УДК 330.356.7:519.21

ПОСТРОЕНИЕ ПРОИЗВОДСТВЕННОЙ CES-ФУНКЦИИ НА ОСНОВЕ ДИСКРЕТНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕЙБУЛЛА

В. В. Коков*, В. В. Соколянский**

*,**Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана, г. Москва

*✉ kokovvsevo@gmail.com, **✉ sokolyansky63@mail.ru

Аннотация. Рассмотрен один из вероятностных подходов к получению производственной CES-функции. Подход заключается в нахождении математического ожидания и медианы функции Леонтьева (количества выпускаемой продукции) как случайной величины, зависимой от мощностей факторов производства – отношений факторов к их удельным значениям. Обоснован вид функции распределения минимума из набора независимых случайных величин. Показано выражение математического ожидания и медианы количества выпускаемой продукции в виде CES-функций в случае, когда мощности факторов производства имеют непрерывные распределения Вейбулла. Предложено рассмотреть дискретно распределённые факторы производства на примере геометрического закона. Выполнена попытка получения CES-функции в случае, когда мощности факторов имеют дискретные распределения Вейбулла. Описаны трудности, возникающие при аналитическом использовании математического ожидания функции Леонтьева.

Ключевые слова: производственная функция, производственная CES-функция, вероятностный подход, распределение Вейбулла, дискретное распределение Вейбулла, геометрическое распределение, математическое ожидание, медиана.

ВВЕДЕНИЕ

Традиционно производственные функции, устанавливающие связь между факторами производства $X_1,\dots,X_n$ и количеством Q выпускаемой предприятием (или страной) продукции, описывают в терминах, связанных с предельной нормой замещения S_{ij} и эластичностью замещения σ_{ij} фактора X_i фактором X_j; при этом предполагают, что факторы принимают детерминированные значения [1]. В частности, для двух факторов X_1 и X_2 свойством $\sigma_{12}=\mathrm{const}$ обладает функция вида CES.

Однако начиная со второй половины XX в. выделился вероятностный подход к описанию производственных функций, получивший особое развитие в 1990–2015 гг. [2–5]. Наиболее значимым достижением здесь явилась разработка теоретического аппарата на основе следующих понятий: технология (идея), локальная производственная функция, технологическое меню, глобальная (агрегативная) производственная функция [2]. Коротко поясним суть на следующем примере [3].

Пусть в производстве задействованы два фактора X_1 и X_2, и пусть x_1 и x_2 — некоторые технологические параметры, соответствующие данным факторам. Рассмотрим производственную функцию вида CES

$$Y=A\left(\psi\left(\tfrac{X_1}{x_1}\right)^{\theta}+(1-\psi)\left(\tfrac{X_2}{x_2}\right)^{\theta}\right)^{\frac{1}{\theta}},$$

где $A>0$, $\psi\in(0;1)$, $\theta\in(-\infty;0)\cup(0;1)$ – константы.

Пару значений параметров (x_1,x_2) называют *технологией*, или *идеей*. Функцию Y с фиксированными значениями x_1 и x_2 называют *локальной производственной функцией, соответствующей технологии* (x_1,x_2).

Пусть на значения параметров x_1 и x_2 наложена связь – *технологическое меню*. Рассмотрим связь вида

$$T_1(x_1)T_2(x_2)=N,$$

где $T_1(x_1)$ и $T_2(x_2)$ – некоторые (неизвестные) функции одной переменной, N – константа.

В рамках указанного примера возникает задача: при выбранных значениях факторов X_1 и X_2 найти такой вид функций $T_1(x_1)$ и $T_2(x_2)$, что при наложенной связи функция Y будет достигать наибольших значений (при этом Y будет называться *глобальной производственной функцией*):

$$\begin{cases} Y = A\left(\psi\left(\frac{X_1}{x_1}\right)^{\theta}+(1-\psi)\left(\frac{X_2}{x_2}\right)^{\theta}\right)^{\frac{1}{\theta}} \to \max; \\ T_1(x_1)T_2(x_2)=N. \end{cases}$$

Воспользовавшись методом множителей Лагранжа и методом разделения переменных, можно показать, что функции $F_1(x_1)=1-T_1(x_1)$ и $F_2(x_2)=1-T_2(x_2)$ будут представлять собой функции распределения Вейбулла. Специалистами исследована и обратная задача [4]: по распределённым по закону Вейбулла параметрам x_1 и x_2 восстановить глобальную производственную функцию как функцию вида CES.

Иной подход позднее был предложен А. В. Михеевым [6]. Параметром x_i было предложено обозначать *удельное значение фактора* X_i – количество этого фактора, необходимое для изготовления одной единицы продукции. Было введено понятие *мощности* Q_i *фактора* X_i как отношения количества фактора X_i к его удельному значению x_i :

$$Q_i=\frac{X_i}{x_i}.$$

Предложено рассматривать мощности факторов как случайные величины. Рассмотрена двухфакторная производственная функция Леонтьева $Q=\min\{Q_1,Q_2\}$ и показано, что математическое ожидание этой функции можно найти через двойной интеграл [6]

$$EQ=\int_0^{+\infty} q_1\left(\int_{q_1}^{+\infty}(p_{Q_1Q_2}(q_1,q_2)+p_{Q_1Q_2}(q_2,q_1))dq_2\right)dq_1, \quad (1)$$

где $p_{Q_1Q_2}(q_1,q_2)$ – совместная плотность распределения случайных величин Q_1 и Q_2. С помощью формулы (1) было показано, что если Q_1 и Q_2 независимы и имеют распределения Вейбулла с одинаковым коэффициентом формы $\beta>0$, то EQ выражается через математические ожидания EQ_1 и EQ_2 величин Q_1 и Q_2 в виде CES-функции:

$$EQ=\left((EQ_1)^{-\beta}+(EQ_2)^{-\beta}\right)^{-\frac{1}{\beta}}.$$

При использовании формулы (1) имеют место достаточно объёмные выкладки. Однако возможен иной путь: найти закон (функцию или плотность) распределения случайной величины $Q=\min\{Q_1,Q_2\}$ и выразить математическое ожидание EQ по определению. Если бы случайные величины Q_1 и Q_2 были независимы и подчинялись одинаковому закону распределения, то эта задача превратилась бы в известную из математической статистики задачу о законе распределения минимальной реализации из случайной выборки с заданной генеральной совокупностью [7]. Достоинство указанной задачи в том, что она позволяет работать со случайной выборкой любого объёма *n*, т. е. возможно рассмотрение *n* мощностей $Q_1,\ldots,Q_n$. Именно некоторая модификация этой задачи и будет представлять интерес для дальнейших изысканий.

Следует отметить, что в работах [2–6] рассматривались лишь непрерывные модели, в то время как факторы производства или их мощности в реальности могут представлять собой дискретные величины. Здесь интерес представляет рассмотрение мощностей факторов производства как дискретно распределённых случайных величин и попытка построения на их основе производственных функций. Особенно важно рассмотреть дискретный аналог распределения Вейбулла и аналитическими методами попытаться воссоздать на его основе CES-функцию.

Исходя из вышесказанного, выделим ряд задач:

- Предложить эффективный метод нахождения закона распределения функции Леонтьева от мощностей факторов производства как независимых случайных величин.
- Показать возможность получения CES-функции от математических ожиданий и медиан мощностей *n* факторов производства в случае, когда мощности как независимые случайные величины имеют непрерывные распределения Вейбулла с одинаковым коэффициентом формы.
- Предложить рассмотрение дискретно распределённых мощностей факторов производства на примере геометрического закона.
- Аналитическими методами провести попытку построения CES-функции в случае, когда мощности факторов как независимые случайные величи-

ны имеют дискретные распределения Вейбулла с одинаковым коэффициентом формы.

1. ОБЩЕЕ УТВЕРЖДЕНИЕ

Пусть в производстве задействовано *n* невзаимозаменяемых факторов, мощности которых обозначим $Q_1, \ldots, Q_n$. Для невзаимозаменяемых факторов можем применить принцип производства Леонтьева, согласно которому количество выпускаемой продукции равно наименьшей из мощностей используемых факторов производства. Кроме того, будем рассматривать мощности $Q_1, \ldots, Q_n$ как независимые случайные величины.

Будем основываться на следующем утверждении.

Утверждение 1. *Пусть $Q_1, \ldots, Q_n$ – независимые случайные величины, каждая из которых имеет функцию распределения вида*

$$F_{Q_i}(q) = \begin{cases} f_i(q), & q \ge b_i; \\ 0, & q < b_i, \end{cases}$$

где b_i – некоторые числа. Тогда функция распределения случайной величины

$$Q = \min\{Q_1, \ldots, Q_n\}$$

имеет вид

$$F_Q(q) = 1 - \prod_{i=1}^{n} (1 - F_{Q_i}(q)). \qquad (2)$$

Доказательство.

$$F_Q(q) = P\{Q < q\} = 1 - P\{Q \ge q\} =$$
$$= 1 - P\{\min\{Q_1, \ldots, Q_n\} \ge q\} = 1 - P\{Q_1 \ge q, \ldots, Q_n \ge q\}.$$

Но $P\{Q_1 \ge q, \ldots, Q_n \ge q\} = P\{Q_1 \ge q\} \cdot \ldots \cdot P\{Q_n \ge q\}$, так как $Q_1, \ldots, Q_n$ независимы. Таким образом,

$$F_Q(q) = 1 - P\{Q_1 \ge q\} \cdot \ldots \cdot P\{Q_n \ge q\},$$

откуда получаем формулу (2). ♦

Замечание. Далее в работе встретятся дискретно распределённые случайные величины $Q_1, \ldots, Q_n$ с целочисленными областями возможных значений 1, 2, 3, … или 0, 1, 2, …; для них утверждение 1 остаётся в силе (для простоты можно представить, что b_i – целые числа и что из множества $q \ge b_i$ отбираются целые числа).

2. СЛУЧАЙ НЕПРЕРЫВНЫХ ВЕЛИЧИН

Представим Q_1 и Q_2 как мощности некоторых факторов производства. Предположим, что это две независимые непрерывные случайные величины, распределённые по законам Вейбулла [8] с одинаковым коэффициентом формы $\beta > 0$ и коэффициентами $\alpha_1 > 0$ и $\alpha_2 > 0$:

$$F_{Q_1}(q) = \begin{cases} 1 - e^{-\alpha_1 q^\beta}, & q \ge 0; \\ 0, & q < 0, \end{cases}$$

$$F_{Q_2}(q) = \begin{cases} 1 - e^{-\alpha_2 q^\beta}, & q \ge 0; \\ 0, & q < 0. \end{cases}$$

Пусть Q – количество выпускаемой продукции – зависит от мощностей Q_1 и Q_2 факторов согласно принципу производства Леонтьева:

$$Q = \min\{Q_1, Q_2\}.$$

Применяя утверждение 1, получаем

$$F_Q(q) = \begin{cases} 1 - e^{-\alpha q^\beta}, & q \ge 0; \\ 0, & q < 0, \end{cases}$$

где $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$. Так, случайная величина Q имеет распределение Вейбулла. Запишем её математическое ожидание [8]:

$$EQ = \alpha^{-\frac{1}{\beta}} \Gamma\left(\frac{1}{\beta} + 1\right) = (\alpha_1 + \alpha_2)^{-\frac{1}{\beta}} \Gamma\left(\frac{1}{\beta} + 1\right), \qquad (3)$$

где Γ – гамма-функция.

Из формул для математических ожиданий EQ_1 и EQ_2 случайных величин Q_1 и Q_2

$$EQ_1 = \alpha_1^{-\frac{1}{\beta}} \Gamma\left(\frac{1}{\beta} + 1\right),$$

$$EQ_2 = \alpha_2^{-\frac{1}{\beta}} \Gamma\left(\frac{1}{\beta} + 1\right)$$

выражаем коэффициенты α_1 и α_2 и, подставляя их в формулу (3), получаем:

$$EQ = \left((EQ_1)^{-\beta} + (EQ_2)^{-\beta}\right)^{-\frac{1}{\beta}}, \qquad (4)$$

что определяет производственную CES-функцию.

В дальнейшем интерес также представляет и частный случай при $\beta = 1$. При этом распределение Вейбулла (для Q_1, Q_2, Q) превращается в экспоненциальное, а выражение (4) примет вид

$$EQ = \frac{EQ_1 EQ_2}{EQ_1 + EQ_2}. \qquad (5)$$

Проведённые выкладки можно обобщить на случай *n* факторов. Кроме того, вместо математических ожиданий можно рассмотреть и другие характеристики случайных величин, например, медианы.

Утверждение 2. *Пусть* Q_i $(i=1,...,n)$ *– мощности факторов производства, представимые как независимые непрерывные случайные величины, распределённые по законам Вейбулла с одинаковым коэффициентом формы* $\beta>0$ *и коэффициентами* $\alpha_1>0,\ldots,\alpha_n>0$:

$$F_{Q_i}(q)=\begin{cases}1-e^{-\alpha_i q^\beta}, & q\ge 0;\\ 0, & q<0,\end{cases}$$

и пусть количество выпускаемой продукции Q *определяется принципом Леонтьева:*

$$Q=\min\{Q_1,...,Q_n\}.$$

Тогда математическое ожидание EQ *и медиана* M *величины* Q *выражаются через соответственно математические ожидания* EQ_i *и медианы* M_i *величин* Q_i *как производственные CES-функции:*

$$EQ=\left((EQ_1)^{-\beta}+...+(EQ_n)^{-\beta}\right)^{-\frac{1}{\beta}}, \tag{6}$$

$$M=\left(M_1^{-\beta}+...+M_n^{-\beta}\right)^{-\frac{1}{\beta}}. \tag{7}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Применяя утверждение 1, получаем функцию распределения Вейбулла

$$F_Q(q)=\begin{cases}1-e^{-\alpha q^\beta}, & q\ge 0;\\ 0, & q<0,\end{cases}$$

где $\alpha=\alpha_1+\ldots+\alpha_n$. Запишем выражения для математического ожидания EQ и медианы M случайной величины Q:

$$EQ=\alpha^{-\frac{1}{\beta}}\Gamma\left(\frac{1}{\beta}+1\right)=\left(\alpha_1+...+\alpha_n\right)^{-\frac{1}{\beta}}\Gamma\left(\frac{1}{\beta}+1\right),$$

$$M=\alpha^{-\frac{1}{\beta}}(\ln 2)^{\frac{1}{\beta}}=\left(\alpha_1+...+\alpha_n\right)^{-\frac{1}{\beta}}(\ln 2)^{\frac{1}{\beta}}.$$

Записывая формулы для математических ожиданий EQ_i и медиан M_i случайных величин Q_i

$$EQ_i=\alpha_i^{-\frac{1}{\beta}}\Gamma\left(\frac{1}{\beta}+1\right),$$

$$M_i=\alpha_i^{-\frac{1}{\beta}}(\ln 2)^{\frac{1}{\beta}},$$

выражая из них коэффициенты α_i и подставляя их в выражения для EQ и M, получаем формулы (6) и (7). ♦

3. СЛУЧАЙ ДИСКРЕТНЫХ ВЕЛИЧИН

Попробуем теперь представить мощности факторов производства как случайные величины, имеющие дискретные распределения.

3.1. Пример: геометрическое распределение

Пусть Q_1 и Q_2 – мощности факторов производства, представимые как две независимые случайные величины, имеющие геометрические распределения с параметрами (вероятностями успеха однократного испытания) p_1 и p_2 соответственно. Здесь распределение будем понимать в следующем смысле: случайная величина – номер испытания, давшего первый успех (возможные значения $j=1,2,...$).

Тогда вероятности неудач однократных испытаний равны $q_1=1-p_1$ и $q_2=1-p_2$ соответственно.

Функции распределения случайных величин Q_1 и Q_2 имеют вид

$$F_{Q_1}(j)=P\{Q_1<j\}=1-q_1^{j-1},$$

$$F_{Q_2}(j)=P\{Q_2<j\}=1-q_2^{j-1}.$$

Пусть количество выпускаемой продукции Q определяется принципом Леонтьева:

$$Q=\min\{Q_1,Q_2\}.$$

Применяя утверждение 1, получаем

$$F_Q(j)=1-q_0^{j-1},$$

где $q_0=q_1q_2$. Видим, что случайная величина Q имеет геометрическое распределение с параметром $p_0=1-q_0$. Выразим p_0 через параметры p_1 и p_2:

$$p_0=1-q_1q_2=1-(1-p_1)(1-p_2)=p_1+p_2-p_1p_2.$$

Известно, что

$$EQ_i=\frac{1}{p_i},\ i=1,2, \tag{8}$$

$$EQ=\frac{1}{p_0}=\frac{1}{p_1+p_2-p_1p_2}. \tag{9}$$

Выражая p_1 и p_2 из формулы (8) и подставляя их в формулу (9), получаем

$$EQ=\frac{EQ_1EQ_2}{EQ_1+EQ_2-1}. \tag{10}$$

Укажем, что если для геометрического распределения использовать другое определение (случайная величина – число неудач до первого успеха), то

$$EQ=\frac{EQ_1EQ_2}{EQ_1+EQ_2+1}. \tag{11}$$

Приведём достаточно примитивный пример ситуации, когда мощности факторов производства Q_1 и Q_2 представимы геометрически распределёнными случайными величинами. Предположим, что для попытки выпуска одного неделимого изделия требуется затратить либо единичную мощность фактора 1, либо единичную мощность фактора 2. Одна попытка может закончиться успехом (изделие прошло контроль и испытания) или неудачей (не прошло). При этом если используется фактор 1, то вероятность успеха обозначим p_1. Если же используется фактор 2, то вероятность успеха обозначим p_2. Пусть номер попытки не влияет на вероятность её успеха.

Номер первой успешной попытки выпуска изделия при использовании выбранного фактора есть реализация мощности выбранного фактора как случайной величины, и эта величина по определению имеет геометрическое распределение. Очевидно, что выгодно задействовать именно тот из факторов, при котором номер первого успеха будет минимален (отсылка к принципу Леонтьева).

Интерес представляет некоторая схожесть формул (10), (11) с формулой (5), полученной для экспоненциально распределённых факторов.

Известно, что геометрическое распределение является дискретным аналогом экспоненциального. Пусть некоторая случайная величина Q имеет экспоненциальное распределение с плотностью

$$p_Q(q)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda q}, & q\ge 0;\\ 0, & q<0,\end{cases}$$
$$\lambda>0.$$

Рассмотрим случайную величину $Y=\lceil Q\rceil$ (потолок величины Q). Для натуральных $j=1,2,...$

$$P\{Y=j\}=P\{j-1<Q\le j\}=\int_{j-1}^{j}p_Q(q)dq,$$

откуда

$$P\{Y=j\}=(1-e^{-\lambda})e^{-\lambda(j-1)}.$$

Обозначим $q_0=e^{-\lambda}=1-p_0$; тогда

$$P\{Y=j\}=(1-q_0)q_0^{j-1}=p_0(1-p_0)^{j-1}.$$

Таким образом, величина Y имеет геометрическое распределение с параметром $p_0=1-e^{-\lambda}$ (в смысле «номер испытания, давшего первый успех»).

Если же рассмотреть целую часть $\lfloor Q\rfloor$, то она также подчинена геометрическому закону с параметром $p_0=1-e^{-\lambda}$, но в смысле «число неудач до первого успеха».

3.2. Дискретизация распределения Вейбулла и попытка построения CES-функции

Проведём аналогичным образом «дискретизацию» распределения Вейбулла. В данном случае плотность распределения случайной величины Q имеет вид

$$p_Q(q)=\begin{cases}\alpha\beta q^{\beta-1}e^{-\alpha q^{\beta}}, & q\ge 0;\\ 0, & q<0,\end{cases}$$
$$\beta>0,\ \alpha>0.$$

Рассмотрим случайную величину $Y=\lfloor Q\rfloor$. Для $j=0,1,2,...$ справедливо

$$P\{Y=j\}=P\{j\le Q<j+1\}=\int_{j}^{j+1}p_Q(q)dq,$$

после преобразований получаем

$$P\{Y=j\}=e^{-\alpha j^{\beta}}-e^{-\alpha(j+1)^{\beta}}. \quad (12)$$

Тогда функция распределения случайной величины Y будет иметь вид

$$F_Y(j)=P\{Y<j\}=\sum_{k=0}^{j-1}P\{Y=k\}=1-e^{-\alpha j^{\beta}} \quad (13)$$

– искомое дискретное распределение Вейбулла (типа 1 [9, 10]).

Найдём медиану M случайной величины Y. Для этого введём в рассмотрение квантиль Q_γ уровня γ; его неокруглённое значение является решением уравнения

$$F_Y(Q_\gamma)=\gamma,$$

т. е., с учётом формулы (13), решением уравнения

$$1-e^{-\alpha Q_\gamma^{\beta}}=\gamma.$$

После преобразований получаем

$$Q_\gamma=\left(-\frac{\ln(1-\gamma)}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\beta}},$$

откуда неокруглённое значение медианы равно

$$M=Q_{1/2}=\left(\frac{\alpha}{\ln 2}\right)^{-\frac{1}{\beta}}. \quad (14)$$

Рассмотрим теперь математическое ожидание случайной величины Y (с учётом формулы (12)):

$$EY=\sum_{j=0}^{\infty}jP\{Y=j\}=\sum_{j=0}^{\infty}j\left(e^{-\alpha j^{\beta}}-e^{-\alpha(j+1)^{\beta}}\right). \quad (15)$$

Суммирование этого ряда проводят численно [9]; в данном же случае важна попытка его аналитического выражения.

В предположении о сходимости ряда (15) можно, раскрыв скобки в разложении и приведя соседние подобные члены, перейти к выражению

$$EY = \sum_{j=1}^{\infty} (e^{-\alpha})^{j^{\beta}}. \qquad (16)$$

Здесь рассмотрим случай $\beta > 1$. Каждый член ряда (16) при этом меньше соответствующего члена сходящегося ряда геометрической прогрессии $\sum_{j=1}^{\infty} e^{-\alpha j}$, а значит ряд (16) будет сходиться.

Теоретический интерес представляет случай $\beta = 2$ (дискретный вариант распределения Рэлея); далее будем рассматривать только его. Ряд (16) принимает следующий вид (обозначим его $u(\alpha)$):

$$EY = u(\alpha) = \sum_{j=1}^{\infty} e^{-\alpha j^2} = \\ = (e^{-\alpha})^{1^2} + (e^{-\alpha})^{2^2} + (e^{-\alpha})^{3^2} + \ldots \qquad (17)$$

Для рассмотрения ряда (17) целесообразно ввести тета-функцию

$$\theta(s) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} (e^{-\pi s})^{j^2}$$

и функцию вида [11]

$$w(s) = \sum_{j=1}^{\infty} (e^{-\pi s})^{j^2} = \frac{1}{2}(\theta(s) - 1).$$

Можно показать [11], что справедливо функциональное уравнение

$$w(s) = \frac{1}{\sqrt{s}} w\left(\frac{1}{s}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{s}} - 1\right).$$

Пусть $\pi s = \alpha$. Функции $u(\alpha)$ и $w(s)$ свяжутся так:

$$u(\alpha) = w(s) = w\left(\frac{\alpha}{\pi}\right),$$

и можно записать

$$u(\alpha) = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \cdot u\left(\frac{\pi^2}{\alpha}\right) + \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} - 1\right). \qquad (18)$$

При значениях коэффициента масштаба $0 < \alpha \lesssim 2$ первым слагаемым в правой части выражения (18) можно пренебречь, и в таком случае можно записать приближённое равенство

$$EY \approx \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} - 1\right), \quad 0 < \alpha \lesssim 2,$$

которое представим в виде

$$EY + \frac{1}{2} \approx \frac{\sqrt{\pi}}{2} \alpha^{-\frac{1}{2}}, \quad 0 < \alpha \lesssim 2. \qquad (19)$$

При $\alpha \gtrsim 2$ в разложении (17) можно ограничиться первым членом; можно записать приближённое равенство

$$EY \approx e^{-\alpha}, \quad \alpha \gtrsim 2.$$

На основании утверждения 1 и проведённых для дискретного распределения Вейбулла выкладок можно сформулировать следующее

Утверждение 3. *Пусть* Q_i $(i = 1,\ldots,n)$ *– мощности факторов производства, представимые как независимые случайные величины, распределённые по дискретным законам Вейбулла с одинаковым коэффициентом формы* β:

$$F_{Q_i}(j) = 1 - e^{-\alpha_i j^{\beta}}, \quad j = 0, 1, 2, \ldots$$

и пусть количество выпускаемой продукции Q *определяется принципом Леонтьева:*

$$Q = \min\{Q_1,\ldots,Q_n\}.$$

Тогда неокруглённая медиана (14) M *величины* Q *связана с неокруглёнными медианами* M_i *величин* Q_i *через CES-функцию:*

$$M = \left(M_1^{-\beta} + \ldots + M_n^{-\beta}\right)^{-\frac{1}{\beta}}.$$

Кроме того, если $\beta = 2$ *и* $0 < \alpha \lesssim 2$, *где* $\alpha = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$, *то математическое ожидание* EQ *величины* Q *можно приближённо связать с математическими ожиданиями* EQ_i *величин* Q_i *через CES-функцию:*

$$EQ + \frac{1}{2} \approx \left(\left(EQ_1 + \frac{1}{2}\right)^{-2} + \ldots + \left(EQ_n + \frac{1}{2}\right)^{-2}\right)^{-\frac{1}{2}}.$$

Замечание к утверждению 3. При выполнении ограничения $0 < \alpha = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n \lesssim 2$ сразу же будут выполняться неравенства $0 < \alpha_i \lesssim 2$ для $i = 1,\ldots,n$, а значит математические ожидания EQ_i могут быть выражены в нужной для доказательства приближённой форме (19).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Получены CES-функции от математических ожиданий и медиан мощностей n факторов производства в случае, когда мощности представлены как независимые случайные величины, подчинённые непрерывным распределениям Вейбулла с одинаковым коэффициентом формы.

Предложено рассмотрение дискретно распределённых мощностей факторов на примере геометрического закона. При этом, согласно принципу Леонтьева, выгодно задействовать именно тот из факторов, при котором номер первого успеха изготовления изделия будет минимален.

Проведена попытка построения CES-функции в случае, когда мощности факторов как независимые случайные величины имеют дискретные распределения Вейбулла с одинаковым коэффициентом формы. С успехом удалось связать неокруглённые значения (14) медиан мощностей факторов и медиану количества выпускаемой продукции. Трудности возникли при поиске связи между математическими ожиданиями этих величин.

Главной трудностью в исследовании явилось аналитическое выражение математического ожидания случайной величины, распределённой по дискретному закону Вейбулла. В частном случае при коэффициенте формы, равном двум ($\beta = 2$), возможно введение тета-функции и составление функционального уравнения. При некоторых ограничениях на значения коэффициента масштаба распределения удаётся пренебречь частью функционального уравнения, тем самым приближённо выразить искомое математическое ожидание (см. формулу (19)) и составить CES-функцию.

Остаётся открытым вопрос о возможности связывания *в общем случае* (т.е. без ограничений на коэффициенты распределений) в CES-функцию математических ожиданий мощностей факторов, если они как случайные величины подчинены дискретным распределениям Вейбулла с одинаковым коэффициентом формы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Горбунов В.К.* Производственные функции: теория и построение: учебное пособие. – Ульяновск: УлГУ, 2013. – 84 с. – URL: https://ulsu.ru/media/documents/13Горбунов_ПрФунк.pdf [*Gorbunov, V.K.* Proizvodstvennye funktsii: teoriya i postroenie: uchebnoe posobie. – Ulyanovsk: ULGU, 2013. – 84 s. – URL: https://ulsu.ru/media/documents/13Горбунов_ПрФунк.pdf (In Russian)]
2. *Jones, C.I.* The Shape of Aggregate Production Functions and the Direction of Technical Change // Quarterly Journal of Economics. – 2005. – Vol. 120, no. 2. – P. 517–549.
3. *Growiec, J.* Production Functions and Distributions of Unit Factor Productivities: Uncovering the Link // Economics Letters. – 2008. – Vol. 101, no. 1. – P. 87–90.
4. *Growiec, J.* A Microfoundation for Normalized CES Production Functions with Factor-augmenting Technical Change // Journal of Economic Dynamics and Control. – 2013. – Vol. 37, no. 11. – P. 2336–2350.
5. *Матвеенко В.Д.* «Анатомия» производственной функции: технологическое меню и выбор наилучшей технологии // Экономика и математические методы. – 2009. – Т. 45, № 2. – С. 85–95. [*Matveenko, V.D.* “Anatomy” of the Production Function: Technological Menu and Selection of the Best Technology // Economics and Mathematical Methods. – 2009. – Vol. 45, no. 2. – P. 85–95. (In Russian)]
6. *Михеев А.В.* Вероятностный подход к определению производственных функций // Вестник Астраханского государственного технического университета. Серия: Управление, вычислительная техника и информатика. – 2021. – № 4. – С. 82–94. [*Mikheev, A.V.* Probabilistic Approach to Determining Production Functions // Vestnik of Astrakhan State Technical University. Series: Management, Computer Science and Informatics. – 2021. – No. 4. – P. 82–94. (In Russian)]
7. *Математическая* статистика: Учебник для вузов / В.Б. Горяинов, И.В. Павлов, Г.М. Цветкова и др.; под ред. В.С. Зарубина, А.П. Крищенко. – 3-е изд., исправл. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2008. – 424 с. [*Matematicheskaya* statistika: Uchebnik dlya vuzov / V.B. Goryainov, I.V. Pavlov, G.M. Tsvetkova i dr.; pod red. V.S. Zarubina, A.P. Krishchenko. – 3-e izd., ispravl. – M.: Izd-vo MGTU im. N.Eh. Baumana, 2008. – 424 s. (In Russian)]
8. *Теория* вероятностей: Учебник для вузов / В.А. Печинкин, О.И. Тескин, Г.М. Цветкова и др.; под ред. В.С. Зарубина, А.П. Крищенко. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1998. – 456 с. [*Teoriya* veroyatnostei: Uchebnik dlya vuzov / V.A. Pechinkin, O.I. Teskin, G.M. Tsvetkova i dr.; pod red. V.S. Zarubina, A.P. Krishchenko. – M.: Izd-vo MGTU im. N.E. Baumana, 1998. – 456 s. (In Russian)]
9. *Rinne, H.* The Weibull Distribution: A Handbook. – New York: Chapman and Hall/CRC, 2008. – 808 p.
10. *Barbiero, A.* Discrete Weibull Distributions (Type 1 and 3) // The Comprehensive R Archive Network. – 2025. – URL: https://cran.r-project.org/web/packages/DiscreteWeibull/DiscreteWeibull.pdf.
11. *Woit, P.* Fourier Analysis Notes, Spring 2020. – New York: Department of Mathematics, Columbia University, 2020. – 79 p. – URL: https://www.math.columbia.edu/~woit/fourier-analysis/fouriernotes.pdf.

Статья представлена к публикации руководителем РРС М. И. Гераськиным.

Поступила в редакцию 21.02.2025,
после доработки 27.04.2025.
Принята к публикации 29.04.2025.

Коков Всеволод Вячеславович – студент,
✉ kokovvsevo@gmail.com,
ORCID iD: https://orcid.org/0009-0008-4331-5148

Соколянский Василий Васильевич – доцент,
✉ sokolyansky63@mail.ru,
ORCID iD: https://orcid.org/0000-0002-6636-4638

Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана, г. Москва.

CONSTRUCTING THE CES PRODUCTION FUNCTION BASED ON THE DISCRETE WEIBULL DISTRIBUTION

V. V. Kokov* and V. V. Sokolyanskiy**

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia

*✉ kokovvsevo@gmail.com, **✉ sokolyansky63@mail.ru

Abstract. This paper considers a probabilistic approach to obtaining the CES production function. It consists in calculating the mean and median of the Leontief function (the quantity of output) as a random variable depending on the capacities of production factors, i.e., the ratios of the factors to their per-unit values. The type of the cumulative distribution function of the minimum from a set of independent random variables is substantiated. Explicit expressions are derived for the mean and median of the quantity of output as CES functions when the factor capacities have (continuous) Weibull distributions. Discretely distributed production factors are considered using the example of a geometric law. An attempt is made to derive the CES function when the factor capacities have discrete Weibull distributions. The difficulties arising in the analytical use of the mean of the Leontief function are described.

Keywords: production function, CES production function, probabilistic approach, Weibull distribution, discrete Weibull distribution, geometric distribution, mean, median.