УДК 519.876.2

УПРАВЛЕНИЕ РАВНОВЕСНЫМИ СОСТОЯНИЯМИ В ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ НОРМИРОВАННЫХ МОДЕЛЯХ СЛАБОФОРМАЛИЗОВАННЫХ СИСТЕМ

Е.К. Корноушенко

Рассмотрены вопросы существования равновесных (асимптотически устойчивых) состояний и управления такими состояниями в положительных нелинейных нормированных моделях (ПНМ), функционирующих в единичном положительном кубе K из R^n. Обсуждено представление ПНМ в виде функционального графа. Введено понятие допустимого управления как управления со значениями координат из интервала [0, 1] и доказана выпуклость множества равновесных состояний, порождаемых допустимыми управлениями. Для ПНМ с независимыми управлениями и ПНМ с линейной обратной связью по состоянию решена задача перевода модели из произвольного начального состояния в заданное равновесное и определена погрешность подобного перевода. На примере показаны все этапы соответствующих процедур.

Ключевые слова: положительная нелинейная модель, неподвижная точка, нелинейное отображение, допустимое управление, разомкнутая и замкнутая модель.

ВВЕДЕНИЕ

При моделировании социально-экономических систем (политических, экологических, военных и др.) широко используются так называемые каузальные (причинно-следственные) качественные модели, и имеется обширная литература по таким моделям (см., например, работу [1] и библиографию в ней). Однако, как отмечают многие авторы (см., например, книгу [2]), существующие подходы к построению моделей не позволяют охватить все разнообразие встречающихся ситуаций, особенности происходящих в них процессов — необходимо расширять класс используемых моделей.

В настоящей статье рассматривается специальный класс качественных нелинейных нормированных моделей — так называемые *положительные нормированные модели* (ПНМ). Модели этого класса являются непрерывными динамическими системами с дискретным временем, функционирующими в определенном подмножестве неотрицательного квадранта пространства R^n. Выбор ПНМ в качестве объекта исследования обусловлен следующими причинами.

- В последние годы при моделировании социально-экономических систем широкое распространение получили так называемые когнитивные карты, которые в подавляющем числе случаев можно представить графовой моделью в виде взвешенного графа с постоянными весами на дугах. Одной из первых работ, где некоторые постоянные веса заменены функциями, является работа [1], которая и стимулировала желание исследовать класс подобных моделей.
- В причинно-следственных моделях «камнем преткновения» является допустимость сложения разнознаковых влияний. В ПНМ, как и в работе [1], подобные сложения отсутствуют.
- Графовое представление ПНМ имеет вид функционального графа, в котором все веса на дугах положительны и могут быть константами, произведениями нескольких переменных, скалярными монотонными функциями (возрастающими или убывающими). Скалярные управления (компоненты вектора управления) размещаются на дугах функционального графа. Значения управлений могут не зависеть от текущих значений координат состояния ПНМ (разомкнутая ПНМ) или линейно зависеть от таких коор-

динат (замкнутая ПНМ с линейной обратной связью по состоянию).

Основное внимание в данной работе, как и в аналогичных работах автора [3, 4], в которых рассматриваются более «простые» нелинейные системы, направлено на анализ поведения ПНМ внутри единичного положительного куба K в R^n, включающий в себя анализ равновесных (асимптотически устойчивых) состояний в кубе K при выборе того или иного вектора управлений, а также синтез управлений, переводящих (в асимптотическом смысле) ПНМ из произвольного начального состояния в кубе K в заданное устойчивое состояние.

В последние годы был разработан так называемый синергетический подход к проблеме обеспечения целенаправленного поведения в сложных нелинейных системах (здесь большая заслуга принадлежит работам А.А. Колесникова и его коллег (см., в частности, сборник [5])). Далее в п. 2.5 показано, что предлагаемые в данной работе процедуры нахождения управлений для ПНМ полностью интерпретируются в терминах синергетического подхода, а в силу линейного вхождения управлений в уравнения ПНМ — существенно более простые по сравнению с соответствующими процедурами синтеза управлений в рамках синергетического подхода.

1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОЛОЖИТЕЛЬНОЙ НОРМИРОВАННОЙ МОДЕЛИ

1.1. Графовое представление ПНМ

Положительная нормированная модель содержит переменные состояния $x_1, ..., x_n$, управления $u_1, ..., u_p$, внешние воздействия $z_1, ..., z_r$. Графовое представление ПНМ $G_{\text{ПНМ}}$ отражает структурные связи между этими переменными. Вершинами графа $G_{\text{ПНМ}}$ служат координаты вектора состояния ПНМ. Всякая дуга a_{ij} в этом графе отражает лишь факт непосредственного (без промежуточных вершин) влияния переменной x_i на переменную x_j, описываемого соответствующей функцией f_{ij}. Если характер и сила такого влияния не меняются во времени, то $f_{ij} = w_{ij}x_i$, где $w_{ij} \in (0, 1]$ — постоянный положительный вес. Если сила такого влияния зависит от «чужой» переменной[1] $x_k(x_r, x_s, ..., x_v)$, то $f_{ij} = w_{ij}\, x_k(x_r, x_s, ..., x_v)x_i$. В рассмотрение включен также случай, когда воздействие x_i на x_j описывается непрерывной монотонной (возрастающей или убывающей) функцией $\psi_{ij}(x_i)$, отображающей единичный интервал значений x_i в аналогичный интервал значений переменной x_j. Результирующее значение переменной x_j при непосредственном воздействии на нее переменных $x_k, x_r, ..., x_s$ определяется как сумма влияний на x_j этих переменных.

Управления u_r предназначены для изменения динамики ПНМ путем изменений влияний между переменными в соответствии с выбранной стратегией управления. Если управление u_r может изменять влияние f_{ij}, этот факт отражается включением сомножителя u_r в функцию f_{ij}. В каждую дугу графа $G_{\text{ПНМ}}$ может входить не более одного управления.

Замечание 1. При выбранном способе введения управлений в ПНМ значения управлений из интервала (0, 1] интерпретируются обратным образом: единичное значение управления говорит об отсутствии данного управления. Нулевое значение управления является самым «жестким» управлением, ведущим к разрыву соответствующей связи в структуре ПНМ. Нулевые значения управлений в данной работе не рассматриваются. ♦

Внешние воздействия, характеризующие состояние внешней по отношению к ПНМ среды, считаются не зависимыми от состояний ПНМ. В графовое представление $G_{\text{ПНМ}}$ добавляется совокупность вершин-истоков, соответствующих компонентам вектора внешних воздействий. Аналогично, если управления не зависят от координат вектора состояния, то каждое управление, входящее в ту или иную дугу графа $G_{\text{ПНМ}}$, рассматривается как вершина-исток для соответствующей дуги.

Построение функционального графа ПНМ для исследуемой предметной ситуации требует тщательного изучения происходящих в ситуации явлений (особенно при выборе видов влияний), но это — такие же проблемы, как и при построении традиционных качественных причинно-следственных моделей.

1.2. Формальное задание разомкнутой ПНМ

Состоянием ПНМ в момент t называется вектор $X(t) = (x_1(t), ..., x_n(t))$. Под *разомкнутой* ПНМ понимается ПНМ, в которой все управления не зависят от координат вектора состояния и константны. Назовем ПНМ *замкнутой* при наличии (неизменной) структурной связи между управлениями и переменными состояния. Замкнутая ПНМ рассматривается в п. 2.4.

Формально разомкнутая ПНМ определяется совокупностью уравнений, вид которых определя-

[1] Здесь скобки указывают, что к переменной могут быть добавлены соответствующие сочетания переменных, находящихся внутри скобок.

ется структурой ее графового представления. Так, пусть на переменную x_j непосредственно влияют переменные x_k, ..., x_p с соответствующими функциональными весами w_{ij}, w_{kj}, ..., w_{pj}. Локальная причинно-следственная «картинка» временных соотношений между переменными x_i, x_k, ..., x_p в момент t и зависимой переменной x_j в момент $t + 1$ представляется в виде $x_j(t + 1) = w_{ij}(t) + w_{kj}(t) + ... + w_{pj}(t)$. С учетом непосредственных влияний на x_j возможных управлений и внешних воздействий получаем уравнение для переменной[2] x_j:

$$x_j(t + 1) = \sum_{k=1}^{n_j} f_{i_k j}(X_{i_k j}(t), (u_{i_s}(0))) + (z_j(0)),$$
$$t \in J_+, \quad j = 1, ..., n. \qquad (1)$$

Здесь J_+ — множество целых неотрицательных чисел, $X_{i_k j}$ — совокупность координат вектора состояния ПНМ, входящих в формулу для влияния $f_{i_k j}$, а запись $X_{i_k j}(t)$ означает, что значения этих переменных определены в момент $t \in J_+$. Запись со скобками $(u_{i_s}(0))$ означает, что управление u_{i_s} может входить в функцию $f_{i_k j}$ при некотором s, при этом значение u_{i_s} является константным, выбираемым из интервала (0, 1] в начальный момент времени $t = 0$; $Z = (z_1, ..., z_q)$ — вектор внешних константных воздействий, выбираемых также из интервала (0, 1] в момент $t = 0$. Как и в случае с управлением, скобки для z в выражении (1) означают, что для некоторых j $z_j = 0$. Важно подчеркнуть, что правые части уравнений ПНМ являются аддитивными положительными нелинейными функциями f_i, $i = 1, ..., n$, в которые константные u_k и z_r входят как параметры. Определим вектор-функцию F как $F = (f_1, ..., f_n)$.

Пусть R^n_+ — неотрицательный квадрант в R^n, а $M_X \subset R^n_+$ — некоторое множество, в котором функционирует ПНМ. Обозначим $U_K = [0, 1]^p$, $Z_K = [0, 1)^q$. Далее примем

Допущение 1:

— каждое управление u_s может входить в каждое уравнение ПНМ не более одного раза;

— каждое из уравнений ПНМ содержит хотя бы одно управление[3];

— размерности вектора управлений[4] U и вектора состояния X совпадают, т. е. $p = n$;

— если управление u_r входит в аддитивный член вида $w_{i_s} x_{i_1}, x_{i_2}, ..., x_{i_k}, u_r$, то коэффициент w_{i_s} «поглощается» управлением u_r;

— внешние воздействия и только они могут быть свободными членами в уравнениях ПНМ. При переходе к другому интервалу моделирования вектор Z может заменяться на константный вектор Z', соответствующий другому интервалу. ♦

Для каждого состояния $X(0) \in M_X$, каждого вектора управлений $U \in U_K$ и вектора внешних воздействий $Z \in Z_K$ обозначим через $X(t, X(0), U, Z)$ траекторию ПНМ с начальным состоянием $X(0)$ и наборами постоянных параметров U и Z. В силу однозначности функций f_i каждая траектория определяется однозначно на M_X для каждого $t \in J_+$, при этом $X(t, X(0), U, Z)$ непрерывно зависит от $X(0)$, U, Z. При существовании предела $\lim_{t \to \infty} X(t, X(0), U, Z)$ предельная точка $X^*(U, Z)$ называется *управляемым равновесным состоянием*[5] (РС), соответствующим векторам U и Z.

2. ОБ УПРАВЛЯЕМЫХ РАВНОВЕСНЫХ СОСТОЯНИЯХ

2.1. Введение прореженного времени в ПНМ и постулируемые свойства степени отображения *F*

Моменты времени t, принадлежащие множеству J_+, назовем *исходным временем*. В *прореженном времени* τ с тактностью ν каждый такт содержит ν тактов исходного времени. Функционирующая в прореженном времени τ с тактностью ν ПНМ, обозначаемая для краткости как ПНМ(ν), определяется следующим образом:

— состояние Q ПНМ(ν) в начальный момент $\tau = t = 0$ $Q(0) = X(0)$;

— каждая координата $q_i(\tau)$ состояния $Q(\tau)$ ПНМ(ν) в момент τ есть $q_i(\tau) = x_i(\nu t)$; отображение $F^{(\nu)}$ множества состояний ПНМ(ν) в себя, реализуемое ПНМ(ν), является степенью ν отображения F, т. е. $F^{(\nu)} = F^{\nu}$.

---

[2] Дело в том, что на переменную x_j могут непосредственно влиять n_j неупорядоченных переменных состояния. Для компактного отображения такой ситуации вводится дополнительный индекс k, перечисляющий эти переменные.

[3] Это ограничение служит предпосылкой для управляемости ПНМ. Согласно замечанию 1 единичные значения управлений могут удаляться из соответствующих уравнений.

[4] Для краткости координаты вектора управления u и сам вектор U будем называть одним словом «управление», а конкретный смысл в каждом случае определяется написанием соответствующей буквы.

[5] Далее везде звездочка при векторе состояния будет обозначать управляемое РС.

Обозначим через K положительный ортант (куб) $(0, 1]^n$. Примем важное

Допущение 2. Найдутся такие ненулевые константные векторы $U^0 \in U_K$ и $Z^0 \in Z_K$ и такое целое $N > 0$, при которых отображение $F^N(K, U^0, Z^0)$ является сжимающим в кубе K. ♦

Единственную неподвижную точку отображения F^N при выбранных U^0 и Z^0 обозначим через $X^*(U^0, Z^0)$. Но тогда, как известно (см., например, [6, *с. 17*]), и отображение F, не являющееся в общем случае сжимающим в кубе K, имеет ту же неподвижную точку $X^*(U^0, Z^0)$.

Замечание 2. Для выполнения допущения 2 достаточно выполнения условий:

— включение $F^N(K, U^0, Z^0) \subset K$, свидетельствующее о том, что F^N отображает куб K в себя (проверяется непосредственно для каждого уравнения ПНМ);

— последовательность $d(Q(\tau), F^N(Q(\tau)))$, $\tau = 0, 1, 2, \ldots$, является монотонно убывающей последовательностью (проверяется моделированием); d — евклидово расстояние. ♦

При выполнении условий замечания 2 нам не надо беспокоиться о сходимости процесса моделирования в исходном времени (т. е. с использованием отображения F) к РС $X^*(U^0, Z^0)$. Поиск данного РС целесообразно начинать с малых значений координат векторов U^0 и Z^0.

Итак, пусть $X^*(U^0, Z^0)$ — неподвижная точка отображения F. Тогда справедливы соотношения:

$$\lim_{t \to \infty} X(t, X(0), U^0, Z^0) = X^*(U^0, Z^0), \qquad (2)$$

$$F(X^*(U^0, Z^0), U^0, Z^0) = X^*(U^0, Z^0), \qquad (3)$$

где $X(0)$ — произвольное начальное состояние в кубе K. Управление U^0, входящее в соотношения (2) и (3), назовем *управлением, порождающим РС* $X^*(U^0, Z^0)$.

Допущение 3. Поскольку далее будут рассматриваться равенства вида (3), определенные в асимптотическом смысле, для простоты изложения в качестве интервала наблюдения будем рассматривать всю положительную полуось; вектор Z считаем константным и равным Z^0. ♦

Необходимым и достаточным условием существования у ПНМ (с зафиксированным вектором Z^0) управляемого РС является выполнение соотношений (2) и (3) для некоторого U^*. В силу непрерывной зависимости значений $X(t, X(0), U, Z)$ от U возникают вопросы о наличии (связного) множества управлений, порождающих РС в кубе K, о наличии множества соответствующих управляемых РС; о характеристиках упомянутых множеств.

2.2. Анализ множества управляемых равновесных состояний в кубе *K*

Обозначим через $X^*_{\text{упр}}$ множество управляемых РС в кубе K. Прежде чем характеризовать множество $X^*_{\text{упр}}$, введем понятие *функциональной матрицы* ПНМ. Функциональная матрица $M(X(t), U)$ является квадратной матрицей порядка n и строится следующим образом. Строка j матрицы $M(X(t), U)$ соответствует j-му уравнению из системы уравнений (1). Если в графе ПНМ имеется дуга, связывающая переменную x_i с переменной x_j, то (j, i)-й элемент матрицы $M(X(t), U)$ равен слагаемому f_{ij} в выражении (1). Элемент (j, k) матрицы $M(X(t), U)$ равен нулю, если и только если переменная x_k не связана дугой с переменной x_j в графе ПНМ. Координаты вектора U входят в соответствующие элементы матрицы $M(X(t), U)$ как параметры. Использование функциональной матрицы $M(X(t), U)$ позволяет представить уравнения (1) в виде $X(t + 1) = M(X(t), U)I + Z$, где I — n-вектор-столбец из единиц. С учетом матрицы $M(X(t), U)$ равенство (3) выглядит так:

$$M(X^*(U^0, Z^0), U^0)I + Z^0 = X^*(U^0, Z^0). \qquad (4)$$

Здесь $M(X^*(U^0, Z^0), U^0)$ — вещественная $(n \times n)$-матрица с неотрицательными элементами. Пусть теперь X^* — некоторое управляемое РС в кубе K и требуется найти вектор управлений, порождающий это РС. С учетом равенства (4)

$$M(X^*, U)I + Z^0 = X^*, \qquad (5)$$

где координаты неизвестного вектора U входят как параметры в каждую из функций f_{ij} из $M(X^*, U)I$ линейно. На основе выражения (5) составим систему линейных уравнений относительно координат вектора U:

$$A(X^*)U = b(X^*, Z^0). \qquad (6)$$

Подчеркнем, что равенства (5) и (6) эквивалентны, так как преобразуются одно в другое эквивалентными преобразованиями. Полагаем для простоты, что матрица $A(X^*)$ полного ранга, тогда система (6) совместна (см. допущение 3) и имеет единственное решение, обозначаемое как $U^*(X^*, Z^0)$. Подчеркнем, что в общем случае координаты решения $U^*(X^*, Z^0)$ могут принимать значения из R, а не из $(0, 1]$ (напомним, что $p = n$). Обозначим $U^*_{\text{упр}} = \{U^*(X^*, Z^0), X^* \in K\}$ — множество управлений (в R^n), порождающих РС в кубе K.

Предложение 1. *Отображение* Φ: $U^*_{\text{упр}} \leftrightarrow X^*_{\text{упр}}$ *взаимно однозначно.*

Доказательство. При заданном $U^* \in U^*_{\text{упр}}$ единственность $X^*(U^*, Z^0)$ следует из однозначности отображения F. При заданном X^* однозначность решения $U^*(X^*, Z^0)$ следует из единственности решения совместной системы (6) и эквивалентности соотношений (6) и (5). ♦

Управление $U^{\text{д}}(X^*, Z^0)$, порождающее некоторое РС в кубе K, назовем *допустимым*, если оно принадлежит множеству U_K. Обозначим $U^{\text{доп}}_{\text{упр}}$ — множество допустимых управлений ПНМ, а $X^{\text{доп}}_{\text{упр}}$ — множество РС в кубе K, порождаемых допустимыми управлениями. Очевидно $U^{\text{доп}}_{\text{упр}} \subseteq U^*_{\text{упр}} \cap U_{\text{K}}$, $X^{\text{доп}}_{\text{упр}} \subseteq X^*_{\text{упр}}$.

Предложение 2. *Множество* $X^{\text{доп}}_{\text{упр}}$ *выпукло.*

Доказательство. Пусть X^* и X^{**} — произвольные РС в кубе K, порождаемые соответствующими допустимыми управлениями U^* и U^{**}. Рассмотрим прямую $\lambda X^* + (1 - \lambda)X^{**}$, $(0 \leqslant \lambda \leqslant 1)$, соединяющую X^* и X^{**}, и пусть $X^{***} = \lambda^*X^* + (1 - \lambda^*)X^{**}$, где $0 < \lambda^* < 1$. На основании равенства (5) справедливо

$$\lambda^*M(X^*, U)I + \lambda^*Z^0 + (1 - \lambda^*)M(X^{**}, U)I + (1 - \lambda^*)Z^0 = \\ = \lambda^*X^* + (1 - \lambda^*)X^{**}.$$

В это соотношение координаты вектора U входят как параметры с неизвестными значениями. Поскольку $\lambda^*Z^0 + (1 - \lambda^*)Z^0 = Z^0$, получим

$$\lambda^*M(X^*, U)I + (1 - \lambda^*)M(X^{**}, U)I + Z^0 = \\ = \lambda^*X^* + (1 - \lambda^*)X^{**}. \quad (7)$$

Нетрудно убедиться в том, что по аналогии с эквивалентностью соотношений (5) и (6) для соотношения (7) получаем эквивалентное соотношение

$$(\lambda^*A(X^*) + (1 - \lambda^*)A(X^{**}))U = \\ = \lambda^*b(X^*, Z^0) + (1 - \lambda^*)b(X^{**}, Z^0). \quad (8)$$

В соотношении (8) число неизвестных равно числу уравнений. Справедливо предположить, что определитель матрицы при U отличен от нуля, так что система (8) совместна и имеет единственное решение U^{***}. Покажем, что значение каждой координаты u^{***}_k вектора U^{***} находится в интервале между допустимыми значениями u^*_k и u^{**}_k. При движении изображающей точки по прямой $\lambda^*X^* + (1 - \lambda^*)X^{**}$ координата u_k решения системы (8) изменяется от значения u^*_k (u^{**}_k) до значения u^{**}_k (u^*_k) в каждой из функций f_{ij}, содержащих u_k. Из предложения 1 следует, что это изменение монотонно. В силу эквивалентности соотношений (7) и (8) состояние $X^{***} = \lambda^*X^* + (1 - \lambda^*)X^{**}$ является равновесным в кубе K и порождается допустимым управлением U^{***}. ♦

При анализе зависимости расстояния между РС от расстояния между порождающими их управлениями полезным оказывается известный факт (см., например, работу [7]), который несколько упростим для данного случая. Пусть $F^N(X, U, Z^0)$ и $F^N(X, U', Z^0)$ — два сжимающих в кубе K оператора, отличающиеся только входящим в них вектором U. Операторы $F^N(X, U, Z^0)$ и $F^N(X, U', Z^0)$ называются ε-*близкими* по норме ρ в кубе K, если $\rho(F^N(X, U, Z^0), F^N(X, U', Z^0)) < \varepsilon$ для любых $X \in K$ и $U, U' \in U_K$. Допустим, что $U, U' \in U^{\text{доп}}_{\text{упр}}$ и $|U - U'| < \delta$, и выберем δ так, чтобы сжимающие операторы $F^N(X, U, Z^0)$ и $F^N(X, U', Z^0)$ были ε-близкими. Тогда согласно работе [7, *задача 1.7*] равновесные состояния, порождаемые допустимыми управлениями U и U', находятся друг от друга на расстоянии, не большем $\varepsilon/(1 - \sigma)$, где σ — показатель сжимаемости этих отображений. В принципе, используя эту информацию, для оценки размеров множеств $X^{\text{доп}}_{\text{упр}}$ и $X^*_{\text{упр}}$ в кубе K можно применить метод Монте-Карло.

Размеры множества $X^{\text{доп}}_{\text{упр}}$ существенно зависят от значений координат вектора Z: множество $X^{\text{доп}}_{\text{упр}}$ уменьшается в размерах при приближении этих значений к некоторым пороговым значениям. Например, множество $X^{\text{доп}}_{\text{упр}}$ может оказаться пустым в кубе K, если какая-либо из координат вектора Z принимает единичное значение. Это следует из положительности функций f_i и невозможности в таком случае выполнения равенства (3) для допустимых управлений. При заданном Z^* нахождение границ множеств $X^{\text{доп}}_{\text{упр}}$ и $X^*_{\text{упр}}$ составляет предмет отдельного рассмотрения.

2.2. Перевод разомкнутой ПНМ в заданное равновесное состояние с помощью допустимых управлений

Пусть $X(0) \in K$ — некоторое произвольное начальное состояние ПНМ, а $X^* \in X^*_{\text{упр}}$ — заданное РС, в которое надо перевести ПНМ. По аналогии с процедурой п. 2.2, сопоставим соотношению (3) с заданным РС X^* и неизвестным вектором U эквивалентное соотношение

$$A(X^*)U = b(X^*, Z^0). \quad (9)$$

Поскольку искомый вектор U^* должен быть допустимым, к системе (9) добавляется совокупность двусторонних ограничений вида

$$0 < u_i \leqslant 1, \quad i = 1, ..., p. \quad (10)$$

Задача (9), (10) решается методом наименьших квадратов (МНК). При невырожденности матрицы $A(X^*)$ эта задача имеет единственное решение U^*.

Предположим вначале, что заданное РС $X^* \in U_{\text{упр}}^{\text{доп}}$. В этом случае невязка МНК-решения U^*, определяемая как

$$\delta(U^*) = A(X^*)U^* - b(X^*, Z^0), \qquad (11)$$

равна нулю, т. е. U^* — точное решение (с учетом допущения 3) исходной задачи[6].

Пусть теперь $X^* \notin X_{\text{упр}}^*$ — произвольное РС из K. В этом случае МНК-решение U^* является приближенным с ненулевой невязкой (11). Норма этой невязки пропорциональна расстоянию от РС X^* до РС, порождаемого допустимым МНК-решением U^* и принадлежащего множеству $U_{\text{упр}}^{\text{доп}}$. Это расстояние (с учетом сказанного в сноске 6) определяет погрешность решения исходной задачи.

2.4. Перевод замкнутой ПНМ в заданное равновесное состояние с помощью допустимых управлений

В замкнутой ПНМ к ее исходным уравнениям добавляется совокупность уравнений, связывающих текущие значения управлений с текущими значениями некоторых координат состояния. Однако если в технических системах обратная связь по состоянию служит, прежде всего, для стабилизации объекта и выполнения тех или иных условий для замкнутой системы, то замыкание ПНМ следует рассматривать как введение в модель дополнительных (обратных) связей, имеющих вполне конкретную предметную интерпретацию в моделируемой ситуации.

В данной работе рассматривается случай статической линейной обратной связи по состоянию. Вектор обратной связи по состоянию определяется как $U(t) = GX(t)$; ненулевые элементы в матрице G принадлежат интервалу (0, 1] и определяют структуру замыкания. Конкретные значения ненулевых элементов выбираются в зависимости от заданного РС, в которое требуется перевести замкнутую модель (т. е. структура замкнутой ПНМ «подстраивается» под решение поставленной задачи).

Замена каждого из управлений, входящих в уравнения ПНМ, соответствующей линейной функцией приводит к появлению в уравнениях ПНМ дополнительных перекрестных произведений координат состояния и изменению некоторых элементов функциональной матрицы ПНМ. Отметим, что такая замена не увеличивает числа координат в векторе состояния, а лишь видоизменяет функции f_j, оставляя их в прежнем классе допустимых для ПНМ функций. Схема решения исходной задачи (составление уравнения вида (5) и формирование по нему линейной системы вида (6) для нахождения значений элементов матрицы G) остается работоспособной в данном случае (вместо неизвестных константных управлений теперь находим значения ненулевых элементов матрицы G). В этом плане п. 2.4 представляется более важным, чем решение исходной задачи для константных управлений. Как показывает приводимый далее пример, введение (линейной) обратной связи может уменьшить число управлений, необходимых для перевода ПНМ в заданное РС.

2.5. Простота решения исходной задачи управления в ПНМ по сравнению с синергетическим подходом к управлению

Знакомство с работами коллег из школы А.А. Колесникова позволило автору убедиться в том, что предложенная в данной статье процедура нахождения управлений (константных или линейно зависящих от координат состояния) «вложима» концептуально в общую процедуру нахождения управлений для нелинейных систем в рамках синергетического подхода, хотя в силу определения ПНМ и наложенных ограничений является несравнимо более простой. Во Введении автор попытался объяснить причину выбора ПНМ в том виде, как она определена в данной работе, и выбор РС в качестве аттракторов.

Исходным в синергетическом подходе служит понятие макропеременной $\psi(x, t)$ (у нас t — дискретное время), с помощью которой в итоге задается инвариантное многообразие $\psi = 0$, к которому стремится вынужденное движение нелинейной системы (см., например, работу [8]): У нас аналогичное многообразие определяется следующим образом:

$$F(X(t), U(t), Z^0) - X^* = 0, \quad t \in J_+,$$

где X^* — заданное асимптотически устойчивое состояние ПНМ, и цель управления — перевести ПНМ из произвольного начального состояния в кубе K в РС X^* (с обеспечением необходимой точности при конечном интервале моделирования). В синергетическом подходе основная сложность задачи состоит в нахождении замкнутых временных выражений для управлений по исходным уравнениям и параметрам нелинейной системы с учетом требуемой динамики движения системы

---

[6] При ограниченных интервалах моделирования точность такого асимптотического решения зависит от длины интервала моделирования и от скорости прихода начального состояния $X(0)$ ПНМ в заданное РС (с соблюдением необходимой точности). Нахождение соответствующих оценок — предмет отдельного рассмотрения.

по многообразию $\psi = 0$ к заданному аттрактору. В ПНМ в силу линейного вхождения управлений в уравнения ПНМ вектор искомых управлений находится в асимптотической постановке как МНК-решение линейной системы уравнений, очевидным образом составляемой по уравнениям ПНМ с учетом заданного аттрактора X^*, при этом непосредственно определяется и точность получаемого решения.

3. ПРИМЕР

Определение ПНМ. Пусть ПНМ описывается совокупностью уравнений

$$x(1, t + 1) = x(2, t)u_1 + ax(3, t),$$

$$x(2, t + 1) = f_{12}u_1 + f_{32}u_3 + Z_1,$$

$$x(3, t + 1) = x(2, t)u_2 + f_{13} + Z_2,$$

где $x(i, t)$ — значение i-й координаты вектора состояния в момент t исходного времени, u_1, u_2, u_3 — допустимые константные управления (со значениями из интервала (0,1; 1]), $Z = (Z_1, Z_2) = (0,4; 0,3)$ — вектор внешних воздействий на рассматриваемом интервале моделирования длины $L = 30$. Функции f_{12} и f_{13} — соответственно S-образные возрастающая и убывающая монотонные функции, отображающие интервал [0, 1] в себя и аппроксимируемые многочленами соответствующих степеней, а f_{32} — линейная убывающая функция:

$$f_{12}(x(1, t)) = 11x(1, t)^4 - 26x(1, t)^3 + 20x(1, t)^2 - 3,9x(1, t) + 0,27,$$

$$f_{13}(x(1, t)) = 0,5(2,9(x(1, t)^3 - 4,8x(1, t)^2 + 1,2x(1, t) + 0,82),$$

$$f_{32}(x(3, t)) = -0,7x(3, t) + 1.$$

Коэффициент $a = 0,2$.

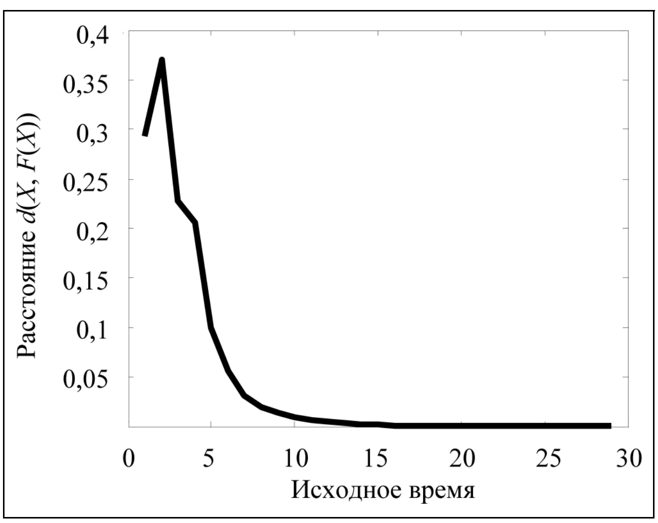

Рис. 1. График расстояния между состояниями X и $F(X)$

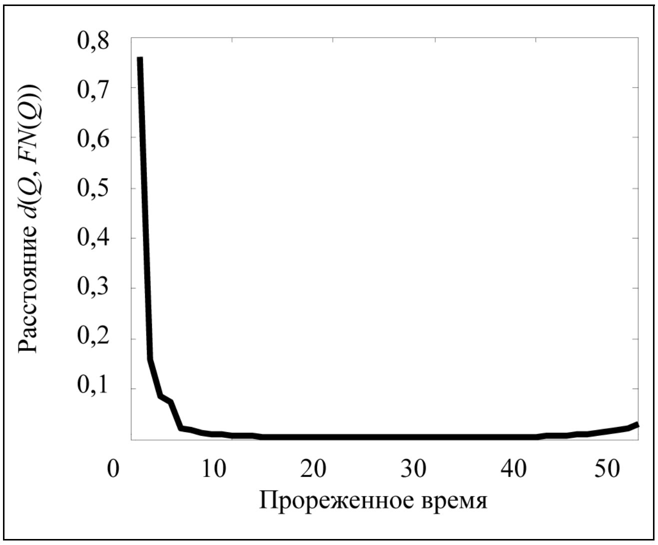

Рис. 2. «Аномальное» поведение расстояния между состояниями X и $F^3(X)$ в ПНМ (3): расстояние монотонно убывает почти до нуля и сохраняется в окрестности нуля почти 40 тактов прореженного времени, после чего начинает возрастать

В зависимости от входящего в уравнения ПНМ управления из множества U_K ПНМ в кубе K может быть либо неустойчивой, либо асимптотически устойчивой с единственным управляемым РС, порождаемым соответствующим управлением. При этом, как видно из рис. 1 (представляющего график расстояния между состояниями X и $F(X)$ при начальном состоянии $X(0) = (0,2; 0,5; 0,8)$ и управлении $U = (0,6; 0,1; 0,4)$), отображение F не является сжимающим в кубе K в отличие от отображения F^3 (как показывает проведенный анализ), так что положим $N = 3$. Поскольку поиск нужного управления решается в асимптотическом смысле, для правильных выводов необходимо корректно выбрать длину L интервала моделирования. Дело в том, что в данном рассмотрении при поиске РС приоритет (согласно допущению 2) отводится отображению F^N. Как показывает рис. 2 (начальное состояние $X(0) = (0,1; 1; 1)$, вектор управления $U = (0,6; 0,7; 0,3)$), монотонное убывание почти до нуля расстояния между двумя последовательными состояниями ПНМ (3) само по себе не является достаточным признаком существования неподвижной точки, важно учитывать поведение ПНМ и в исходном времени.

Перевод разомкнутой ПНМ в заданное состояние. Пусть в множестве $X^*_{\text{упр}}$ в качестве заданного выбрано РС $X^* = (0,2; 0,5; 0,8)$. Система (9) в данном случае имеет вид:

$$\begin{pmatrix} 0,5 & 0 & 0 \\ 0,0996 & 0 & 0,44 \\ 0 & 0,5 & 0 \end{pmatrix} U = \begin{pmatrix} 0,04 \\ 0,1 \\ 0,0544 \end{pmatrix}.$$

Ее МНК-решением является вектор $U^* = (0,1; 0,1088; 0,2046)$. Невязка этого решения вектор $\delta(U^*) = (0,01; 0; 0)$, что говорит о «хорошем» качестве полученного решения. Действительно, управление U^* порождает РС $\hat{X} = (0{,}2098;\ 0{,}5016;\ 0{,}7982) \in X_{\text{упр}}^{\text{доп}}$, достаточно близкое к заданному РС.

Сравним результаты компьютерного решения исходной задачи (с учетом четырех значащих цифр после запятой) с результатами, когда округляется лишь одна цифра после запятой. В этом случае управление $U^* = (0{,}1;\ 0{,}1;\ 0{,}2)$ порождает РС $\hat{X} = (0{,}2088;\ 0{,}5;\ 0{,}7939)$, что после округления дает $\hat{X} = X^*$. Если заданное состояние X' не равновесное, то близость решения $\hat{X}$ к X' зависит от значения невязки, аналогичной невязке (11), и при больших значениях полученное решение может оказаться непригодным.

Перевод замкнутой ПНМ в заданное состояние. В этом случае к уравнениям ПНМ добавляются уравнения замыкания. Следуя п. 2.4, ограничимся случаем статического линейного замыкания. Пусть для определенности уравнения связи имеют вид: $u(1, t) = b_1x(3, t)$, $u(2, t) = b_2x(2, t)$, $u(3, t) = b_3x(1, t)$, где b_1, b_2 и b_3 — неизвестные коэффициенты, принимающие значения из интервала [0, 1]. Подставим эти соотношения в уравнения ПНМ. Представляет интерес сравнение результатов решения обратной задачи управления для разомкнутой и замкнутой ПНМ. Поэтому в роли заданного выберем состояние X^* из предыдущего случая и проверим, является ли оно равновесным для замкнутой ПНМ. Для этого составим систему уравнений относительно вектора $B = (b_1, b_2, b_3)$:

$$\begin{pmatrix} 0{,}4 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}0498 & 0{,}088 \\ 0 & 0 & 0{,}1 \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} 0{,}04 \\ 0{,}1 \\ 0{,}0544 \end{pmatrix},$$

$$0 < b_i \leqslant 1, \quad i = 1, ..., 3.$$

Ее МНК-решение — вектор $U^* = (0{,}1;\ 1;\ 0{,}5555)$. Невязка $\delta(U^*) = (0;\ -0{,}0013;\ 0{,}0012)$, что говорит о «хорошем» качестве полученного решения. Действительно, округлим U^* до первого знака после запятой: $U^* = (0{,}1;\ 1;\ 0{,}6)$, Такое «округленное» управление U^* порождает РС $\hat{X} = (0{,}2019;\ 0{,}5041;\ 0{,}8063)$, что после аналогичного округления дает $\hat{X} = X^*$.

Заметим, что в разомкнутой ПНМ для решения исходной задачи задействованы все управления u_1, u_2 и u_3, тогда как при решении этой же задачи в замкнутой ПНМ задействованы лишь управления u_1 и u_3, а единичное значение управления u_2 не оказывает влияния на динамику ПНМ, и его в данном случае можно не учитывать в уравнениях ПНМ («экономия» управлений).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Описанный подход к построению и анализу ПНМ обусловлен желанием расширить класс качественных причинно-следственных систем, пригодных для моделирования, прежде всего, социально-экономических систем. Поскольку проблема наличия в таких системах устойчивых (равновесных) состояний весьма важна, главное внимание в настоящей работе было направлено на анализ таких состояний в ПНМ и на возможности перевода разомкнутой или замкнутой ПНМ в то или иное равновесное состояние. Соответствующие задачи решаются в асимптотической постановке. Анализ характеристик переходного процесса при таком переводе требует отдельного рассмотрения, так же как и более тонкий анализ множеств равновесных состояний в кубе K (размеры и границы множеств, плотность равновесных состояний в различных областях куба K и др.). На простом примере показаны особенности динамики ПНМ, возможные при анализе равновесных состояний ПНМ. В настоящее время автор готовит показательный пример по анализу и управлению наркоситуацией в городе, включение этого примера в данную статью недопустимо увеличило бы ее объем. Данную работу можно рассматривать как пример реализации принципов качественного причинно-следственного моделирования и управления в такой существенно нелинейной стационарной модели, какой является ПНМ.

ЛИТЕРАТУРА

1. *McLukas A.Ch.* Improving Causal Mapping Practice Using the System Dynamics «Front-End» Tool // Proc. of System Dynamics 2002, International System Dynamics Conference. Palermo, Italy, August 2002.
2. *Васильев В.И., Ильясов Б.Г.* Интеллектуальные системы управления. Теория и практика. — М.: Радиотехника, 2009. — 312 с.
3. *Корноушенко Е.К.* Линейный подход к управлению равновесными состояниями нелинейных нормированных моделей // Проблемы управления. — 2011. — № 2. — С. 16—22.
4. *Корноушенко Е.К.* Управление равновесными состояниями билинейных нормированных моделей // Проблемы управления. — 2012. — № 5. — С. 2—8.
5. *Синергетика* и проблемы теории управления / Под ред. А.А. Колесникова. — М.: Физматлит, 2004. — 504 с.
6. *Красносельский М.А., Вайникко Г.М., Забрейко П.П.* Приближенное решение операторных уравнений. — М.: Наука, 1969. — 455 с.
7. *Данилов В.И.* Лекции о неподвижных точках. — М.: РЭШ, 2006. — 32 с.
8. *Колесников А.А.* Теория и методы синергетического управления // Синергетика и проблемы теории управления / Под ред. А.А. Колесникова. — М., 2004. — С. 130—171.

Статья представлена к публикации руководителем РРС Б.Г. Ильясовым.

Корноушенко Евгений Константинович — д-р техн. наук,
гл. науч. сотрудник, Институт проблем управления
им. В.А. Трапезникова РАН, г. Москва,
☎ (495) 334-90-00, ✉ ekorno@mail.ru.