УДК 519.876.2

ЛИНЕЙНЫЙ ПОДХОД К УПРАВЛЕНИЮ РАВНОВЕСНЫМИ СОСТОЯНИЯМИ НЕЛИНЕЙНЫХ НОРМИРОВАННЫХ МОДЕЛЕЙ

Е.К. Корноушенко

Рассмотрена задача управления нелинейной нормированной моделью при переводе ее из одного равновесного состояния в какое-либо другое с изменением выходных переменных модели в заданных направлениях. Предложено ее решение в линейной постановке: нелинейной модели ставится в соответствие линейная система с определенными свойствами, которая и переводится из одного равновесного состояния в другое с выполнением требований, наложенных на выходные переменные. Сформулированы достаточные условия, при которых управление, найденное для линейной системы, переводит нелинейную модель в некоторое равновесное состояние с требуемыми изменениями выходных переменных модели. Дан пример, иллюстрирующий все этапы предложенного подхода.

Ключевые слова: нелинейная нормированная модель, равновесное состояние, сопутствующая линейная система, частично монотонная модель.

ВВЕДЕНИЕ

При моделировании динамических систем определенный интерес могут представлять установившиеся (равновесные) состояния исследуемой системы. Так, например, достижение равновесного состояния в эконометрической модели может свидетельствовать о наступлении периода «застоя» в моделируемой экономической системе. Однако то или иное равновесное состояние может не устраивать исследователя по каким-либо предметным соображениям: моделируемый «уровень жизни» слишком «низок», «цены» и «налоги» слишком «высоки» и т. п. В рамках используемой модели ему желательно предпринять комплекс каких-то предметно интерпретируемых «мер» для «улучшения» ситуации: другими словами, ему надо найти такие управления, которые перевели бы модель из «неудовлетворительного» равновесного состояния в какое-либо «хорошее», в котором равновесные значения интересующих исследователя (целевых) переменных его бы «удовлетворили». Решение этой задачи существенно зависит от типа и свойств принятой модели. В случае линейной модели и при выборе константных управлений решение этой задачи, не представляющее трудностей, было описано в работе [1].

Цель настоящей работы — дать решение задачи для более сложного случая, когда уравнения модели содержат билинейные и квадратичные члены. Это позволит распространить описанный в работе [1] линейный подход к управлению равновесными состояниями на модели, содержащие произведения переменных. Несмотря на очевидную практическую значимость решения этой задачи, работы, в которых бы она рассматривалась для указанных типов уравнений, автору не известны.

Для решения поставленной задачи в данной работе привлекается ряд условий, существенно облегчающих поиск решения, главное из которых заключается в предположении о единственности равновесного состояния модели для всякого допустимого константного вектора входов. В работах Э. Зонтага и его коллег, посвященных вопросам устойчивости нелинейных систем (см., например, работы [2—4]), системы с подобным свойством называются системами, обладающими «характеристикой», а само свойство — моностабильностью реакции системы на константный вектор входов. Выполнение этого условия вместе с некоторыми специальными условиями (см. далее § 2) позволяет сопоставить исходной нелинейной модели линейную систему с тем же равновесным состоянием. С помощью такой линейной системы искомые управления могут быть найдены посредством обычного метода наименьших квадратов (МНК). Показано, что найденные таким образом управления гарантируют перевод нелинейной модели из одного равновесного состояния в другое с выполнением наложенных требований на знаки приращений выходных переменных модели в случае, когда модель является так называемой частично монотонной системой (см. § 3). Теория монотонных систем, широко применяющихся для моделирования и решения биологических проблем, получила существенное развитие в работах Э. Зонтага и его коллег (см.библиографию, приведенную в статьях [2, 3]).

1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ФОРМАЛЬНАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Предмет настоящего рассмотрения — нелинейная модель, функционирующая в дискретном времени и определяемая совокупностью уравнений:

$$x_i(t+1) = f_i(X(t),\ U(t)), \quad i = 1, \ldots, n. \qquad (1)$$

Здесь t — моменты дискретного времени, принадлежащие множеству J_+ неотрицательных целых чисел, состояния $X(t)$ для любого $t \in J_+$ принадлежат полуоткрытому положительному единичному кубу[1] $K = [0, 1)^n$, а входы $U(t)$ — суть константные векторы, определенные в неотрицательном ортанте R_+^m.Считаем, что каждая из функций f_i может содержать, помимо линейных членов, суммы попарных произведений каких-либо координат входов на какие-либо координаты вектора состояния, а также попарные произведения координат вектора состояния. Для краткости, модель (1) с указанными свойствами будем называть *нелинейной нормированной моделью* (ННМ). Далее везде будем считать выполненными следующие ограничения на функции f_i:

— все функции f_i непрерывны и удовлетворяют условию $f_i(0, 0) = 0$, $i = 1, \ldots, n$;

— каждая входная переменная может входить лишь один раз в каждую из функций f_i либо в виде сомножителя при какой-либо координате состояния, либо как свободный член уравнения.

Для каждого $\xi \in K$ и каждого константного вектора входов $U \in R_+^m$ обозначим через $x(\bullet, \xi, U)$ траекторию системы (1) с начальным состоянием $X(0) = \xi$ и входом U. Из непрерывности функций f_i следует, что каждая траектория определяется однозначно на множестве J_+ и для каждого $U \in R_+^m$ и каждого $t \in J_+$ $X(t, \xi, U)$ непрерывно зависит от ξ. Вход U назовем *допустимым* для ННМ, если для любого состояния $\xi \in K$ каждая точка траектории $X(t, \xi, U)$ принадлежит кубу K. Достаточным условием допустимости константного входа U является выполнение следующих покоординатных соотношений для вектора состояния:

$$\sup_{\xi \in K} f_i(\bullet, \xi, U) \in [0, 1) \text{ для каждого } i = 1, \ldots, n.$$

Ключевым в данной работе является условие существования такой области $W \subseteq R_+^m$, что для любого допустимого константного вектора $U \in W$ в кубе K существует единственное равновесное состояние X_U, для которого справедливо: для любого $X(0) \in K$

$$\lim_{t \to \infty} X(t, X(0), U) = X_U \in K, \qquad (2)$$

где X_U — предельная точка траектории $X(t, \xi, U)$. В терминологии работ [2—4] такое свойство ННМ называется *моностабильностью* реакции системы на константный вектор входов. Область W предполагается неизвестной исследователю, так что всякое условие $U \in W$ проверяется экспериментально в процессе моделирования ННМ.

Формальная постановка рассматриваемой далее задачи выглядит так. Пусть для некоторого допустимого входа $U \in W$ выполняется условие (2), так что $X^* = X_U$ — равновесное состояние ННМ. В векторе состояния X выделяется некоторая совокупность так называемых *целевых* (или *выходных*) координат $Y = (y_1, \ldots, y_p)$, значения которых интересуют исследователя, и пусть $(y_1^*, y_2^*, \ldots, y_p^*)$ — значения этих координат в состоянии X^*. Исследователем задается вектор $Z^* = (z_1^*, z_2^*, \ldots, z_p^*)$ желательных значений выходных координат, по которому с учетом исходного состояния X^* определяется вектор знаков приращений значений выходных координат $SY = (\text{sign}(\Delta y_1), \ldots, \text{sign}(\Delta y_p))$. Задача состоит в нахождении такого допустимого константного корректирующего вектора $U_{\text{кор}}$, который переведет ННМ из состояния X^* в какое-либо (не задаваемое априори) другое равновесное состояние X^{**} с выполнением условия:

$$(\text{sign}(y_1^{**} - y_1^*),\ \text{sign}(y_2^{**} - y_2^*),\ \ldots,\ \text{sign}(y_p^{**} - y_p^*)) = SY. \qquad (5)$$

Далее показано, при каких допущениях эта задача может быть решена в рамках линейного подхода с помощью обычного МНК.

---

[1] Такой выбор области определения для состояний ННМ обусловлен тем обстоятельством, что ННМ строится в рамках качественного моделирования с использованием качественных непрерывных шкал в виде единичных положительных интервалов.

2. ПОНЯТИЕ И СВОЙСТВА СОПУТСТВУЮЩЕЙ СИСТЕМЫ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОЙ НОРМИРОВАННОЙ МОДЕЛИ

Пусть ННМ находится в некотором равновесном состоянии $X^* \in K$. Предположим, для простоты, что уравнение для координаты состояния x_k содержит один билинейный член вида $hx_i(t)u_j$ и один член вида $gx_p(t)x_q(t)$:

$$x_k(t+1) = A(k)X(t) + hx_i(t)u_j + gx_p(t)x_q(t). \quad (3)$$

Здесь $A(k)$ — k-я строка матрицы A коэффициентов при координатах вектора состояния, входящих линейно в уравнения ННМ. Поскольку равновесное состояние не меняется со временем, символ t в уравнении (3) можно опустить, и в равновесном состоянии X^* оно примет вид:

$$x_k^* = A(k)X^* + hx_i^*\, u_k^* + gx_p^*\, x_q^*. \quad (4)$$

«Звездочка» означает, что значения всех переменных рассматриваются в равновесном состоянии X^*. Уравнение (4) можно представить в линейном виде как

$$x_k^* = \left(A(k), \left(\frac{h}{2}\right)x_i^*, \left(\frac{h}{2}\right)u_k^*, \left(\frac{g}{2}\right)x_p^*, \left(\frac{g}{2}\right)x_q^*\right)\begin{pmatrix} X^* \\ u_k^* \\ x_i^* \\ x_q^* \\ x_p^* \end{pmatrix}. \quad (5)$$

Соотношения вида (5) открывают возможность для построения линейной системы по уравнениям ННМ и ее равновесным значениям переменных, для которой X^* является неподвижной точкой в кубе K, как и для ННМ. Назовем такую линейную систему *сопутствующей* (для ННМ) системой и будем обозначать ее как СС(X^*, U^*), где символы X^* и U^* указывают, что СС строится по известному равновесному состоянию X^* ННМ, обусловленному константным входом U^*. Пусть $V = (v_1, ..., v_n)$ — вектор состояния сопутствующей системы. Процедура формирования уравнений СС(X^*, U^*) выглядит следующим образом:

— каждому уравнению ННМ однозначно соответствует уравнение СС(X^*, U^*);

— все линейные члены, входящие в уравнения для ННМ и являющиеся произведениями какой-либо входной переменной или какой-либо координаты состояния на постоянный коэффициент, переносятся в соответствующие уравнения СС(X^*, U^*);

— всякое произведение входной переменной на переменную состояния вида $d_{ij}u_ix_j$ заменяется в уравнениях СС(X^*, U^*) суммой $(d_{ij}/2)(u_i^*\, v_j(t) + x_j^*\, u_i^*)$ («звездочка» по-прежнему говорит о том, что рассматривается значение данной переменной в равновесном состоянии X^*);

— всякое произведение переменных состояния вида $g_{pq}x_px_q$ заменяется в уравнениях СС(X^*, U^*) суммой $(g_{pq}/2)(x_q^*\, v_p(t) + x_p^*\, v_q(t))$;

— подобным образом преобразуется каждое из уравнений ННМ.

Считаем, что СС(X^*, U^*)так же, как и ННМ, определена на множестве J_+. Совокупность результирующих уравнений СС(X^*, U^*) представим в матричной форме (см. § 4) как

$$V(t+1) = A(X^*,\ U^*)V(t) + B(X^*)U, \quad t \in J_+,$$

где запись $A(X^*,\ U^*)$ и $B(X^*)$ указывает на то, что эти матрицы содержат координаты состояния и входные переменные, входящие в билинейные и квадратичные члены ННМ, и значения этих переменных определены в равновесном состоянии X^*. Если все собственные значения матрицы $A(X^*,\ U^*)$ лежат внутри единичной окружности на комплексной плоскости, то СС(X^*, U^*) — асимптотически устойчива (а. у.), т. е. справедливо соотношение:

$$\lim_{t\to\infty} V(t+1) = \lim_{t\to\infty} A(X^*,\ U^*)V(t) + B(X^*)U^* = X^*.$$

Это означает, что равновесное состояние X^* ННМ является а. у. состоянием и для СС(X^*, U^*). Ключевой момент при использовании СС(X^*, U^*) — проверка СС(X^*, U^*)на а. у. путем анализа собственных чисел матрицы $A(X^*,\ U^*)$.

3. УПРАВЛЕНИЕ РАВНОВЕСНЫМИ СОСТОЯНИЯМИ НЕЛИНЕЙНОЙ НОРМИРОВАННОЙ МОДЕЛИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ СОПУТСТВУЮЩЕЙ ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ

Эволюция СС(X^*, U^*) из произвольного начального состояния $V(0)$ под действием константного входа U^* описывается уравнением

$$V(s) = A^s\, V(0) + (E + A + A^2 + ... + A^s)BU^*,$$

где $A = A(X^*,\ U^*)$, $B = B(X^*)$. Если СС(X^*, U^*) — а. у., то матричный ряд $E + A + A^2 + ... + A^s + ...$ сходится, откуда вытекает асимптотическое соотношение для равновесного состояния X^*:

$$X^* = (E + A + A^2 + \ldots + A^s + \ldots)BU^*. \qquad (6)$$

Зададимся конечным числом q членов ряда $E + A + A^2 + \ldots + A^s + \ldots$ в пределах приемлемой точности выполнения соотношения (6) и обозначим $Q(X^*, U^*) = E + A + A^2 + \ldots + A^q$, тогда

$$V^* = Q(X^*, U^*)B(X^*)U^* \approx X^*, \qquad (7)$$

где V^* — равновесное состояние СС(X^*, U^*) с учетом «обрезания» матричного ряда в соотношении (6). Матрица $Q(X^*, U^*)B(X^*)$ однозначно определяет связь между значениями произвольных константных входов и равновесными значениями координат состояния в а. у. СС(X^*, U^*).

Выделим из совокупности X координат состояния ННМ выходные (целевые) переменные, и пусть Y есть p-вектор выходных переменных: $Y = CX$, где C — соответствующая (0, 1)-матрица размера $p \times n$. По аналогии с матрицей $Q(X^*, U^*)B(X^*)$ можно сказать, что матрица $CQ(X^*, U^*)B(X^*)$ однозначно определяет связь между значениями произвольных константных входов и равновесными значениями выходных переменных в а. у. СС(X^*, U^*).

Далее по умолчанию будем считать, что СС(X^*, U^*) — а. у. Сопоставим вектору $Y^* = CX^*$ вектор Z^* того же размера, формируемый по правилу: если для данной координаты y_i из вектора Y^* желательно увеличение (уменьшение) ее равновесного значения до некоторой величины y_i^+ (y_i^-), то значение соответствующей координаты в векторе Z^* принимаем равным ее наибольшему (наименьшему) желательному значению. Если же желательно сохранение ее прежнего равновесного значения, то в векторе Z^* ставим это значение. Вместе с вектором Z^* задается вектор SY знаков желательных приращений выходных координат ННМ.

Для поиска корректирующего константного вектора $U_{\text{кор}}$ привлечем СС(X^*, U^*).При этом используем соотношение (для простоты считаем, что все входные переменные из вектора U можно изменять):

$$CQ(X^*, U^*)B(X^*)U_{\text{кор}} = Z^*. \qquad (8)$$

Уравнение (8) решается с помощью обычного МНК с линейными ограничениями вида

$$M(Z^*, U_{\text{кор}}) \leqslant D, \qquad (9)$$

учитывающими предметную и формальную допустимость тех или иных изменений входных переменных. Предметная допустимость может быть обусловлена предметной спецификой рассматриваемой задачи и прежде всего — ограниченностью «ресурсов» на выработку того или иного предметно интерпретируемого «управления». Формальная же допустимость состоит в том, чтобы найденный в результате решения задачи (8), (9) вектор был допустимым для ННМ, т. е. не выводил ее из куба K. Более конкретно ограничения (9) представлены в Приложении.

Пусть $U_{\text{кор}} = (CQ(X^*, U^*)B(X^*))^+Z^*$ есть МНК-решение задачи (8), (9), где запись $(G)^+$ означает псевдоинверсию матрицы G, стоящей в скобках. Обозначим через X^{**} равновесное состояние, в которое перейдет ННМ под действием вектора $U_{\text{кор}}$ и для которого справедливо:

$$X^{**} = F(X^{**}, U_{\text{кор}}),$$

где F — вектор-функция с координатами f_i, $i = 1, \ldots, n$. По предположению, для всякого допустимого вектора U ННМ обладает свойством моностабильности, так что начальное состояние в $F(\cdot, U_{\text{кор}})$ может быть произвольным. Анализ перехода ННМ из состояния X^* в состояние X^{**} проводится с помощью СС «переходного периода» СС((X^*, $U_{\text{кор}}$), поскольку именно эта СС обусловливает переход сопутствующей системы из состояния X^* в некоторое другое равновесное состояние. В СС((X^*, $U_{\text{кор}}$) равновесные значения переменных состояния те же, что и в X^*, а входы — координаты найденного вектора $U_{\text{кор}}$. Будем считать, что СС(X^*, $U_{\text{кор}}$) также а. у. система[2]. Пусть V^{**} — равновесное состояние, в которое перейдет а. у. СС(X^*, $U_{\text{кор}}$) и которое по аналогии с соотношением (12), определяется как

$$V^{**} = Q(X^*, U_{\text{кор}})B(X^*)U_{\text{кор}} \neq X^{**}.$$

Найдем условия, при которых знаки приращений переменных из $Y^{**} = CX^{**}$ совпадают со знаками приращений соответствующих переменных при переходе СС(X^*, $U_{\text{кор}}$) из состояния V^* в состояние V^{**}.

Далее потребуются некоторые понятия из структурного анализа линейных моделей (см., например, работу [5]). Обозначим $\Delta U_{\text{кор}} = U_{\text{кор}} - U^*$. Рассмотрим соотношение

$$CQ(X^*, U_{\text{кор}})B(X^*)\Delta U_{\text{кор}} = \Delta Y_{\text{СС}} = CV^{**} - CV^*.$$

---

[2] Заметим, что СС(X^*, $U_{\text{кор}}$) будет отличаться от СС(X^{**}, $U_{\text{кор}}$), где X^{**} — равновесное состояние, в которое перейдет ННМ под действием вектора $U_{\text{кор}}$.

Будем говорить, что корректирующее воздействие $\Delta u_i \in \Delta U_{кор}$ *согласовано с выходной переменной* y_{jCC} в СС(X^*, $U_{кор}$), если при изменении в момент коррекции $t_{кор}$ u_i на $u_i + \Delta u_i$ результирующее (установившееся) приращение Δy_j значения переменной y_j происходит в желательном направлении: $\text{sign}(\Delta y_j) \in SY$. Формально этот факт выражается асимптотическим соотношением

$$\text{sign}(\Delta u_i)\text{sign}(cqb_{ij}) = \text{sign}(\Delta y_{jCC}), \qquad (10)$$

где cqb_{ij} — (i, j)-й элемент матрицы $CQ(X^*$, $U_{кор})B(X^*)$. Отметим, что в линейной системе справедливость соотношения (10) не зависит от размера изменения Δu_i входа u_i.

Корректирующее воздействие $\Delta u_i \in \Delta U_{кор}$ согласовано с множеством Y_{CC}, если Δu_i согласовано с каждой переменной из Y_{CC}. Переменная y_{jCC} не зависима от Δu_i, если $cqb_{ij} = 0$. По предположению, координаты вектора $U_{кор}$ независимые. Но тогда в линейной СС(X^*, $U_{кор}$) их суммарное действие равно сумме действий одновременных одиночных коррекций.

Аналогично, выходную переменную y_{kCC} считаем *согласованной с выходной переменной* y_{jCC}, если при ее приращении Δy_{kCC} в момент коррекции $t_{кор}$ в желательном направлении установившееся приращение Δy_{jCC} значения переменной y_j происходит также в желательном направлении, что выражается соотношением

$$\text{sign}(\Delta y_{kCC})\text{sign}(cq_{kj}) = \text{sign}(\Delta y_{jCC}), \qquad (11)$$

где cq_{ij} — (i, j)-й элемент матрицы $CQ(X^*$, $U_{кор})$. Справедливость соотношения (11) также не зависит от размера изменения Δy_{kCC}. Переменная y_{jCC} независима от y_{kCC}, если $cq_{kj} = 0$. Множество Y_{CC} взаимно согласовано, если согласована каждая пара его взаимно зависимых переменных.

Справедливо очевидное.

Предложение 1. *Если координаты вектора* $\Delta U_{кор}$ *согласованы с переменными из множества* Y_{CC} *и множество* Y_{CC} *взаимно согласовано, то переход* СС(X^*, $U_{кор}$) *из состояния* V^* *в состояние* V^{**} *происходит без изменения значений выходных переменных из множества* Y_{CC} *в нежелательных направлениях.* ♦

Вернемся к ННМ. Проведению подобных рассуждений в ННМ мешает наличие билинейных и квадратичных членов: при отклонениях разных знаков в сомножителях билинейного (квадратичного) члена направление изменения его значения зависит от *соотношения между значениями отклонений* сомножителей, что делает невозможным прямое применение приведенного выше анализа к исходной ННМ. Покажем, что такое применение возможно для всякой подсистемы ННМ1 в ННМ, удовлетворяющей условиям:

— ННМ1 независима в ННМ;

— все слагаемые в ННМ1, кроме входных переменных, входящих в ННМ1 как свободные члены, положительны.

Независимость ННМ1 означает, что среди уравнений ННМ можно выделить такую совокупность S уравнений, в которую входят координаты состояния лишь из этой совокупности. Второе ограничение на ННМ1 похоже на требование ее монотонности. Динамическая система (для простоты — без выходов) называется *монотонной*, если на множествах ее состояний и входов определены соответствующие частичные порядки и выполняется условие: из того, что $X1 \leqslant X2$ и $U1 \leqslant U2$ следует $F(X1, U1) \leqslant F(X2, U2)$ (см., например, статьи [2, 3]).По аналогии с определением монотонности системы определим в кубе K частичный порядок «$\leqslant$» для состояний[3] ННМ1. Назовем ННМ1 *частично монотонной*, если для каждого допустимого константного входа U выполняется условие: из того, что $X1 \leqslant X2$, следует $F(X1, U) \leqslant F(X2, U)$. Нетрудно заметить, что при частично монотонной ННМ1 в СС(X^*, $U_{кор}$) также можно выделить частично монотонную подсистему СС1 с теми же координатами состояния, что и в ННМ1, причем матрица $A1$ подсистемы СС1 содержит лишь неотрицательные элементы. Но тогда и в матрице $CQ(X^*$, $U_{кор})$ содержится подматрица $CQ1$ той же размерности, что и $A1$, и также с неотрицательными элементами. Обозначим через $X1(X1_{CC1})$ множество координат состояния ННМ1(СС1), а через $U1 \subseteq U$ — множество входных переменных в ННМ1.

Предложение 2. *Допустим, что в ННМ можно выделить частично монотонную подсистему ННМ1, а* $U_{кор}$ *— вектор корректирующих воздействий, найденный путем решения задачи* (8), (9). *Если выполняются условия*:

[3] Поскольку выходы ННМ1 суть некоторые координаты состояния, а входы могут входить в уравнения ННМ1 с разными знаками, рассматриваем частичный порядок лишь на множестве состояний ННМ1.

1) *желательные направления изменения для всех координат состояния из $X1$ совпадают*[4];

2) *все коррекции из $\Delta U1_{\text{кор}} \subseteq \Delta U_{\text{кор}}$, действующие на координаты состояния из $X1$, согласованы с этими координатами,*

то направления изменения координат из $X1$ при переходе ННМ из состояния X^* в состояние X^{**} под действием вектора $U_{\text{кор}}$ совпадают с направлениями изменения этих же координат при переходе $\text{СС}(X^*, U_{\text{кор}})$ из состояния V^* в состояние V^{**}.

Доказательство. Из частичной монотонности ННМ1 следует, что в матрице $CQ(X^*, U^*)$ содержится подматрица $CQ1$ с неотрицательными элементами, отображающая влияние каждой пары координат из $X1_{\text{СС1}}$ друг на друга в установившемся состоянии V^{**}. Из неотрицательности матрицы $CQ1$ и условия 1 следует, что множество $X1_{\text{СС1}}$ в $CC1$ взаимно согласовано. Сопоставим ННМ1 и $\text{СС1}(X^*, U_{\text{кор}})$. По построению $\text{СС}(X^*, U_{\text{кор}})$ каждый билинейный (квадратичный) член в ННМ1 заменяется парой линейных членов в $\text{СС1}(X^*, U_{\text{кор}})$). При этом, если линейные члены в каждой из таких пар не изменяются в разных направлениях, то направление изменения соответствующего билинейного (квадратичного) члена совпадает с направлением изменения суммы этих линейных членов. А если при этом функция f_i частично монотонна, то и ее значение будет изменяться в сторону изменения входящих в нее билинейных (квадратичных) членов. Поскольку при этом желательные направления изменений таких линейных членов совпадают, то все функции f_i будут изменяться в желательном направлении. Если некоторое корректирующее воздействие $\Delta u_i \in \Delta U_{\text{кор}}$ согласовано с множеством $X1_{\text{СС}}$, то под действием Δu_i координаты из $X1_{\text{СС}}$, зависящие от Δu_i, получат приращения в желательном направлении. С учетом сказанного приращения в желательном направлении получат также соответствующие координаты из $X1$. ♦

Таким образом, если выходными переменными ННМ являются координаты состояния частично монотонной ННМ1, то при выполнении условий предложения 2 исходная задача о переводе ННМ из одного равновесного состояния в другое имеет решение.

4. ПРИМЕР

Пусть ННМ описывается уравнениями

$$x(1, t+1) = 0{,}5(x(1, t) + x(3,t))^2 - 0{,}2x(1, t) + u3x(3, t);$$

$$x(2, t+1) = 0{,}3x(2, t)x(3, t) + 0{,}4x(2, t) + u2x(3, t) - 0{,}05u1;$$

$$x(3, t+1) = 0{,}2(x(3, t) + x(2, t))^2 + u3,$$

где $u1$, $u2$, $u3$ — константные входы ННМ. Пусть $u1 = 0{,}1$, $u2 = 0{,}2$, $u3 = 0{,}3$. Непосредственная проверка условия (2) показывает, что эти входы являются допустимыми. Обозначим $U^* = (0{,}1;\ 0{,}2;\ 0{,}3)$. Равновесное состояние ННМ есть $X^* = (x^*(1), x^*(2), x^*(3)) = (0{,}2185;\ 0{,}1289;\ 0{,}3449)$. После преобразования каждого билинейного и квадратичного членов в виде суммы линейных членов уравнения $\text{СС}(X^*, U^*)$ примут вид:

$$v(1, t+1) = (0{,}5x^*(1) + 0{,}5x^*(3) - 0{,}2)v(1, t) + (0{,}5x^*(1) + 0{,}5x^*(3) + 0{,}5u3)v(3, t) + 0{,}5u3x^*(3);$$

$$v(2, t+1) = (0{,}15x^*(3) + 0{,}4)v(2, t) + (0{,}15x^*(2) + 0{,}5u2)v(3, t) + 0{,}5u2x^*(3) - 0{,}05u1;$$

$$v(3, t+1) = (0{,}2x^*(3) + 0{,}2x^*(2))v(2, t) + (0{,}2x^*(3) + 0{,}2x^*(2))v(3, t) + u3.$$

Матрицы $A(X^*, U^*)$ и $B(X^*)\text{СС}(X^*, U^*)$ выглядят следующим образом:

$$A(X^*, U^*) = \begin{pmatrix} 0{,}5x^*(1) + 0{,}5^*(3) - 0{,}2 & 0 & 0{,}5x^*(1) + 0{,}5^*(3) + 0{,}5u3 \\ 0 & 0{,}15x^* + 0{,}4 & 0{,}15x^*(2) + 0{,}5u^*2 \\ 0 & 0{,}2x^*(3) + 0{,}2x^*(2) & 0{,}2x^*(3) + 0{,}2x^*(2) \end{pmatrix},$$

$$B(X^*) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0{,}5x^*(3) \\ -0{,}05 & 0{,}5x^*(3) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Евклидова норма матрицы $A(X^*, U^*)$ равна 0,5258. Равновесное состояние X^*, общее для ННМ и $\text{СС}(X^*, U^*)$, является а. у. Нетрудно убедиться в том, что два последних уравнения в совокупности исходных уравнений ННМ определяют частично монотонную подсистему ННМ1. Обозначим $X1 = X1_{\text{СС1}} = (x2, x3)$, $U1 = U = (u1, u2, u3)$.

Коррекция с возрастанием координат из ННМ1. Пусть задача заключается в переводе ННМ из равновесного состояния $X^* = (x^*(1), x^*(2), x^*(3))$ в какое-либо другое равновесное состояние X^{**} с увеличением значений координат из $X1$. Пусть для определенности $x^*(2) \leqslant y^{**}(2) \leqslant 0{,}4$, $x^*(3) \leqslant y^{**}(3) \leqslant 0{,}5$. Поскольку $x1$ не входит в ННМ1, положим для определенности $x^{**}(1) = 0$. Тогда вектор желательных равновесных значений $Z^* = (0;\ 0{,}4;\ 0{,}5)$.

Допустим, что в матрицу ограничений входят следующие ограничения:

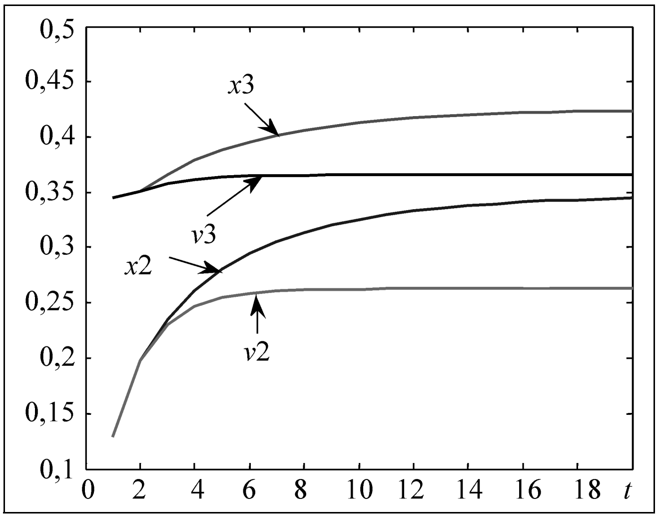
— координаты вектора $U_{\text{кор}}$ не должны быть отрицательными;

— координаты $x2$ и $x3$ должны удовлетворять неравенствам $x^*(2) \leqslant y^{**}(2) \leqslant 0{,}4$, $x^*(3) \leqslant y^{**}(3) \leqslant 0{,}5$;

— $u_{\text{кор}}(2) + u_{\text{кор}}(3) \leqslant 0{,}7$ («ресурсное» ограничение).

При задании ограничений необходимо следить за тем, чтобы скорректированное движение ННМ к новому равновесному состоянию не выходило за пределы куба K. В данном случае решение задачи (8), (9) имеет вид: $U_{\text{кор}} = (0;\ 0{,}3857;\ 0{,}3061)$, а вектор корректирующих воздействий $\Delta U_{\text{кор}} = U_{\text{кор}} - U^* = (-0{,}1;\ 0{,}1857;\ 0{,}0061)$. От-

[4] Это условие вытекает также и из теоремы Камке для монотонных систем [2] при ее применении к равновесным состояниям частично монотонной ННМ1.



Графики движения 2-й и 3-й координат состояния ННМ и СС(X^*, $U_{кор}$) от исходных равновесных значений к новым равновесным значениям

личие вектора $U_{кор}$ от вектора U^* приводит к тому, что матрица $A(X^*, U_{кор})$ отличается от матрицы $A(X^*, U^*)$, поскольку член $0{,}5u^*(2)$, входящий в элемент (2, 3) матрицы $A(X^*, U^*)$, заменяется на $0{,}5u_{кор}$ (2) в $A(X^*, U_{кор})$. Матрицы $Q(X^*, U_{кор})$ и $Q(X^*, U^*)B(X^*)$ СС(X^*, $U_{кор}$) имеют вид:

$$Q(X^*, U_{кор}) = \begin{pmatrix} 1{,}0890 & 0{,}0940 & 0{,}5450 \\ 0 & 1{,}9001 & 0{,}4451 \\ 0 & 0{,}1988 & 1{,}1512 \end{pmatrix} \ne Q(X^*, U^*),$$

$$Q(X^*, U_{кор})B(X^*) = \begin{pmatrix} -0{,}0047 & 0{,}0162 & 0{,}7327 \\ -0{,}0950 & 0{,}3277 & 0{,}4451 \\ -0{,}0099 & 0{,}0343 & 1{,}1512 \end{pmatrix} \ne$$

$$\ne Q(X^*, U^*)B(X^*).$$

Поскольку в данном случае:

— ННМ1частично монотонна;

— желательные изменения координат состояния из ННМ1 однонаправлены (положительны);

— все корректирующие воздействия из $\Delta U_{кор}$ согласованы с координатами состояния из ННМ1,

то выполняются условия предложения 2. Вектор новых равновесных значений ННМ X^{**} = (0,3687; 0,3447; 0,4239). Графики движения координат $x2$ и $x3$ ННМ и СС(X^*, $U_{кор}$)от равновесных значений $x^*(2)$ и $x^*(3)$ к новым равновесным значениям представлены на рисунке.

Если решение, полученное на одном этапе коррекции (т. е. перевод ННМ из X^* в X^{**}) не пригодно по каким-либо причинам, можно рассмотреть ряд аналогичных последовательных этапов коррекции. Подобным же образом рассматривается случай коррекции с убыванием координат из ННМ1.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предложенный подход к управлению равновесными состояниями нелинейной нормированной модели (ННМ) с использованием линейных сопутствующих систем позволяет при выполнении определенных условий существенно упростить задачу управления ее равновесными состояниями и использовать для моделирования динамических систем более сложные типы моделей. В частности, данный подход допускает очевидное расширение на нормированные полилинейные модели: в этом случае по аналогии с условием (2) всякий полилинейный член в уравнениях модели, являющийся произведением из k переменных, в равновесном состоянии может быть представлен в виде линейной суммы из k слагаемых с общим множителем h/k), где h — коэффициент при данном полилинейном члене.

Автор благодарен участникам семинара Института проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН «Математические методы в теории активных систем» и его руководителю чл.-корр. РАН Д.А. Новикову, а также рецензентам за ряд замечаний, способствовавших уточнению отдельных положений настоящей работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Корноушенко Е.К., Максимов В.И.* Структуризация целенаправленного взаимодействия участников в сложных ситуациях // Матер. 1-й междунар. конф. «Когнитивный анализ и управление развитием ситуаций (CASC' 2001)», Москва, 11—12 октября 2001 г. — М., 2001. — Т. 2. — С. 118—135.
2. *Sontag E.D.* Monotone and near-monotone biochemical networks // Syst. Synth. Biol. — 2007. — April — 1(2). — P. 59—87. — URL: http://www.ncbi.nlm.nih.gov/pmc/articles/PMC2533521/?tool=pmcentrez/ (дата обращения 28.12.2010).
3. *Angeli D., Sontag E.D.* Monotone Control Systems // IEEE Trans. Automat. Control. — 2003. — Vol. 48, N 10. — P. 1684—1698. — URL: http://www.mit.edu/~esontag/FTP_DIR/angeli-sontag-monotone-TAC03.pdf (дата обращения 28.12.2010).
4. *Ryan E.P., Sontag E.D.* Well-defined steady-state response does not imply CICS // Syst. & Control Letters. — 2006. — Vol. 55. — P. 707—710. — URL: http://www.math.rutgers.edu/~sontag/FTP_DIR/ryan-sontag-SCL06.pdf (дата обращения 28.12.2010).
5. *Корноушенко Е.К., Максимов В.И.* Управление ситуацией с использованием структурных свойств ее когнитивной карты // Тр. ИПУ РАН. — Т. XI. — М., — 2000. — С. 85—90.

Статья представлена к публикации членом редколлегии В.Ю. Рутковским.

Корноушенко Евгений Константинович — д-р техн. наук, гл. науч. сотрудник, Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, г. Москва, ☎ (495) 334-90-00.