УДК 62-50

# АЛГОРИТМЫ УПРАВЛЕНИЯ И ИДЕНТИФИКАЦИИ ДЛЯ ПРОФИЛОГРАФА-ПРОФИЛОМЕТРА ПРИ ВОЗДЕЙСТВИИ ВНЕШНИХ ВОЗМУЩЕНИЙ[1]

С.А. Кочетков

Рассмотрены приборы с дифференциальными индуктивными датчиками, предназначенные для измерения геометрических параметров поверхности. Разработаны алгоритмы управления и идентификации, обеспечивающие в условиях действия внешних детерминированных возмущений вычисление необходимых параметров с заданной точностью, определяемой обратной связью. Приведены результаты моделирования, демонстрирующие эффективность предложенных алгоритмов.

**Ключевые слова:** дифференциальный индуктивный датчик, детерминированное возмущение, предельный цикл, идентификатор параметров, шероховатость поверхности.

## ВВЕДЕНИЕ

Одними из важнейших показателей качества обработанных поверхностей в машиностроении служат шероховатость и волнистость поверхности, которые могут быть оценены с помощью, например, контактных средств измерений [1, 2]. В большинстве современных контактных приборов контроля шероховатости (профилографы-профилометры) реализован разомкнутый цикл преобразования измерительного сигнала [1—4]. Традиционный подход заключается в следующем (рис. 1). По исследуемой поверхности скользит алмазная игла с малым радиусом закругления. Во время движения игла колеблется относительно опорной колодки, повторяя форму неровностей профиля. Колебания иглы преобразуются с помощью дифференциального индуктивного датчика в пропорциональные изменения напряжения. Сигнал на выходе датчика определяется соотношением сопротивлений плечей моста и, в конечном счете, линейно зависит от перемещения иглы. Затем сигнал усиливается, фильтруется и детектируется подобно процессу обработки сигнала в тракте радиопередачи и отражается регистрирующими и показывающими приборами.

Этот или похожий алгоритм применяется в большинстве приборов рассматриваемого типа в течение достаточно длительного времени [1, 2, 5, 6]. Современные профилографы-профилометры отличаются от своих предшественников, по сути, лишь элементной базой, на которой они реализованы.

Недостаток описанного подхода заключается в том, что аддитивные и параметрические возмущения искажают полезный сигнал. Стремление преодолеть этот недостаток приводит к повышению требований к изготовлению отдельных компонентов и прибора в целом, усложнению схемотехнических решений, необходимости схем компенсации, настройки и др.

Существенно, что каждый элемент разомкнутой системы оказывает свое влияние на динамику процесса преобразования сигнала. Такой метод

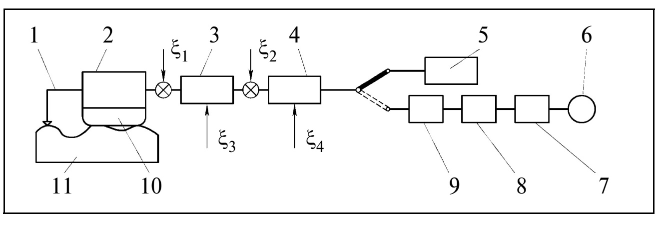


**Рис. 1. Схема профилограмма-профилометра:**
*1* — алмазная игла; *2* — электромеханический преобразователь; *3* — усилитель; *4* — фильтр несущей частоты; *5* — самописец; *6* — показывающий прибор; *7* — электронный интегратор; *8* — дополнительный усилитель; *9* — фильтр; *10* — опорная колодка; *11* — исследуемая поверхность; $\xi_1$, $\xi_2$ — аддитивные возмущения; $\xi_3$, $\xi_4$ — параметрические возмущения

[1] Работа выполнена при частичной поддержке гранта РФФИ 09—08—00429-а и гранта Президента РФ МК—2548.2009.8.

преобразования измерительного сигнала принципиально ориентирован на установившийся режим, т. е. предназначен для измерения медленно изменяющихся величин и не позволяет регистрировать искомый параметр с высокой скоростью (сравнимой, например, с темпами колебаний напряжения питания). В настоящее же время востребованы быстродействующие системы измерения шероховатости поверхности [7].

В данной работе разработана замкнутая система управления и идентификации параметров устройства измерения шероховатости, которая в значительной степени лишена указанных недостатков. Основная идея состоит в использовании управляющих воздействий для формирования некоторого номинального режима работы электромеханического преобразователя, благоприятного для идентификации требуемых параметров, и их последующем восстановлении известными методами [8—10]. Получаемая в результате нелинейная система обладает высокими избирательными свойствами по отношению к регистрируемой величине. При этом точность измерений может быть улучшена благодаря обратной связи в идентификаторе.

## 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В качестве первичного измерительного преобразователя для профилографа-профилометра используется электромеханический преобразователь — дифференциальный индуктивный датчик (рис. 2).

Дифференциальные уравнения электромеханического преобразователя могут быть записаны в следующем виде [3, 11]:

$$\dot{\varphi} = \omega,$$

$$\dot{\omega} = \frac{mgc}{J_0} + \frac{pk}{2J_0}\left[\frac{i_2^2}{(\delta_0 - p\varphi)^2} - \frac{i_1^2}{(\delta_0 + p\varphi)^2}\right] + \frac{M(t)}{J_0},$$

$$\frac{di_1}{dt} = \frac{pi_1\omega}{\delta_0 + p\varphi} - \frac{i_1R_1(\delta_0 + p\varphi)}{k} + \frac{(\delta_0 + p\varphi)}{k}u_1 + \eta_1,$$

$$\frac{di_2}{dt} = -\frac{pi_2\omega}{\delta_0 - p\varphi} - \frac{i_2R_2(\delta_0 - p\varphi)}{k} + \frac{(\delta_0 - p\varphi)}{k}u_2 + \eta_2, \qquad (1)$$

где φ, ω, $m$ и $J_0$ — угол поворота, скорость вращения, масса и момент инерции ротора соответственно, $k$ и $p$ — конструктивные коэффициенты, $\delta_0$ — номинальный воздушный зазор, $M(t)$ — момент реакции опоры (момент силы $N$), $i_1$, $i_2$, $u_1$, $u_2$ и $R_1$, $R_2$ — токи напряжения и активные сопротивления

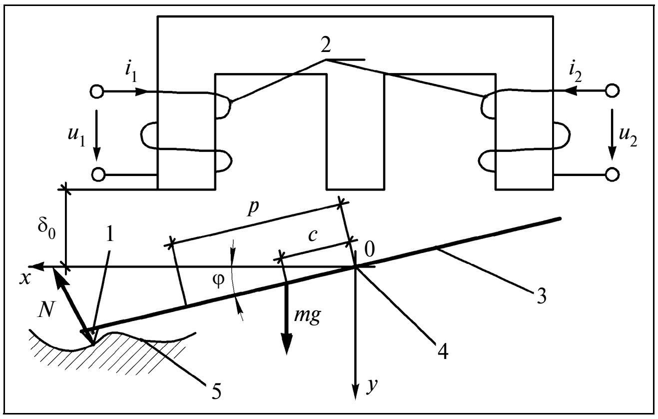


**Рис. 2. Схема первичного измерительного преобразователя:** *1* — алмазная игла; *2* — катушки индуктивности; *3* — ротор; *4* — точка крепления ротора; *5* — контролируемая поверхность

обмоток, $\eta_1(t)$ и $\eta_2(t)$ — внешние детерминированные возмущения.

Исключив из модели (1) уравнение механической подсистемы, получим редуцированную систему уравнений

$$\dot{\varphi} = \omega,$$

$$\frac{di_1}{dt} = -\left[-\frac{p\omega}{\delta_0 + p\varphi} + R_1\frac{(\delta_0 + p\omega)}{k}\right]i_1 + \frac{\delta_0 + p\varphi}{k}u_1 + \eta_1,$$

$$\frac{di_2}{dt} = -\left[\frac{p\omega}{\delta_0 - p\varphi} + R_2\frac{(\delta_0 - p\varphi)}{k}\right]i_2 + \frac{\delta_0 - p\varphi}{k}u_2 + \eta_2. \quad (2)$$

Предполагается, что функции $\eta_1(t)$, $\eta_2(t)$ и их первые производные ограничены, спектр возмущений $\eta_1$ и $\eta_2$ лежит в области низких частот. Поскольку обмотки датчика находятся примерно в одинаковых условиях, то величины $\eta_1$ и $\eta_2$ приблизительно равны.

Ставится задача идентификации величины φ, пропорциональной отклонению ротора от нулевой линии $Ox$ (см. рис. 2), следовательно, и размеру неровностей, по результатам измерения токов $i_1$ и $i_2$.

## 2. СИНТЕЗ АЛГОРИТМА УПРАВЛЕНИЯ

Математическая модель объекта управления, как правило, не точна. Неточности могут быть следствием допущений, сделанных в рамках теоретических положений о процессе, линеаризации уравнений нелинейной модели, ошибок в задании параметров процесса и др. Кроме того, управляемые процессы часто подвержены влиянию возмущений, которые нельзя измерить. Одним из наиболее эффективных методов обеспечения инвариантности к внешним детерминированным возмущениям является метод динамической компенсации [12]. Основная его идея заключается во введении в замкнутый контур системы управления динамического звена (компенсатора), имеющего структуру модели возмущений. Если в такой системе подогнать начальные условия динамического компенсатора и модели возмущений, то появляется возможность компенсировать воздействие возмущений с помощью выходного сигнала компенсатора. В этом случае задача обеспечения инвариантности сводится к задаче стабилизации расширенной системы, включающей в себя модели объекта управления, динамического компенсатора и возмущений.

В современных приборах для измерения геометрических параметров применяется амплитудная модуляция высокочастотного сигнала. Целесообразно организовать режим автоколебаний с помощью управляющих воздействий, который удобен для последующего получения оценок параметров методами современной теории идентификации [8—10]. В режиме автоколебаний на среднее значение переменных системы (2) оказывают действие не только напряжения $u_1$ и $u_2$, но и возмущения $\eta_1$ и $\eta_2$ (внешние электромагнитные и электрические поля), спектр которых согласно постановке задачи лежит в области низких частот. Модель первичного преобразователя (1) представляет собой фильтр низких частот, поэтому реакция системы на медленно меняющиеся во времени возмущения $\eta_1$ и $\eta_2$ будет существенно больше, чем на высокочастотный сигнал. Такое влияние вызывает нестабильность амплитуд токов $i_1$ и $i_2$ и может привести к потере устойчивости алгоритма идентификации. Поэтому ставится задача синтеза алгоритма управления, обеспечивающего грубость амплитуды сигналов, используемых в алгоритме идентификации, по отношению к внешним возмущениям $\eta_1$ и $\eta_2$. В данной работе для подавления возмущений предлагается ввести в контур обратной связи динамический компенсатор, который позволит получить оценку возмущений. Используя эту оценку, можно варьировать среднюю составляющую управляющих воздействий на периоде автоколебаний для компенсации возмущений. Описываемый далее алгоритм управления обеспечивает номинальный режим работы профилографа-профилометра, в котором амплитуда суммы токов $i_1 + i_2$ служит в качестве опорного сигнала в системе идентифика ции, инвариантна с заданной точностью по отношению к внешним детерминированным возмущениям.

Перепишем уравнения (2) относительно суммы $x_1 = i_1 + i_2$ и разности токов $x_2 = i_1 - i_2$:

$$\dot{x}_1 = -\alpha_1 x_1 - \alpha_2 x_2 + b_1 \upsilon_1 + b_2 \upsilon_2 + \xi_1,$$
$$\dot{x}_2 = -\alpha_2 x_1 - \alpha_1 x_2 + b_1 \upsilon_2 + b_2 \upsilon_1 + \xi_2, \qquad (3)$$

где $\alpha_1 = \dfrac{a_{11} + a_{22}}{2}$, $\alpha_2 = \dfrac{a_{11} - a_{22}}{2}$, $a_{11} = -\dfrac{p\omega}{\delta_0 + p\varphi} + R_1\dfrac{\delta_0 + p\varphi}{k}$, $a_{11} = \dfrac{p\omega}{\delta_0 - p\varphi} + R_2\dfrac{\delta_0 - p\varphi}{k}$; $\upsilon_1 = u_1 + u_2$, $\upsilon_2 = u_1 - u_2$, $b_1 = \dfrac{2\delta_0}{k}$, $b_2 = \dfrac{2p\varphi}{k}$, $\xi_1 = \eta_1 + \eta_2$, $\xi_2 = \eta_1 - \eta_2$, параметр $b_2$ пропорционален углу $\varphi$, следовательно, в силу малости $\varphi$, и размеру неровностей контролируемого профиля.

В данной работе рассматривается простейший случай постоянного возмущения

$$\dot{\xi}_1 = 0, \quad \dot{\eta}_1 = 0, \quad \dot{\eta}_2 = 0. \qquad (4)$$

Согласно методу динамической компенсации расширим исходную систему (3), добавив модель возмущений (4) [12]:

$$\dot{x}_1 = -\alpha_1 x_1 - \alpha_2 x_2 + b_1 \upsilon_1 + b_2 \upsilon_2 + \xi_1,$$
$$\dot{x}_2 = -\alpha_2 x_1 - \alpha_1 x_2 + b_1 \upsilon_2 + b_2 \upsilon_1 + \xi_2,$$
$$\dot{y} = \upsilon_3, \qquad (5)$$

где $y$ — переменная состояния динамического компенсатора, $\upsilon_3$ — корректирующее воздействие, которое может быть выбрано в классе непрерывных функций.

Наиболее эффективно в смысле тепловых потерь в электромеханических системах использование разрывных управлений, поэтому выберем управляющие воздействия $\upsilon_1$, $\upsilon_2$ и $\upsilon_3$ в виде

$$\upsilon_1 = M\mathrm{sign}(l_1 x_1 - y), \quad \upsilon_2 = 0, \quad \upsilon_3 = l_2 x_1, \qquad (6)$$

где $M$ — амплитуда управляющих воздействий.

С учетом новой переменной $x_3 = l_1 x_1 - y$ уравнения (5), (6) примут вид

$$\dot{x}_1 = -\alpha_1 x_1 - \alpha_2 x_2 + b_1 M\mathrm{sign} x_3 + \xi_1,$$
$$\dot{x}_2 = -\alpha_2 x_1 - \alpha_1 x_2 + b_2 M\mathrm{sign} x_3 + \xi_2, \qquad (7)$$
$$\dot{x}_3 = -(l_1\alpha_1 + l_2)x_1 - l_1\alpha_2 x_2 + b_1 l_1 M\mathrm{sign} x_3 + l_1\xi_1,$$

где $l_1$ и $l_2$ — коэффициенты коррекции обратной связи.

Для анализа поведения системы (7) рассмотрим положительно полуопределенную функцию $V$ в предположении, что $b_1M > |\xi_1|$

$$V = \frac{l_1\alpha_1 + l_2}{2}x_1^2 + b_1M|x_3| + \xi_1x_3, \qquad (8)$$

производная которой в силу уравнений (6) имеет вид

$$\dot{V} = -\alpha_1(l_1\alpha_1 + l_2)x_1^2 + l_1(b_1M\mathrm{sign}x_3 + \xi_1)^2 + \xi^*, \ (9)$$

где $\xi^* = x_2(-\alpha_2(l_1\alpha_1 + l_2)x_1 - l_1\alpha_2b_1M\mathrm{sing}x_3 - l_1\alpha_2\xi_1)$.

Отметим, что на практике $b_1 \gg b_2$, $\alpha_1 \gg \alpha_2$, $\xi_2 \approx 0$. Учитывая эти выражения, получим, используя, например, критерий Гурвица, что собственные движения системы (3) устойчивы ($\alpha_1$, $\alpha_2 > 0$) и переменные $x_1$, $x_2$ ограничены. При этом согласно последним неравенствам $|x_1| \gg |x_2|$. Следовательно, для возмущения $\xi^*$ может быть указано ограничение $|\xi^*| < X$, где $X \ll \alpha_1(l_1\alpha_1 + l_2)|x_1^2| + |l_1(b_1M\mathrm{sign}x_3 + \xi_1)^2|$. Тогда выбором параметров управляющих воздействий (6) может быть обеспечено выполнение неравенства (см. выражение (9)) вида

$$l_1(b_1M\mathrm{sign}x_3 + \xi_1)^2 + \xi^* > 0. \qquad (10)$$

Учитывая выражения (9), (10), для системы (7) справедливы следующие соотношения:

$$\begin{cases}\alpha_1(l_1\alpha_1 + l_2)x_1^2 > l_1(b_1M\mathrm{sign}x_3 + \xi_1)^2 + \xi^*,\\ V\dot{V} < 0,\end{cases}$$

$$\begin{cases}\alpha_1(l_1\alpha_1 + l_2)x_1^2 < l_1(b_1M\mathrm{sign}x_3 + \xi_1)^2 + \xi^*,\\ V\dot{V} > 0,\end{cases}$$

Как видно, в системе возникает орбитально устойчивые движения [13], и с точностью до величины $X$ выполняется соотношение

$$\frac{l_1\alpha_1 + l_2}{2}x_1^2 + b_1M|x_3| + \xi_1x_3 \approx \mathrm{const}. \qquad (11)$$

Более того, в системе (7) возникает предельный цикл. В силу ограниченности объема статьи здесь не приводится доказательства этого утверждения, однако результаты моделирования, приведенные в § 4, служат численным подтверждением его существования.

Пусть частота автоколебаний $\omega$ в предельном цикле достаточно высока (десятки килогерц), что можно обеспечить выбором параметров закона управления. Уравнения относительно средних составляющих на периоде колебаний от переменных системы (5)

$$\dot{x}_{10} = -(\alpha_1 - b_1Mkl_1)x_{10} - \alpha_2x_{20} - b_1ky_0 + \xi_1,$$

$$\dot{x}_2 = -(\alpha_2 - b_2Mk)x_{10} - \alpha_1x_{20} - b_2ky_0 + \xi_2,$$

$$\dot{y}_0 = l_2x_{10},$$

где $k$ — коэффициент вибролинеаризации [14], $x_{10}$, $x_{20}$ и $y_0$ — средние на периоде значения переменных $x_1$, $x_2$ и $y$.

Если усредненная система устойчива, то в установившемся режиме (при $t \to \infty$) выполняются соотношения

$$x_{10} = 0, \quad x_{20} = \frac{\alpha_2\xi_1 - b_1Mk\xi_2}{\alpha_2b_2Mk - \alpha_1b_1Mk},$$

$$y_0 = \frac{-\alpha_1\xi_1 - b_2Mk\xi_2}{\alpha_2b_2Mk - \alpha_1b_1Mk}. \qquad (12)$$

Таким образом, алгоритм управления (6) обеспечивает компенсацию внешних постоянных возмущений $\xi_1$ и $\xi_2$ относительно переменной $x_1$ с точностью до амплитуды автоколебаний.

Точный расчет параметров автоколебаний для системы (5), (6) затруднителен, поэтому найдем приблизительные выражения для амплитуды и периода колебаний переменной $x_1(t)$, закон изменения во времени которой аппроксимируем линейной зависимостью. Полагая внешние возмущения (4) постоянными, с учетом соотношений (12) вычислим среднее значение функции (8) на периоде колебаний $T = 2\pi/\omega$ и получим выражение для приближенного значения амплитуды колебаний переменной $x_1(t)$:

$$A = \sqrt{3\frac{l_1b_1^2M^2 - l_1\xi_1^2}{\alpha_1(l_1\alpha_1 + l_2)}}. \qquad (13)$$

Как видно из соотношения (13), выбором амплитуды управляющего воздействия $\upsilon_1$ (6) согласно неравенству $M \gg |\xi_1|$ можно обеспечить грубость амплитуды сигнала $x_1(t)$ в режиме автоколебаний.

Вычисляя время между переключениями управляющего воздействия с учетом модели системы (7) и принятых упрощений, найдем частоту и период колебаний в номинальном режиме работы (при $\xi_1 = 0$) профилометра-профилографа:

$$f = \frac{1}{T}, \quad T = 4\frac{l_1}{l_2} + 4\sqrt{\frac{3l_1}{\alpha_1(l_1\alpha_1 + l_2)}}. \qquad (14)$$

## 3. СИНТЕЗ АЛГОРИТМА ИДЕНТИФИКАЦИИ

В § 2 было показано, что в установившемся режиме существует устойчивый предельный цикл (13), (14), в котором амплитуда управления $\upsilon_1$ постоянна, а амплитуда сигнала $x_1$, (13) стабильна по отношению к внешним возмущениям $\eta_1$ и $\eta_2$. Следовательно, в режиме автоколебаний переменные $x_1$ и $\upsilon_1$ могут быть использованы в качестве опорных сигналов при синтезе идентификатора параметров модели (3).

Далее синтезируется система идентификации параметров неровностей профиля с применением наблюдателей на скользящих режимах [9]. Данная система реализуется в виртуальной программной среде, поэтому размеры неидеальностей виртуальных управляющих воздействий пренебрежимо малы, что обеспечивает возникновение идеального скользящего режима в наблюдателе [14, 15].

Особенность рассматриваемой задачи заключается в необходимости одновременного вычисления как параметров объекта (3), так и внешних возмущений. Далее будет показано, что такую систему идентифцикации можно построить с применением наблюдателей на скользящих режимах, а также декомпозиционных методов синтеза на основе разделения движений в замкнутой системе благодаря обратной связи.

Для оценивания внешних возмущений воспользуемся методом динамической компенсации [12], согласно которому введем модель внешних постоянных возмущений $\xi_1$ и $\xi_2$ вида

$$\dot{\xi}_1 = 0, \quad \dot{\xi}_2 = 0. \tag{15}$$

Для решения задачи идентификации параметров и внешних возмущений построим наблюдатель со структурой, объединяющей в себе модель объекта управления (6) и возмущений (15), а именно

$$\begin{gathered}\dot{\hat{x}}_1 = -\hat{\alpha}_1 x_1 + \hat{b}_1\upsilon_1 + \hat{\xi}_1 + v_{11},\\ \dot{\hat{\alpha}}_1 = -x_1 v_{12},\\ \dot{\hat{b}}_1 = x_1 v_{13},\\ \dot{\hat{\xi}}_1 = v_{14},\\ \dot{\hat{x}}_2 = -\hat{\alpha}_2 x_1 - \hat{\alpha}_1 x_2 + \hat{b}_2\upsilon_1 + \hat{\xi}_2 + v_{21},\\ \dot{\hat{\alpha}}_2 = -x_1 v_{22},\\ \dot{\hat{b}}_2 = \upsilon_1 v_{23},\\ \dot{\hat{\xi}}_2 = v_{24},\end{gathered} \tag{16}$$

где $\hat{\alpha}_i$, $\hat{\xi}_i$ и $\hat{b}_i$ — оценки параметров системы (5) и возмущений (15), $v_{1i}$ и $v_{1i}$, $i = \overline{1, 4}$ — корректирующие воздействия наблюдателя.

Поскольку значения сопротивлений $R_1$ и $R_2$ в уравнениях (1) приблизительно равны, размер ЭДС движения $pi_1\omega/(\delta_0 + p\varphi)$ незначителен (см. уравнения (1)), а различие суммы $x_1$ и разности $x_2$ токов сравнимо с параметрами $\delta_0$ и $p\varphi$ ($\delta_0 \gg p\varphi$), постольку в уравнении для $\hat{x}_1$ преднамеренно была опущена величина $\hat{\alpha}_2 x_2$. Компонента $\hat{\alpha}_1 x_2$ в уравнении для $\hat{x}_2$ вводится с помощью оценки $\hat{\alpha}_1$ из первого уравнения наблюдателя (16).

Для решения задачи идентификации организуем скользящий режим на многообразиях $\bar{x}_1 = x_1 - \hat{x}_1 = 0$ и $\bar{x}_2 = x_2 - \hat{x}_2 = 0$. Уравнения относительно невязок $\bar{x}_1$ и $\bar{x}_2$ имеют вид

$$\begin{gathered}\dot{\bar{x}}_1 = -\bar{\alpha}_1 x_1 - \alpha_2 x_2 + \bar{b}_1\upsilon_1 + \bar{\xi}_1 - v_{11},\\ \dot{\bar{x}}_2 = -\bar{\alpha}_2 x_1 - \alpha_1 x_2 + \bar{b}_2\upsilon_1 + \bar{\xi}_2 - v_{21},\end{gathered}$$

где $\bar{\alpha}_i = \alpha_i - \hat{\alpha}_i$, $\bar{b}_i = b_i - \hat{b}_i$, $\bar{\xi}_i = \xi_i - \hat{\xi}_i$, $i = 1, 2$.

Выберем разрывные корректирующие воздействия наблюдателя $v_{i1}$, $i = 1, 2$ в виде

$$v_{i1} = L_i \mathrm{sign}(\bar{x}_i), \quad L_i = \mathrm{const} > 0, \quad i = 1, 2. \tag{17}$$

При $L_1 > |-\bar{\alpha}_1 x_1 - \alpha_2 x_2 + \bar{b}_1\upsilon_1 + \bar{\xi}_1|$, $L_2 > |-\bar{\alpha}_2 x_1 - \bar{\alpha}_1 x_2 + \bar{b}_2\upsilon_1 + \bar{\xi}_2|$ на многообразиях $\bar{x}_i = 0$, $i = 1, 2$, возникает скользящий режим, движение в котором описывается уравнениями метода эквивалентного управления [9]:

$$\begin{gathered}(v_{11})_{eq} = -\bar{\alpha}_1 x_1 - \alpha_2 x_2 + \bar{b}_1\upsilon_1 + \bar{\xi}_1,\\ (v_{21})_{eq} = -\bar{\alpha}_2 x_1 - \alpha_1 x_2 + \bar{b}_2\upsilon_1 + \bar{\xi}_2,\end{gathered} \tag{18}$$

На практике значения, эквивалентные управления $(v_{i1})_{eq}$, $i = 1, 2$, могут быть получены как значения выходов фильтров первого порядка [9]

$$\mu\dot{\tau}_i = -\tau_i + v_{i1}, \quad \lim_{\mu \to +0} \tau_i(t) = v_{i1eq}(t),\quad i = 1, 2. \tag{19}$$

Наблюдатели на скользящих режимах позволяют получить всю информацию о параметрах модели объекта управления и внешних ограниченных возмущениях. Используя значения эквивалентных управлений, можно выбрать корректирующие воздействия наблюдателя (16) так, чтобы получить оценки параметров и возмущений. Для этого выберем оставшиеся корректирующие воздействия, например, линейными:

$$v_{ij} = -k_j \tau_i, \quad k_j = \text{const} > 0, \quad i = 1, 2, \quad j = \overline{2, 4}. \tag{20}$$

Покажем работоспособность алгоритма идентификации (16), (17), (19), (20) в предположении, что производные от параметров системы и внешних возмущений ограничены некоторыми величинами $\Delta_{ij}$, $j = \overline{1, 3}$, $i = 1, 2$:

$$|\dot{\alpha}_i| \le \Delta_{1i}, \quad |\dot{b}_i| \le \Delta_{2i}, \quad |\dot{\xi}_i| \le \Delta_{3i}, \quad i = 1, 2. \tag{21}$$

Запишем уравнения относительно невязок при движении в скользящем режиме ($\bar{x}_i = 0$, $i = 1, 2$) с учетом выражений (18)—(21) для системы (16):

$$\dot{\bar{\theta}}_i = A(t)\bar{\theta}_i + \chi_i, \quad i = 1, 2, \tag{22}$$

где $\theta_i = \begin{pmatrix} \bar{\alpha}_i \\ \bar{b}_i \\ \bar{\xi}_i \end{pmatrix}$, $A(t) = \begin{pmatrix} -k_2 x_1^2 & k_2 x_1 \upsilon_1 & k_2 x_1 \\ k_3 x_1 \upsilon_1 & -k_3 \upsilon_1^2 & -k_3 \upsilon_1 \\ k_4 x_1 & -k_4 \upsilon_1 & -k_4 \end{pmatrix}$,

$$\chi_1 = \begin{pmatrix} -k_2 \alpha_2 x_1 x_2 + \dot{\alpha}_1 \\ k_3 \alpha_2 \upsilon_1 x_2 + \dot{b}_1 \\ k_4 \alpha_2 x_2 + \dot{\xi}_1 \end{pmatrix}, \quad \chi_2 = \begin{pmatrix} -k_2 \bar{\alpha}_1 x_1 x_2 + \dot{\alpha}_2 \\ k_3 \bar{\alpha}_1 \upsilon_1 x_2 + \dot{b}_2 \\ k_4 \bar{\alpha}_1 x_2 + \dot{\xi}_2 \end{pmatrix}.$$

Учитывая неравенства (21), а также ограниченность переменных $x_1$ и $x_2$, запишем ограничения на возмущения $\chi_i$: $\|\chi_i\| \le \Delta$, $i = 1, 2$.

Введем преобразование координат для системы (22) в виде

$$\bar{\theta}_i^* = T\bar{\theta}_i, \quad T = \text{diag}\left(\frac{1}{\sqrt{k_2}}, \frac{1}{\sqrt{k_3}}, \frac{1}{\sqrt{k_4}}\right).$$

Уравнения системы (22) в новых переменных имеют вид

$$\dot{\bar{\theta}}_i^* = A^*(t)\bar{\theta}_i^* + \chi_i^*. \tag{23}$$

где $A^*(t) = TA(t)T^{-1} =$

$$= \begin{pmatrix} -k_2 x_1^2 & \sqrt{k_2 k_3} x_1 \upsilon_1 & \sqrt{k_2 k_4} x_1 \\ \sqrt{k_2 k_3} x_1 \upsilon_1 & -k_3 \upsilon_1^2 & -\sqrt{k_3 k_4} \upsilon_1 \\ \sqrt{k_2 k_4} x_1 & -\sqrt{k_3 k_4} \upsilon_1 & -k_4 \end{pmatrix}, \quad \chi_i^* = T\chi_i.$$

Для доказательства сходимости алгоритма идентификации (16), (17), (19), (20) рассмотрим функции Ляпунова в виде

$$V_i = \bar{\theta}_i^{*T} \bar{\theta}_i^*, \quad i = 1, 2.$$

Производные, согласно уравнениям (23), определяются выражениями

$$\dot{V}_i = -(\sqrt{k_2} x_1 \bar{\theta}_{i1}^* - \sqrt{k_3} \upsilon_1 \bar{\theta}_{i2}^* - \sqrt{k_4} \bar{\theta}_{i3}^*)^2 + \sigma_i, \tag{24}$$

где $\sigma_i = 2\bar{\theta}_i^{*T} \chi_i^*$, $\bar{\theta}_{ij}^*$, $j = \overline{1, 3}$ — компоненты вектора $\bar{\theta}_i^*$.

В силу существования предельного цикла (11) сигналы $x_1$ и $\upsilon_1$ в выражениях (24) линейно независимы, поэтому выражение $-(\sqrt{k_2} x_1 \bar{\theta}_{i1}^* - \sqrt{k_3} \upsilon_1 \bar{\theta}_{i2}^* - \sqrt{k_4} \bar{\theta}_{i3}^*)^2$ обнуляется только при $\bar{\theta}_{ij}^* = 0$, $j = \overline{1, 3}$. Следовательно, собственные движения системы (23), а значит и системы (22) устойчивы. Таким образом, доказано, что траектории системы (22) сходятся в окрестность начала координат, размеры которой определяются величиной $\Delta$, и существует константа $\Theta$ такая, что

$$\lim_{t \to \infty} \|\bar{\theta}_i\| \le \Theta. \tag{25}$$

Остановимся подробнее на вопросе выбора коэффициентов $k_j$, $j = \overline{2, 4}$, корректирующих воздействий наблюдателя (16). Рассмотрим систему с усредненной по времени матрицей $A(t)$

$$\dot{\bar{\theta}}_{i0} = A_0 \bar{\theta}_{i0} + \xi_{i0}, \quad i = 1, 2, \tag{26}$$

где $A_0(t) = \dfrac{2\pi}{\omega} \displaystyle\int_t^{t + (2\pi/\omega)} A(\tau) d\tau$,

$$\chi_{i0}(t) = \frac{2\pi}{\omega} \int_t^{t + (2\pi/\omega)} \chi_i(t) d\tau.$$

Отметим, что в режиме автоколебаний (11) при постоянных внешних возмущениях $\xi_1$, $\xi_2$ матрица $A_0(t)$ является стационарной (или при принятых ранее предположениях квазистационарной). Рассмотрим разность решений систем (22) и (26), с учетом того, что матрица $A(t)$ ограничена по норме некоторым числом: $\|A(t)\| \le N$.

Согласно выражениям (22) и (26)

$$\dot{\bar{\theta}}_i - \dot{\bar{\theta}}_{i0} = A(t)\bar{\theta}_i + \chi_i - A_0 \bar{\theta}_{i0} - \chi_{i0} =$$
$$= A_0(\bar{\theta}_i - \bar{\theta}_{i0}) + (A(t) - A_0)\bar{\theta}_i + \chi_i - \chi_{i0}. \tag{27}$$

В силу доказанной устойчивости по Ляпунову системы (22), принимая во внимание ограничения на норму матрицы $A(t)$, выражение (25), можно записать следующие ограничения: $\|(A(t) - A_0)\bar{\theta}_i + \chi_i - \chi_{i0}\| \le N\Theta + \Delta$.

Запишем решение системы (27), используя формулу Коши:

$$\bar{\theta}_i(t) - \bar{\theta}_{i0}(t) = [\bar{\theta}_i(t_0) - \bar{\theta}_{i0}(t_0)]e^{A_0(t-t_0)} + \int_{t_0}^{t} e^{A_0(t-\tau)}[(A(t) - A_0)\bar{\theta}_i + \chi_i - \xi_{i0}]d\tau.$$

Выбором коэффициентов $k_j$, $j = \overline{2,4}$, может быть обеспечена заданная степень устойчивости $\lambda_0$ матрицы $A_0$. Можем записать следующую оценку

$$\|\bar{\theta}_i(t) - \bar{\theta}_{i0}(t)\| \le \|\bar{\theta}_i(t_0) - \bar{\theta}_{i0}(t_0)\|Ce^{-\lambda_0(t-t_0)} + C(1 - e^{-\lambda_0(t-t_0)})\lambda_0^{-1}[N\Theta + \Delta],$$

где $C = \|T\|\|T^{-1}\|$, $T$ — матрица перехода матрицы $A_0$ к жордановой форме.

Очевидно, что при $t \to \infty$ справедливо соотношение

$$\lim_{t\to\infty}\|\bar{\theta}_i(t) - \bar{\theta}_{i0}(t)\| \to \lambda_0^{-1}C[N\Theta + \Delta].$$

Таким образом, траектории усредненной системы (26) отличаются от траекторий исходной системы (22) на некоторую величину, определяемую неопределенностями (21). В такой ситуации для выбора желаемой скорости сходимости системы (22) в невязках может быть назначен заданный спектр усредненной матрицы $A_0$. Действительно, используя выражение

$$A_0 = \begin{pmatrix} -k_2(x_1^2)_0 & k_2(x_1\upsilon_1)_0 & (x_1)_0 \\ k_3(x_1\upsilon_1)_0 & -k_3M^2 & -k_3(\upsilon_1)_0 \\ (x_1)_0 & -k_4(\upsilon_1)_0 & -k_4 \end{pmatrix},$$

можем записать характеристическое уравнение для системы (26):

$$\det[A_0 - pI_3] = 0 \Rightarrow p^3 + a_2p^2 + a_1p + a_0 = 0,$$

где через $(\cdot)_0$ обозначены средние на периоде значения сигналов, которые могут быть получены из результатов моделирования или численными методами, $a_2 = [k_2(x_1^2)_0 + k_3M^2 + k_4]$, $a_1 = [k_2(x_1^2)_0(k_3M^2 + k_4) + k_3k_4(M^2 - (\upsilon_1)_0^2) - k_2k_3(x_1\upsilon_1)_0^2 - (x_1)_0^2]$, $a_0 = k_2(x_1^2)_0k_3k_4(M^2 - (\upsilon_1)_0^2) - k_2k_3k_4(x_1\upsilon_1)_0^2 + k_2k_3(x_1\upsilon_1)_0(x_1)_0(\upsilon_1)_0 + k_3k_4(x_1)_0(x_1\upsilon_1)_0(\upsilon_1)_0] - (x_1)_0^2k_3M^2$.

Как видно, полученные соотношения на коэффициенты характеристического уравнения позволяют выбором значений $k_j$, $j = \overline{2,4}$, задать желаемые коэффициенты характеристического уравнения замкнутой системы и, следовательно, заданный спектр матрицы $A_0$.

## 4. РЕЗУЛЬТАТЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ

Моделирование проводилось при следующих значениях параметров: активные сопротивления катушек индуктивного датчика $R_1 = 90$ Ом, $R_2 = 80$ Ом; номинальный зазор $\delta_0 = 0{,}003$ м; конструктивные параметры $k = 0{,}24 \cdot 10^{-3}$ м/Гн, $p = 0{,}02$ м; параметры управляющих воздействий (6) $M = 10$, $l_1 = 100$, $l_2 = 10^8$; начальные условия $i_1(0) = 0{,}004$ А, $i_2(0) = 0$; номинальные параметры $a_{11} = 1125$, $a_{22} = 1000$, $\alpha_1 = 1062{,}5$, $\alpha_2 = 62{,}5$, $b_1 = 25$.

Вначале покажем работоспособность алгоритма управления (6). На рис. 3 представлены результаты моделирования в номинальном режиме работы при $\xi_1 = \xi_2 = 0$. Амплитуды и частота колебаний, вычисленные по формулам (13) и (14), $A = 0{,}006639$ А, $f = 4620$ Гц.

По результатам моделирования получились следующие значения параметров автоколебаний: $A = 0{,}00663$ А, $f = 4630$ Гц. С практической точки зрения предположение о линейности $x_1$ оправдано, и выражения (13) и (14) достаточно точно оценивают амплитуду и частоту в номинальном режиме работы.

Во втором эксперименте (рис. 4) предполагалось, что внешние возмущения изменяются по гармоническому закону с частотой напряжения питающей сети 50 Гц:

$$\begin{matrix} \eta_1 = 37{,}5\sin(100\pi t), \\ \eta_2 = 35\sin(100\pi t), \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} \xi_1 = 72{,}5\sin(100\pi t), \\ \xi_2 = 2{,}5\sin(100\pi t), \end{matrix} \qquad (28)$$

Как видно из результатов, норма опорного сигнала $x_1$ достаточно стабильна, несмотря на достаточно большие возмущения, и является «хорошим» опорным сигналом для решения задачи параметрической идентификации, поскольку его «среднее» на периоде значение и амплитуда слабо зависят от возмущения $\xi_1$.

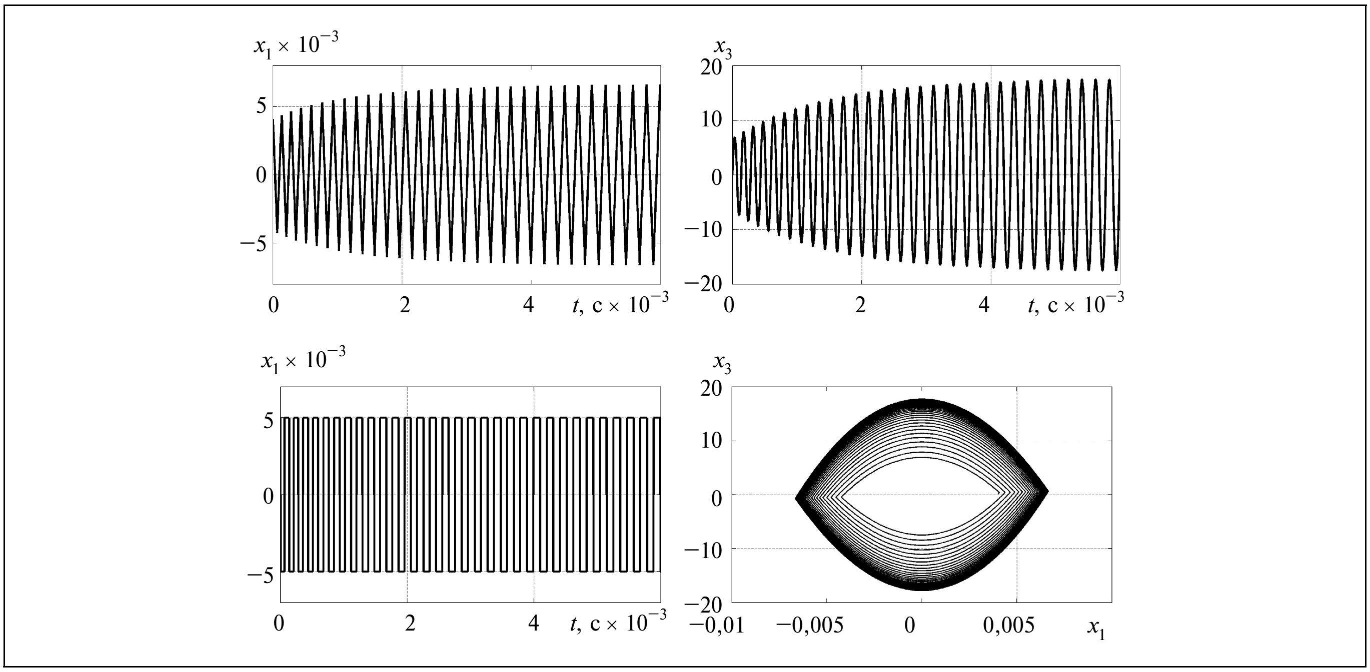


**Рис. 3. Результаты моделирования алгоритма управления (6) при отсутствии внешних возмущений**

На рис. 5 представлены результаты моделирования работы наблюдателей (16), (17), (20) с коэффициентами $k_2 = 10^9$, $k_3 = 10^3$, $k_3 = 10^4$, $L_1 = L_2 = 100$ при законе изменения профиля $\varphi(t) = 5^{-3}\sin(550t) + 5^{-3}\sin(275t)$. Оценка параметра $\hat{\varphi}(t)$ производится согласно выражению $\hat{\varphi}(t) = \hat{b}_2 k/p$ (см. уравнения (3)).

Как видно, скорость сходимости оценок параметров к истинным значениям сравнима со временем установления колебаний токов в обмотках датчика. Разработанный подход позволяет компенсировать влияние квадратурной составляющей $\alpha_2 x_1$, так как происходит динамическое вычисление коэффициента $\alpha_2$, который зависит от скорости измерения (из-за ЭДС движения) и величины неровностей профиля.

На рис. 6 приведены результаты моделирования алгоритма управления без компенсации влияния внешнего возмущения в системе (3). При этом, также как и при классическом подходе [1, 2], описанном в постановочной части статьи, для питания обмоток датчика применяется генератор напряжения высокой частоты:

$$\upsilon_1 = \upsilon_2 = 10\sin(14\,000\pi t). \qquad (29)$$

На первой стадии эксперимента возмущения отсутствуют и наблюдатель (16, 17), (20) позволяет оценить размер неровностей профиля. На второй стадии (при $t > 0{,}02$ с) на систему начинают действовать возмущения (28). Из-за отсутствия компенсации возмущений в алгоритме управления среднее значение одного из опорных сигналов теперь во многом определяется значениями $\xi_1$ и $\xi_2$,

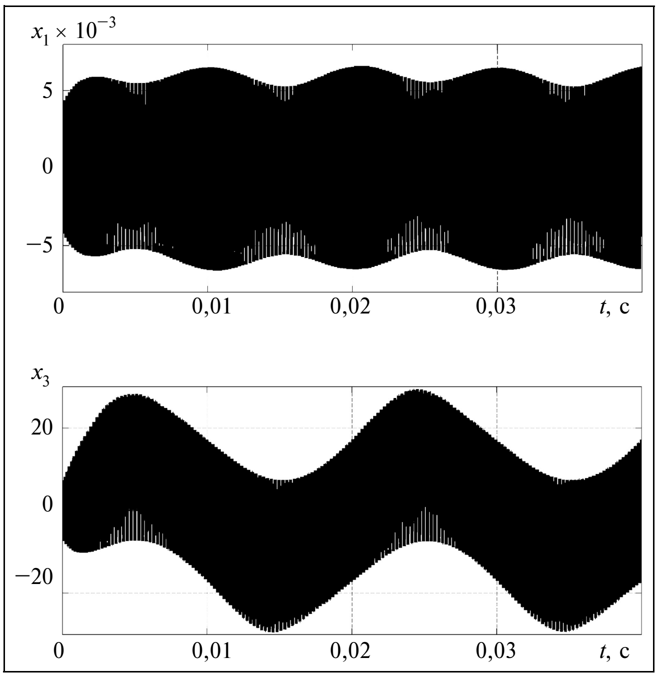


**Рис. 4. Результаты моделирования алгоритма управления (6) при гармонических внешних возмущениях**

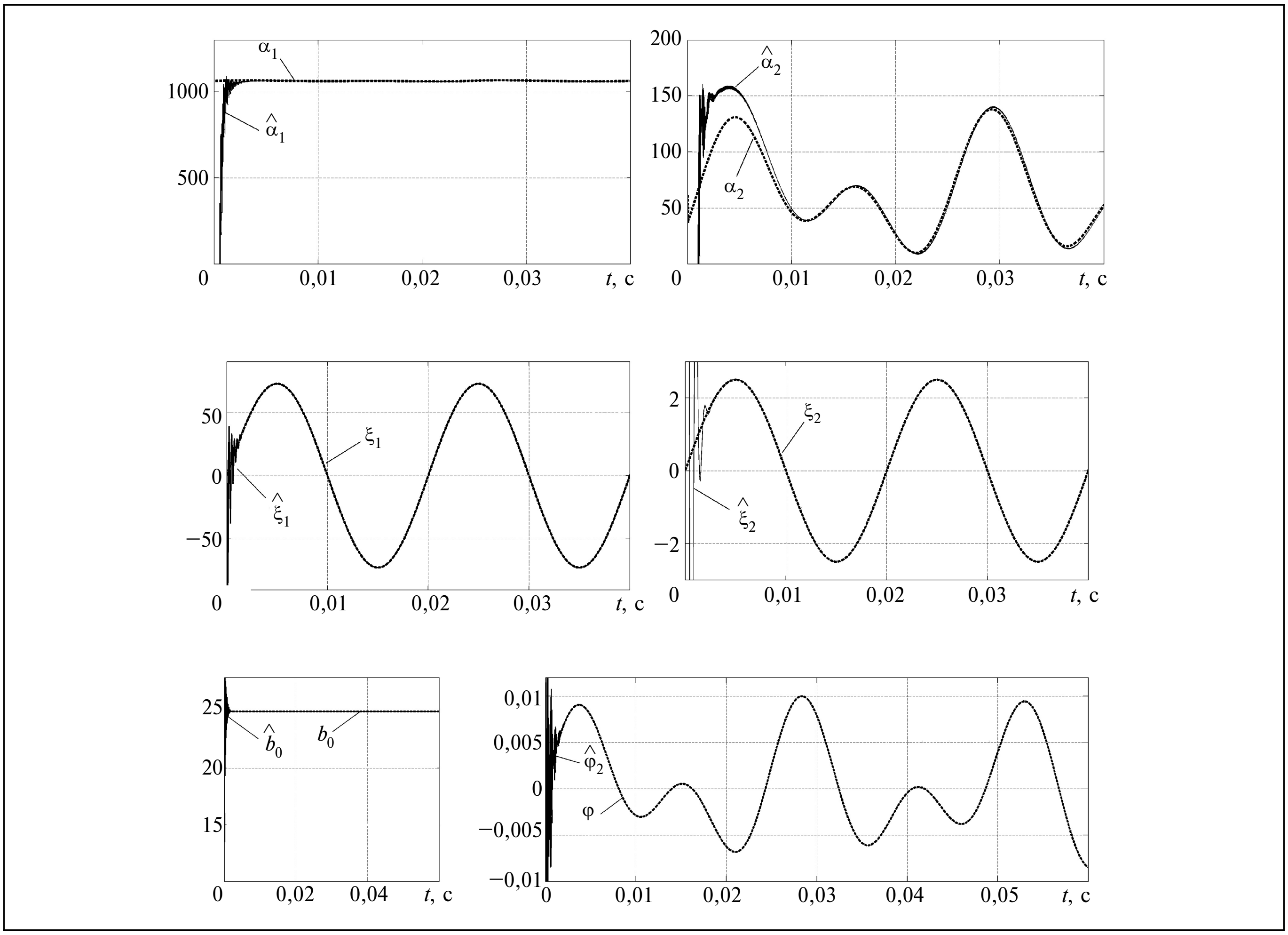


**Рис. 5. Моделирование работы наблюдателя (16), (17), (19), (20)**

что приводит к неустойчивости алгоритма идентификации. Действительно, коэффициенты обратной связи (20) наблюдателя выбраны для значения амплитуды автоколебаний (13), которая может быть существенно меньше «средней» на периоде составляющей сигнала $x_1$, вызванной возмущениями. Как известно, большие коэффициенты в канале обратной связи могут привести к неустойчивости наблюдателя [16].

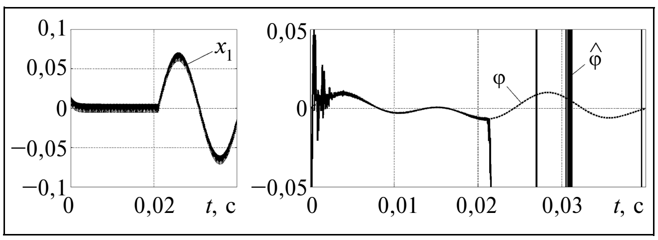


**Рис. 6. Моделирование при алгоритме управления (30)**

На рис. 7 приведены результаты моделирования алгоритма идентификации без компенсации влияния внешнего возмущения, т. е. уравнения наблюдателя (16) выбраны без учета модели возмущений (15) в форме

$$\dot{\hat{x}}_1 = -\hat{\alpha}_1 x_1 + \hat{b}_1 \upsilon_1 + v_{11},$$
$$\dot{\hat{\alpha}}_1 = -k_1 x_1 \tau_1,$$
$$\dot{\hat{b}}_1 = k_2 \upsilon_1 \tau_1,$$

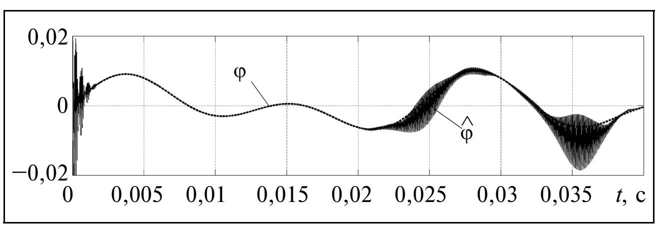


**Рис. 7. Моделирование при отсутствии компенсатора возмущений в алгоритме идентификации**

$$\dot{\hat{x}}_2 = -\hat{\alpha}_2 x_1 - \hat{\alpha}_1 x_2 + \hat{b}_2 \upsilon_1 + v_{21},$$
$$\dot{\hat{\alpha}}_2 = -k_1 x_1 \tau_2,$$
$$\dot{\hat{b}}_2 = k_2 \upsilon_1 \tau_2. \qquad (30)$$

Также рассматриваются две стадии. Сначала возмущения отсутствуют и алгоритм идентификации (17), (19), (20), (29) демонстрирует хорошую работоспособность. Далее, при $t > 0{,}02$ с появляются возмущения (28), и наблюдатель расходится. Данный эксперимент демонстрирует необходимость применения расширенного наблюдателя типа (16).

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Представлены алгоритмы управления и идентификации системы измерения профиля поверхности. Замкнутая система обладает высоким быстродействием, и, кроме того, оказывается нечувствительной к внешним аддитивным и параметрическим возмущениям, в предположении, что их удается описать некоторой динамической моделью. Существенно, что предложенные в работе алгоритмы управления и идентификации не предполагают какой-либо настройки параметров первичного преобразователя, в отличие от известных подходов к построению приборов оценивания шероховатости. Разработанные алгоритмы достаточно универсальны и могут быть применены в устройствах, содержащих дифференциальные датчики, например, в датчиках давления, влажности, массового расхода воздуха и др.

## ЛИТЕРАТУРА


1. *Бирюков Г.С., Серко А.Л.* Измерение геометрических величин и их метрологическое обеспечение. — М.: Изд-во стандартов, 1987.
2. *Дунин-Барковский И.В., Карташова А.Н.* Измерение шероховатости, волнистости и некруглости поверхности. — М.: Машиностроение, 1985.
3. *Kiselyov S.A., Kochetkov S.A., Shavrin P.A.* The control and identification algorithm for devices with differential inductive sensors // Proc. of the 17th World Congress IFAC. — Seoul, Korea, 2008. — P. 1809—1814.
4. *Kochetkov S.A., Shavrin P.A.* Sliding mode identification for surface profile estimation // Proc. of the 9-th International Workshop on Variable Structure Systems (VSS'06). — Italy, Alghero, 2006. — P. 238—243.
5. *Домрачев В.Г.* Схемотехника цифровых преобразователей перемещений. — М.: Энергоатомиздат, 1987.
6. *Сорочкин Б.М.* Средства для линейных измерений. — Л.: Машиностроение, 1978.
7. *Morrison E.* The development of a prototype high-speed stylus profilometer and its application to rapid 3D surface measurement // Nanotechnology. — 1996. — Vol. 1. — P. 37—42.
8. *Мирошник И.В., Никифоров В.О., Фрадков А.Л.* Нелинейное и адаптивное управление сложными динамическими системами. — СПб.: Наука, 2000.
9. *Уткин В.И.* Скользящие режимы в задачах оптимизации и управления. — М.: Наука, 1981.
10. *Ljung L.* System Identification. Theory for the User. — New Jersey, USA: Prentice-Hall, 1999.
11. *Журавлев Ю.Н.* Активные магнитные подшипники: Теория, расчет, применение. — СПб.: Политехника, 2003.
12. *Уткин В.А.* Синтез инвариантных систем методом разделения движений // Автоматика и телемеханика. — 1983. — № 12. — С. 39—48.
13. *Демидович Б.П.* Лекции по математической теории устойчивости. — М.: Наука, 1967.
14. *Кочетков С.А., Уткин В.А.* Компенсация неустранимых неидеальностей исполнительных устройств // Автоматика и телемеханика. — 2010. — № 5. — С. 21—47.
15. *Краснова С.А., Уткин В.А., Михеев Ю.В.* Каскадный синтез наблюдателей состояния нелинейных многомерных систем // Автоматика и телемеханика. — 2001. — № 2. — С. 43—64.
16. *Мееров М.В.* Системы многосвязного регулирования. — М.: Наука, 1967.


*Статья представлена к публикации членом редколлегии В.Ю. Рутковским.*

**Кочетков Сергей Александрович** — канд. техн. наук,
ст. науч. сотрудник, Институт проблем управления
им. В.А. Трапезникова РАН, ☎ (495) 334-93-21, ✉ kos@ipu.ru.