описывается уравнением в матричной форме:

$$X(t + 1) = AX(t) + B(U)X(t) + W,$$

где $X(t) = (x_1(t), ..., x_4(t))$ — вектор переменных состояния в момент t, матрицы A и $B(U)$ имеют вид[6]:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0{,}4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0{,}3 & 0{,}5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & u_2 & 0 & u_3 \\ u_3 & 0 & u_1 & 0 \\ -u_2 & u_3 & 0 & 0 \\ 0 & -u_1 & u_2 & -u_3 \end{pmatrix},$$

[6] Поскольку изначально значения всех управлений определены в интервале [−1, 1], то для наглядности полагаем, что при нормировке матрицы $A + B(U)$ исходные коэффициенты в билинейных членах включаются в соответствующие управления, поэтому в матрицу $B(U)$ управления входят без коэффициентов.

а $W = (0{,}1;\ 0{,}3;\ 0;\ 0{,}5)^T$ — вектор независимых внешних воздействий. Управления u_1, u_2 и u_3 — константные со значениями из интервала [−1, 1].

Стабилизация БНМ. Для стабилизации выберем вариант Б с использованием стабилизирующего множителя k_{stab}. В данном случае матрица M_J имеет вид:

$$M_J = A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -0{,}4 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -0{,}3 & 0{,}5 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \|M_J\| = 2{,}3798.$$

Значение k_{stab} выбрано равным 1/2,7 = 0,3704, так что при любом $U \in U_K \|A' + B'(U)\| < 0{,}8814$. При длине интервала моделирования, равной 20, справедливо:

$$\left\| \left(\sum_{t=1}^{\infty} (k_{stab} M_J)^t \right) W - \left(\sum_{t=1}^{20} (k_{stab} M_J)^t \right) W \right\| = 0{,}0413. \tag{П.1}$$

Это выражение можно рассматривать как верхнюю границу для ошибки при определении координат РС, обусловленной остатком матричного ряда от 20-го такта до его равновесных значений. Если при моделировании мы следим за значениями первого знака после запятой в вычисляемых значениях переменных БНМ, то ошибка, оцененная согласно формуле (П.1), представляется вполне приемлемой.

Вложение стабилизированной БНМ в куб *K*. Следующий шаг состоит в обеспечении выполнения условия (3) для БНМ с матрицей $A' + B'(U)$. Выберем вариант 2 сужения допустимых интервалов значений для управлений. Совокупности линейных неравенств (17), (18), обозначенные в данном случае как (П.2), выглядят следующим образом:

$$\begin{gathered} 0{,}3704\,u_2^{\min} + 0{,}3704\,u_3^{\min} \geqslant -0{,}1; \\ 0{,}3704\,u_1^{\min} + 0{,}3704\,u_3^{\min} \geqslant -0{,}1519; \\ -0{,}3704\,u_2^{\max} + 0{,}3704\,u_3^{\min} \geqslant +0{,}1111; \\ -0{,}3704\,u_1^{\max} + 0{,}3704\,u_2^{\min} - 0{,}3704\,u_3^{\max} \geqslant -0{,}5; \\ 0{,}3704\,u_2^{\max} + 0{,}3704\,u_3^{\max} \leqslant +0{,}9; \\ 0{,}3704\,u_1^{\max} + 0{,}3704\,u_3^{\max} \leqslant +0{,}7; \\ -0{,}3704\,u_2^{\min} + 0{,}3704\,u_3^{\max} \leqslant +0{,}8148; \\ -0{,}3704\,u_1^{\min} + 0{,}3704\,u_2^{\max} - 0{,}3704\,u_3^{\min} \leqslant +0{,}5. \end{gathered} \tag{П.2}$$

Для простоты полагаем, что матрица системы неравенств (17), (18) размером 8×6, является матрицей полного ранга[7]. Совместность этой системы неравенств

[7] Полноту ранга этой матрицы всегда можно обеспечить добавлением в какое-либо уравнение незначительного регуляризирующего члена.

проверяем по С.Н. Черникову с помощью теоремы 1.5 из работы [4]. Для этого выберем наибольший невырожденный минор $M1$, содержащий строки 2—4 из первой четверки неравенств (со знаком $\geqslant$) и строки 2—4 из второй четверки неравенств (со знаком $\leqslant$). Будем обрамлять минор $M1$ снизу какой-либо из оставшихся строк (1-й или 5-й) из совокупности (П.2), и справа — столбцом соответствующих свободных членов. Два таких «расширенных» минора обозначим как $M2_1$ и $M2_2$. Согласно теореме 1.5 [4] необходимым и достаточным условием совместности системы неравенств (П.2) является выполнение условий:

$$\frac{1}{\det(M1)}\det(M2_i) \geqslant 0, \quad i = 1, 2,$$

справедливость которого легко проверяется. Поскольку матрица данной системы неравенств — полного ранга, то она имеет единственное МНК- решение для значений $u_k^{\min}$, $u_k^{\max}$, $k = 1, 2, 3$, определяющее интервалы значений допустимых управлений:

$$u_1 \in [-1,\ 0{,}2271], \quad u_2 \in [-0{,}7855,\ 1] \\ \text{и } u_3 \in [0{,}7639{,}1].$$

Заметим, что интервал для u_3 является знакоопределенным. Декартово произведение этих интервалов является искомым множеством U_B допустимых управлений, не выводящих траектории БНМ из куба K, начинающиеся в нем.

Решение исходной задачи управления. Пусть $\mathrm{vert}(U_B)$ — множество вершин найденного ранее параллелепипеда U_B. Определим множество РС вида $\{X^*(U_v)\}$, где $U_v \in \mathrm{vert}(U_B)$, и вложим его в брус X_B, который в данном случае имеет вид:

$$X_B = [0{,}0733;\ 0{,}4880] \times [0{,}2978;\ 0{,}5561] \times \\ \times [0{,}0726;\ 0{,}2607] \times [0{,}2843;\ 0{,}54554].$$

Пусть заданное состояние есть $X' = (0{,}2;\ 0{,}5;\ 0{,}2;\ 0{,}5) \in X_B$. В результате операций, проводимых над аналогом уравнения (7) в данном случае, система (8) приобретает следующий вид:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}1 \\ 0{,}9398 \\ 0{,}1259 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (\text{П.3})$$

с добавлением ограничений

$$0 \geqslant u_k \geqslant u_k^{\min}, \quad 0 \leqslant u_k \leqslant u_k^{\max}, \\ k = 1, ..., 3. \qquad (\text{П.4})$$

МНК-решение задачи (П.3), (П.4) есть $U^* = (-0{,}2052;\ 0{,}1776;\ 0{,}7639)$. При этом РС $X^*(U^*) = (0{,}2476;\ 0{,}4163;\ 0{,}2027;\ 0{,}4248)$, причем разность $X' - X^*(U^*) = (0{,}0476;\ -0{,}0837;\ 0{,}0027;\ -0{,}0752)$. Если в проводимых вычислениях обращать внимание лишь на первый знак после запятой, то координаты полученной разности говорят о приемлемом качестве найденного решения.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Описанный подход к построению и анализу билинейных нормированных моделей ориентирован на практическое их применение в моделировании, прежде всего, социально-экономических систем (СЭС). Необходимо отметить двойственность положения автора: с одной стороны — билинейные системы с сопутствующими математическими проблемами, с другой — моделирование плохо формализованных и слабо структурированных СЭС. Важно подчеркнуть, что при моделировании СЭС все элементы модели — переменные, коэффициенты, уравнения — должны быть предметно интерпретированы, а происходящие в модели процессы не должны противоречить известным правилам, характеризующим данную предметную область. Если в математических исследованиях по билинейным системам всякая переменная есть величина, допускающая над собой те или иные операции, то в моделях СЭС переменная есть конкретное понятие, контекстно (в зависимости от предметной области) связанное с другими понятиями модели. Именно поэтому математические результаты, полученные для билинейных систем, могут быть слабо интерпретируемыми в качественных моделях СЭС. Цель настоящей работы — дать методологию построения практических билинейных моделей, для чего и был принят ряд допущений, упрощающих анализ билинейных систем.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Васильев В.И., Ильясов Б.Г.* Интеллектуальные системы управления. Теория и практика. — М.: Радиотехника, 2009. — 312 с.
2. *Жермоленко В.Н.* Особые множества и динамические свойства билинейных систем управления // Фундаментальная и прикладная математика. — 2005. — Т. 11, № 8. — С. 105—117.
3. *Калмыков С.А., Шокин Ю.И., Юлдашев З.Х.* Методы интервального анализа. — Новосибирск: Наука, 1986. — 363 с.
4. *Черников С.Н.* Линейные неравенства. — М.: Наука, 1968. — 488 с.

Статья представлена к публикации руководителем РРС Б.Г. Ильясовым.

Корноушенко Евгений Константинович — д-р техн. наук, гл. науч. сотрудник, Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, г. Москва,
☎ (495) 334-90-00, ✉ ekorno@mail.ru.