УДК 51-74

СЕМЕЙСТВО МЕТРИК ДЛЯ ПЛАНИРОВАНИЯ ТЕХНИЧЕСКОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ ЭКСПЛУАТИРУЕМЫХ СИСТЕМ

В.В. Климченко

Рассмотрена задача управления состоянием технического объекта на этапе эксплуатации в условиях дефицита информации о его статистических характеристиках. Предложено однопараметрическое семейство метрик для критериев управления; параметр метрики может выбираться в зависимости от требований, предъявляемых к показателям безотказности объекта. Отмечено, что предлагаемый подход допускает некоторые отклонения от «наиболее жесткого» — минимаксного, традиционно применяемого при недостатке информации, и таким образом позволяет снизить эксплуатационные издержки для технических устройств, отказ которых не приводит к катастрофическим последствиям.

Ключевые слова: управление состоянием, метрическое пространство, интенсивность отказов.

ВВЕДЕНИЕ

Управление состоянием технических объектов в процессе их эксплуатации требует выполнения некоторого комплекса профилактических, ремонтных и других восстановительных работ, направленных на поддержание способности устройств выполнять заданные функции на должном уровне. Индивидуальный подход к задачам технического обслуживания, учитывающий специфические особенности каждого конкретного устройства, обладает рядом преимуществ [1] по сравнению с обслуживанием по наработке, опирающимся только на осредненные по некоторому ансамблю объектов статистические данные.

Эффективное управление эксплуатацией и, в частности, планирование технического обслуживания данной конкретной системы должно опираться на прогноз ее состояния. Если известны соответствующие вероятностные характеристики процесса деградации параметров, определяющих качество функционирования технического объекта, а также заданы распределения ошибок, неизбежно возникающих при измерении этих параметров, то процедуру прогнозирования можно построить на основе широко распространенных методов математической статистики и теории случайных процессов. Однако в практических ситуациях требуемые вероятностные характеристики редко бывают известны, а сбор исходных данных для расчета их статистических оценок связан с испытанием большого числа изделий в течение длительного времени, которое к тому же нередко приводит к разрушению испытываемых устройств.

Как правило, дефицит исходной информации восполняется по минимаксному принципу: предполагается, что все неизвестные величины принимают наиболее неблагоприятные значения. Такой подход в большинстве случаев оправдан, поскольку потери, вызванные отказом объекта, обычно многократно превышают затраты на профилактические мероприятия. Минимаксные стратегии технического обслуживания ценою повышенных затрат на профилактику снижают вероятность (а следовательно, и частоту) отказов, наносящих большой материальный ущерб (а иногда и создающих угрозу здоровью и жизни людей).

1. МИНИМАКСНЫЙ АЛГОРИТМ ПРОГНОЗИРОВАНИЯ СОСТОЯНИЯ ТЕХНИЧЕСКИХ УСТРОЙСТВ

Рассмотрим алгоритм, использующий заданную структуру процесса деградации параметров устройства для прогнозирования его технического состояния [1]. Пусть на некотором интервале времени $[0,\ T]$ случайный процесс изменения какого-либо выходного параметра $X(t)$, определяющего качество работы объекта, аппроксимируется разложением

$$X(t) = \sum_{j=1}^{m} A_j \varphi_j(t), \quad t \in [0,\ T],$$

где $A_1, ..., A_m$ — случайные коэффициенты; $\varphi_1(t), ..., \varphi_m(t)$ — детерминированные функции времени. Такое разложение по детерминированному базису обычно отражает медленные изменения параметра $X(t)$, поэтому в качестве базисных функций чаще всего используются алгебраические полиномы невысокой (как правило, первой или второй) степени:

$$X(t) = \sum_{j=1}^{m} A_j t^{j-1}, \quad t \in [0, T]. \quad (1)$$

Значения параметров объекта могут измеряться в процессе его эксплуатации. Предположим, что в моменты времени t_i, $i = 1, 2, ..., n$, были получены результаты Y_i измерений параметра $X(t)$:

$$Y_i = X(t_i) + E_i = \sum_{j=1}^{m} A_j t_i^{j-1} + E_i,$$

$$t_i \in [0, t_n] \subset [0, T], \quad i = \overline{1, n}, \quad (2)$$

где невязка E_i содержит, помимо ошибки i-го измерения, возможную погрешность используемой модели (1). Число измерений должно быть не меньше числа неизвестных параметров: $n \geqslant m$.

В практических ситуациях информация о стохастических свойствах случайных величин A_j и E_i, как правило, отсутствует. Чаще всего можно лишь указать ограничения на возможные значения ошибок E_i:

$$-\Delta_i \leqslant E_i \leqslant \Delta_i, \quad i = \overline{1, n}. \quad (3)$$

Из соотношений (2) и (3) следуют ограничения

$$Y_i - \Delta_i \leqslant \sum_{j=1}^{m} A_j t_i^{j-1} \leqslant Y_i + \Delta_i, \quad i = \overline{1, n}. \quad (4)$$

Пусть D — множество всех точек $(A_1, A_2, ..., A_m)$ m-мерного пространства, удовлетворяющих условиям (4);

$$(A_1^-, A_2^-, ..., A_m^-) = \underset{(A_1, ..., A_m) \in D}{\arg\min} \left\{ \sum_{j=1}^{m} A_j T^{j-1} \right\};$$

$$(A_1^+, A_2^+, ..., A_m^+) = \underset{(A_1, ..., A_m) \in D}{\arg\max} \left\{ \sum_{j=1}^{m} A_j T^{j-1} \right\};$$

$$x_-(t) = \sum_{j=1}^{m} A_j^- t^{j-1}; \quad x_+(t) = \sum_{j=1}^{m} A_j^+ t^{j-1}.$$

Тогда [1, 2]:

$$x_-(t) \leqslant \sum_{j=1}^{m} A_j t^{j-1} \leqslant x_+(t) \ \forall\ (A_1, A_2, ..., A_m) \in D,$$

$$t_n < t < T.$$

Следовательно, значение полинома (1), коэффициенты которого удовлетворяют условиям (4), не может достичь нижней (верхней) границы допуска $x_{\min}$ ($x_{\max}$) на параметр X прежде, чем этого уровня достигнет минимальный (максимальный) полином $x_-(t)$ ($x_+(t)$). Поэтому, согласно минимаксным принципам эксплуатации технического объекта, ближайшие по времени профилактические мероприятия должны быть назначены на момент $t_п = \min\{t_-, t_+\}$, где t_- — время первого (после момента t_n) пересечения полиномом $x_-(t)$ нижней границы допуска $x_{\min}$; t_+ — время первого (после момента t_n) пересечения полиномом $x_+(t)$ верхней границы допуска $x_{\max}$.

Как видно из определения полиномов $x_-(t)$ и $x_+(t)$, их коэффициенты отыскиваются путем минимизации (соответственно, максимизации) функции $X(T; A) = \sum_{j=1}^{m} A_j T^{j-1}$ по m-мерной области D. Так как целевая функция линейна по аргументам $A_1, A_2, ..., A_m$, а границы множества D задаются линейными неравенствами (4), для вычисления искомых коэффициентов можно воспользоваться развитым математическим аппаратом линейного программирования (например, симплекс-методом [3]).

Во многих случаях бывают априорно известны некоторые общие закономерности протекания процесса $X(t)$. Учет такой информации при расчетах может существенно повысить точность прогнозных оценок состояния данного объекта. При этом желательно (там, где это возможно) сформулировать имеющиеся априорные сведения в виде дополнительных линейных ограничений на коэффициенты модели (1).

Пусть, например, известно, что процесс $X(t)$ монотонно убывает, причем скорость этого убывания постепенно снижается. Для аппроксимации таких процессов можно использовать нисходящую (левую) ветвь параболы с положительным старшим коэффициентом: $m = 3$; $A_3 > 0$; $\frac{dX}{dt} = A_2 + 2A_3 t < 0$ $\forall t \in [0, T]$. Последнее из этих условий с учетом предыдущего эквивалентно неравенству $A_2 + 2A_3 T < 0$, которое вместе с условием $A_3 > 0$ должно быть добавлено к системе неравенств-ограничений (4) при отыскании экстремальных полиномов $x_-(t)$ и $x_+(t)$. Таким образом, все ограничения остаются, как и целевая функция $X(T; A)$, линейными, поэтому расчеты по-прежнему могут выполняться симплекс-методом, хорошо зарекомендовавшим себя на практике [3].

Заметим, что если бы в момент первого измерения оказалось, что $x_{\max} - Y_1 < \Delta_1$, это означало бы, что точность измерения при полученном его результате (Y_1) недостаточна для заключения о работоспособности объекта. Потребовалось бы профилактическое (если не аварийное) вмешательство в работу устройства, в результате которого значение измеряемого параметра должно быть откорректировано. Поэтому будем считать, что $x_{\max} \geqslant Y_1 + \Delta_1$. Но из ограничений (4) следует $x_-(t_1) \leqslant Y_1 + \Delta_1$ и $x_+(t_1) \leqslant Y_1 + \Delta_1$, что с учетом условия убывания означает отсутствие пересечения экстремальных полиномов с верхней границей допуска $x_{\max}$ на интервале $[t_1, T]$. Также без ограничения общности можно считать, что полиномы $x_-(t)$ и $x_+(t)$ пересекают нижнюю границу $x_{\min}$ в моменты времени $t = 1$ и $t = 2$ соответственно, так как этого можно добиться путем нормирования (выбора соответствующего масштаба и начала отсчета на временной оси). Если же максимальный полином $x_+(t)$ не пересекает нижнюю границу допуска на интервале $[t_n, T]$, то можно воспользоваться каким-либо взаимно однозначным преобразованием, отображающим интервал $[t_-, \infty)$ в интервал $[1, 2)$. Например,

$$t^* = 2 - \exp\{-\gamma(t - t_-)\}, \qquad (5)$$

где параметр преобразования γ — произвольная положительная константа, значение которой для удобства восприятия результатов вычислений (во избежание появления чисел очень больших или малых порядков при расчетах) целесообразно выбрать соразмерно с интенсивностью отказов, характерной для рассматриваемого класса технических объектов.

Таким образом, отказ рассматриваемой системы может произойти в момент времени $t^* \in [1, 2]$. Пусть $F(t) = \text{Prob}\{t^* < t\}$ — интегральная функция распределения вероятностей величины t^*. Тогда

$$F(t) = 0 \ \forall \ t \leqslant 1, \quad F(t) = 1 \ \forall \ t > 2, \qquad (6)$$

но значения $F(t)$ при $1 < t < 2$ редко бывают известны. Согласно минимаксным принципам, в подобных условиях профилактические мероприятия должны проводиться непосредственно перед моментом $t = 1$, что соответствует оптимальному управлению эксплуатацией для случая

$$F(t) = F_W(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 1; \\ 1, & t > 1. \end{cases} \qquad (7)$$

2. ПАРАМЕТРИЧЕСКОЕ СЕМЕЙСТВО МЕТРИК В ПРОСТРАНСТВЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ

Минимаксный подход (расчет на наихудший случай) оправдан, если отказ объекта может привести к катастрофическим последствиям. Если же убытки, возникающие из-за отказа системы, соизмеримы с затратами на профилактические мероприятия, предположение о законе распределения (7) может оказаться экономически нецелесообразным. В таких случаях предпочтительнее стратегия эксплуатации, допускающая «небольшие» отклонения распределения $F(t)$ от наиболее пессимистичного, определяемого соотношением (7). При этом возникают вопросы, связанные с измерением отклонений законов распределения, т. е. вопросы выбора метрики в пространстве Ψ, элементами которого служат функции распределения, удовлетворяющие условиям (6). Рассмотрим параметрическое семейство метрик ρ_b в пространстве Ψ, заданное по следующему правилу.

Пусть Θ — множество всех непересекающихся замкнутых интервалов, являющихся подмножествами интервала $[1, 2]$;

$$F(t),\ H(t) \in \Psi;$$

$$f(t) = \frac{dF(t)}{dt}, \quad h(t) = \frac{dH(t)}{dt}.$$

Расстояние $\rho_b(F, H)$ между функциями $F(t)$ и $H(t)$ определим как точную нижнюю грань множества таких неотрицательных значений переменной q, при которых для любого подмножества $G \subseteq \Theta$ справедливы неравенства

$$\int_G f(t)dt \leqslant \int_{G_z} h(t)dt + q, \qquad (8)$$

где $G_z = \{t \mid \exists\ \tau \in G: \mid t - \tau \mid < z\}$; $z = z_b(q) = b_0 + b_1 q + b_2 q^2$; b_0, b_1 и b_2 — параметры метрики ρ_b; $b = (b_0, b_1, b_2)^T$.

В целях придания метрике ρ_b естественных свойств расстояния (неотрицательность, симметрия, неравенство треугольника) введем ограничения на параметры b_0, b_1 и b_2:

а) $z_b(0) = 0$;

б) $z_b(1) = 1$;

в) $\dfrac{dz_b(q)}{dq} > 0 \ \forall \ q \in (0, 1)$;

г) $\dfrac{d^2 z_b(q)}{dq^2} \geqslant 0$.

Из условий *а* и *б* следует $b_0 = 0$, $b_1 + b_2 = 1$, т. е. для выбора в пространстве параметров b_0, b_1 и b_2 остается лишь одна степень свободы, поэтому $z_b(q)$ можно представить в виде

$$z_b(q) = z_\lambda(q) = \lambda q + (1 - \lambda)q^2,$$

где $\lambda = b_1$.

Условие *г* эквивалентно неравенству $\lambda \leqslant 1$, при этом из условия *в* следует $\lambda > 2(\lambda - 1)q$. Если q принимает положительные значения, то произведение в правой части этого неравенства не положительно, поэтому при $\lambda > 0$ данное неравенство справедливо. С другой стороны, правая часть стремится к нулю при $q \to 0$, поэтому требование $\lambda \geqslant 0$ необходимо.

Таким образом, ограничения, связанные с естественными свойствами расстояния в пространстве распределений Ψ, приводят к однопараметрическому семейству метрик ρ_λ, $\lambda \in [0, 1]$. При этом функции, входящие в пространство Ψ, могут описывать распределение времени как постепенных (параметрических), так и внезапных отказов рассматриваемого технического объекта.

3. АНАЛИЗ СВОЙСТВ СЕМЕЙСТВА МЕТРИК ρ_λ

Интуитивное понятие расстояния, формализуемое метрикой, подразумевает выполнение следующих условий для любых функций распределения вероятностей $F(t)$, $H(t)$ и $R(t)$, принадлежащих множеству Ψ:

1) $\rho_\lambda(F, H) = 0 \Leftrightarrow F(t) \equiv H(t)$;

2) $\rho_\lambda(F, H) = \rho_\lambda(H, F)$;

3) $\rho_\lambda(F, H) \leqslant \rho_\lambda(F, R) + \rho_\lambda(R, H)$.

Свойство *1* очевидно из определения (8) метрики ρ.

Для доказательства свойства симметрии *2* обозначим через Q_{FH} множество неотрицательных значений q, удовлетворяющих условию (8) при любом $G \subseteq \Theta$. Согласно определению, $\rho_\lambda(F, H) = \inf Q_{FH}$. Пусть $q_0 < \rho_\lambda(F, H)$. Тогда $q_0 \notin Q_{FH}$, т. е. $\exists\ W \subseteq \Theta$:

$$\int_W f(t)dt > \int_{W_z} h(t)dt + q_0, \qquad (9)$$

где $z = z_\lambda(q_0) = \lambda q_0 + (1 - \lambda)(q_0)^2$.

Обозначив дополнение множества W_z до интервала [1, 2] через V, можно представить неравенство (9) в виде

$$1 - \int_{V_z} f(t)dt > 1 - \int_V h(t)dt + q_0,$$

откуда

$$\int_V h(t)dt > \int_{V_z} f(t)dt + q_0,$$

т. е. $q_0 \notin Q_{HF}$. Но если множество Q_{HF} не содержит элементов, значения которых меньше $\rho_\lambda(F, H)$, то $\rho_\lambda(F, H) \leqslant \inf Q_{HF} = \rho_\lambda(H, F)$. Аналогичными рассуждениями доказывается неравенство $\rho_\lambda(F, H) \geqslant \rho_\lambda(H, F)$, откуда следует свойство *2*.

Неравенство *3* можно доказать путем следующих рассуждений.

Пусть G — произвольное подмножество множества Θ;

$$q_1 = \rho_\lambda(F, R); \quad q_2 = \rho_\lambda(R, H); \quad q_3 = q_1 + q_2;$$

$$z_k = z_\lambda(q_k), \quad V_k = G_{z_k}, \quad k = 1, 2, 3;$$

$$r(t) \equiv \frac{dR(t)}{dt}.$$

Тогда $\int_G f(t)dt - \int_{V_3} h(t)dt = \int_G f(t)dt - \int_{V_1} r(t)dt +$

$+ \int_{V_1} r(t)dt - \int_{V_3} h(t)dt \leqslant \rho_\lambda(F, R) + \int_{V_1} r(t)dt - \int_{V_3} h(t)dt.$

Поскольку $z_3 = z_\lambda(q_1 + q_2) = \lambda(q_1 + q_2) + (1 - \lambda) \times (q_1 + q_2)^2 = z_1 + z_2 + 2(1 - \lambda)q_1q_2$, множество V_3 содержит подмножество $G_{(z_1 + z_2)}$, которое, в свою очередь, включает в себя $(V_1)_{z_2}$, т. е. $V_3 \supseteq V$, где $V = (V_1)_{z_2}$. Таким образом, ввиду неотрицательности подынтегральной функции $h(t)$,

$$\int_{V_1} r(t)dt - \int_{V_3} h(t)dt \leqslant \int_{V_1} r(t)dt - \int_V h(t)dt \leqslant \rho_\lambda(R, H).$$

Следовательно, $\int_G f(t)dt - \int_{V_3} h(t)dt \leqslant \rho_\lambda(F, R) + \rho_\lambda(R, H) = q_3$. Полученное неравенство, в силу произвольности выбора подмножества G, означает, что $q_3 \in Q_{FH}$. Справедливость неравенства *3* следует из того, что $\rho_\lambda(F, H) = \inf Q_{FH}$.

4. ПРИМЕРЫ

Пусть остаточный временной ресурс τ технического устройства подчинен закону распределения определенного вида с плотностью $f_\tau(\tau)$, которая содержит неизвестные параметры. Предположим, что для выполнения очередной задачи требуется непрерывная эксплуатация данного технического объекта в течение μ часов. Тогда, воспользовавшись каким-либо взаимно однозначным преобразованием $t = h(\tau)$, отображающим интервал $[t_-, \infty)$ в интервал [1, 2), можно представить вероятность безотказной работы устройства на интервале времени $[t_-, t_- + \mu]$ в виде

$$p = 1 - \int_{t_-}^{t_- + \mu} f_\tau(\tau)d\tau = 1 - \int_1^\eta f(t)dt = 1 - F(\eta),$$

где $\eta = h(t_- + \mu)$ (предполагается, что при $\tau \geqslant t_-$ функция $h(\tau)$ монотонно возрастает);

$$f(t) = f_\tau(\tau(t))\frac{d\tau(t)}{dt}; \quad \tau(t) = h^{-1}(t).$$

Функция распределения $F(t)$ не известна, поскольку плотность $f_\tau(\tau)$ (а следовательно, и $f(t)$)

содержит неизвестные параметры. В подобных ситуациях можно выбирать функцию $F(t)$ в расчете на «наихудший» случай, т. е. по формуле (7): $F(t) = F_W(t)$. При этом профилактические мероприятия должны быть предприняты к моменту времени $t = 1$. Расчет на «наихудший» случай необходим, если отказ данного объекта может привести к катастрофическим последствиям. Если же ущерб, вызванный отказом, c_d сопоставим с затратами на профилактику c_r, то допустимо отступление от предположения о «наихудшем» распределении $F_W(t)$ на некоторую величину β в целях снижения эксплуатационных затрат.

При этом решение о проведении (или непроведении) очередной профилактики принимается на основе «умеренно пессимистичной» оценки вероятности p безотказной работы, отыскиваемой по множеству таких распределений $F(t)$, отклонение которых от «наихудшего» распределения $F_W(t)$ не превышает заданной величины β.

Пример 1. Плотность распределения остаточного временного ресурса τ технических устройств часто описывается экспоненциальным законом [4, 5]:

$$f_\tau(\tau) = \alpha\exp\{-\alpha\,(\tau - t_-)\}, \quad \tau \geqslant t_-,$$

где α — интенсивность отказов. Применяя отображение (5), получим

$$f(t) = f_\tau(\tau(t))\frac{d\tau}{dt} = f_\tau(t_- - \ln(2 - t)/\gamma)/(\gamma(2 - t)) =$$

$$= (\alpha/\gamma)(2 - t)^{(\alpha/\gamma) - 1}, \qquad (10)$$

$$p = 1 - \int\limits_{t_-}^{t_- + \mu} \alpha\exp\{-\alpha(\tau - t_-)\}dt =$$

$$= 1 - \int\limits_{1}^{1+s} \frac{\alpha}{\gamma}(2 - t)^{(\alpha/\gamma)-1}dt = 1 - F(1+s), \qquad (11)$$

где $s = 1 - \exp\{-\gamma\,\mu\}$; значение параметра α не известно.

Расстояние $\rho_\lambda(F_W, F)$ между функциями $F_W(t)$ и $F(t)$ можно найти как значение $q = q^*$, при котором достигается равенство

$$U(q) \equiv \int\limits_{1}^{1+z(q)} f(t)dt + q = 1, \qquad (12)$$

где $z(q) = \lambda q + (1 - \lambda)q^2$. Действительно, если $q < q^*$, то $U(q) < 1$. В этом случае, при выборе в качестве множества G достаточно малой окрестности точки $t = 1$, не выполняется условие

$$\int\limits_G f_w(t)dt \leqslant \int\limits_{G_z} f(t)dt + q, \qquad (13)$$

где $f_W(t) = \dfrac{dF_W(t)}{dt}$, т. е. $f_W(t)$ является дельта-функцией Дирака, сосредоточенной в точке $t = 1$. Следовательно, такие значения q не принадлежат множеству Q_{F_WF}. Если же $q > q^*$, то неравенство (13) справедливо при любом $G \subseteq \Theta$. Чтобы убедиться в этом, достаточно рассмотреть только такие множества G, которые содержат точку $t = 1$, так как в противном случае $\int\limits_G f(t)dt = 0$, и справедливость неравенства (13) очевидна. Но из включения $1 \in G$ следует, что интервал $[1,\ 1 + z(q))$ входит в множество G_z, поэтому, в силу неотрицательности плотности $f(t)$,

$$\int\limits_{G_z} f(t)dt + q \geqslant \int\limits_{1}^{1+z(q)} f(t)dt + q =$$

$$= U(q) > U(q^*) = 1 = \int\limits_G f_w(t)dt.$$

Таким образом, $q^* = \rho_\lambda(F_W, F)$, и неизвестное значение α можно найти, подставив в равенство (12) допустимое отклонение β вместо q.

Пусть, например, $c_d/c_r = 5$; $\mu = 24$; $\beta = 0{,}2$; $\lambda = 0{,}8$; $\gamma = 0{,}001$. Воспользовавшись соотношениями (10)—(12), найдем:

$$1 = U(0{,}2) = 1000\alpha \int\limits_{1}^{1+z(0,2)} (2 - t)^{1000\alpha-1}dt + 0{,}2 =$$

$$= 1 - (1 - z(0{,}2))^{1000\alpha} + 0{,}2 = 1{,}2 - 0{,}832^{1000\alpha}.$$

Следовательно, $0{,}832^{1000\alpha} = 0{,}2$, откуда $1000\alpha = \ln(0{,}2)/\ln(0{,}832) = 8{,}7506 = \alpha/\gamma$, и оценку вероятности безотказной работы технического объекта на интересующем нас интервале времени можно найти по формуле (11): $p = (1 - s)^{(\alpha/\gamma)} = \exp\{-\alpha\mu\} = 0{,}8106$.

Профилактика, выполненная к моменту времени $t = 1$, позволит избежать потерь c_d, но потребует затрат c_r. Если же отказаться от профилактических мероприятий, то оценкой математического ожидания потерь будет $\mathrm{M}c = p \cdot 0 + (1 - p) \cdot c_d = (1 - p)5c_r = 0{,}9471c_r < c_r$, т. е. проведение профилактики нецелесообразно. Однако если параметру метрики присвоить значение $\lambda = 0{,}4$, аналогичные расчеты приведут к иному выводу. В этом случае $\alpha/\gamma = 14{,}6559$, $p = 0{,}7035$ и $\mathrm{M}c = 1{,}4827c_r$, откуда следует потребность в выполнении профилактических мероприятий к моменту $t = 1$.

Пример 2. Экспоненциальный закон описывает распределение остаточного ресурса с приемлемой точностью, если на рассматриваемом интервале времени можно пренебречь износом данного устройства. В противном случае необходимо воспользоваться законом распределения временного ресурса с монотонно возрастающей интенсивностью отказов, например, распределением Релея [6]:

$$f_\tau(\tau) = \begin{cases} 0, \tau < t_-, \\ \dfrac{\tau - t_-}{\theta^2}\exp\left\{-\dfrac{(\tau - t_-)^2}{2\theta^2}\right\}, \tau \geq t_-, \end{cases}$$

где θ — параметр, значение которого в рассматриваемом примере не известно.

Для отображения интервала $[t_-, \infty)$ в интервал $[1, 2)$ в данном случае удобнее воспользоваться преобразованием

$$t = 2 - \exp\left\{-\frac{(\tau - t_-)^2}{2\xi^2}\right\}, \quad \tau \geqslant t_-,$$

причем значение параметра преобразования ξ желательно выбрать из диапазона возможных значений параметра распределения θ. Полагая $\nu = \xi^2/\theta^2$, найдем по аналогии с предыдущим примером:

$$f(t) = \nu(2 - t)^{\nu-1},$$

$$p = 1 - \int_{t_-}^{t_- + \mu} \frac{\tau - t_-}{\theta^2} \exp\left\{-\frac{(\tau - t_-)^2}{2\theta^2}\right\} d\tau =$$

$$= 1 - \int_{1}^{1+r} \nu(2 - t)^{\nu - 1} dt = 1 - F(1 + r),$$

где $r = 1 - \exp\{-\mu^2/(2\xi^2)\}$.

Пусть $c_d/c_r = 5$; $\mu = 24$; $\beta = 0{,}2$; $\lambda = 0{,}8$; $\xi = 100$. Значение параметра θ можно выбрать из условия (12), которое при $q = \beta$ задает допустимое отклонение распределения остаточного ресурса от «наихудшего» закона (7):

$$1 = \nu \int_{1}^{1 + z(0,2)} (2 - t)^{\nu - 1} dt + 0{,}2 =$$

$$= 1 - (1 - z(0{,}2))^{\nu} + 0{,}2 = 1{,}2 - 0{,}832^{\nu}.$$

Следовательно, $\nu = \ln(0{,}2)/\ln(0{,}832) = 8{,}7506$; $\theta^2 = 1142{,}8$; $p = (1 - r)^{\nu} = \exp\{-\mu^2/(2\theta^2)\} = 0{,}7772$.

В случае отказа от профилактических мероприятий к моменту времени $t = 1$ ожидаемые потери составили бы $\mathrm{M}c = (1 - p)5c_r = 1{,}1138c_r > c_r$, т. е. профилактику следует выполнить.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Традиционным путем преодоления априорной неопределенности служит минимаксный подход, суть которого состоит в присвоении «наихудших» значений неизвестным характеристикам технического объекта и условий его эксплуатации. Такой подход оправдан, если отказ данной системы может привести к катастрофическим последствиям. В противном случае чрезмерно пессимистичная стратегия технического обслуживания приводит к завышению эксплуатационных затрат. Избежать подобных недостатков позволяют критерии управления состоянием эксплуатируемого устройства, основанные на предлагаемом параметрическом семействе метрик ρ_λ.

Эффективное управление должно ориентироваться на показатели надежности и качества данного объекта, к важнейшим из которых относится вероятность безотказной работы p. В принципе, вероятность p можно вычислить, если известна плотность $f_A(A_1, ..., A_m)$ совместного распределения вероятностей коэффициентов $A_1, ..., A_m$. Однако плотность f_A редко бывает известна, а сбор статистических данных для хотя бы весьма приближенной ее оценки требует испытаний очень большого числа изделий в течение длительного времени. Как правило, более доступна информация о виде закона распределения остаточного ресурса τ. Например, часто удается из теоретических соображений выдвинуть гипотезу о принадлежности плотности $f_\tau(\tau)$ тому или иному классу функций (с точностью до неизвестных параметров) [7]. При этом для случайных величин, принадлежащих данному семейству, отыскивается закон распределения какой-либо статистики, не зависящей от значений неизвестных параметров функции $f_\tau(\tau)$. Поскольку τ — одномерная величина, построение требуемых статистик не вызывает затруднений. Их можно использовать для проверки гипотезы о виде закона распределения остаточного ресурса по результатам небольшого числа испытаний.

Выбор значения параметра λ из интервала [0, 1] должен отражать требования, предъявляемые к показателям безотказности данного технического объекта. Если значение λ близко к нулю, то к наиболее пессимистичному закону (7) окажутся достаточно близки (в смысле принятой метрики) только такие распределения остаточного ресурса t^*, плотность которых сконцентрирована недалеко от момента времени $t = 1$. Это свойство метрики ρ_λ можно использовать при выборе параметра λ: в случае отсутствия достаточной информации для определения наиболее подходящего значения λ допустимы отклонения в меньшую сторону. Стратегия технического обслуживания, опирающаяся на такую метрику, окажется более «осторожной», т. е. она будет ближе к минимаксной стратегии, ориентированной на наихудший случай. Если же убытки, к которым может привести отказ объекта, сопоставимы с затратами на профилактические мероприятия, то целесообразно увеличить λ для снижения эксплуатационных затрат. Заметим также, что при выборе значения λ = 1 предлагаемая метрика совпадает с метрикой Прохорова [8].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Абрамов О. В., Розенбаум А. Н.* Управление эксплуатацией систем ответственного назначения. — Владивосток: Дальнаука, 2000. — § 4.2.
2. *Абрамов О. В., Розенбаум А. Н.* Прогнозирование состояния технических систем. — М.: Наука, 1990. — 126 с.
3. *Моисеев Н. Н., Иванилов Ю. П., Столярова Е. М.* Методы оптимизации. — М.: Наука, 1978. — 352 с.
4. *Справочник* по надежности — Т. 1 / Под ред. Б. Р. Левина. — М.: Мир, 1969. — 340 с.
5. *Надежность* технических систем: Справочник / Под ред. И. А. Ушакова. — М.: Радио и связь, 1985. — 608 с.
6. *Дружинин Г. В.* Надежность систем автоматики. — М.: Энергия, 1967. — 528 с.
7. *Гнеденко Б. В., Беляев Ю. К., Соловьев А. Д.* Математические методы в теории надежности. — М.: Наука, 1965. — Гл. 2, 4.
8. *Прохоров Ю. В.* Сходимость случайных процессов и предельные теоремы теории вероятностей // Теория вероятностей и ее применения. — 1956. — Т. 1, вып. 2. — С. 177—238.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А. С. Манделем.

Климченко Владимир Владимирович — канд. техн. наук, ст. науч. сотрудник,
Институт автоматики и процессов управления ДВО РАН,
г. Владивосток, ☎(4232) 31-02-02, ✉ volk@iacp.dvo.ru.