УДК 519.246.8



# МОДИФИКАЦИЯ МНОГОМЕРНОГО АЛГОРИТМА ЛЕВИНСОНА

В.В. Климченко

Исследованы зависимости между ковариационными матрицами, вычисляемыми в процессе многомерной рекурсии Левинсона. Показано, что учет выявленных взаимосвязей сокращает число операций обращения матриц в два раза по сравнению со стандартным вариантом алгоритма.

**Ключевые слова:** идентификация систем, многомерный временной ряд, блочно-теплицева матрица, быстрый алгоритм, многомерная рекурсия Левинсона.

## ВВЕДЕНИЕ

Многие задачи управления приводят к системам уравнений с так называемыми «структурированными» (например, с теплицевыми или с ганкелевыми) матрицами. Для решения таких уравнений применяются «быстрые» алгоритмы, использующие особенности структуры матрицы. В отличие от традиционных алгоритмов, предназначенных для матриц произвольной структуры и требующих $O(n^3)$ арифметических операций (где $n$ — порядок матрицы), трудоемкость быстрых алгоритмов составляет $O(n^2)$.

Среди быстрых алгоритмов для теплицевых матриц можно выделить два основных класса. Один из них охватывает различные варианты алгоритма Шура [1], другой включает в себя алгоритмы, основанные на широко известной рекурсии Левинсона [2]. Алгоритм Шура отыскивает разложение теплицевой матрицы в произведение треугольных множителей, тогда как рекурсия Левинсона приводит к аналогичному разложению обратной матрицы. Другая особенность алгоритма Левинсона состоит в минимальном объёме памяти, необходимой для отыскания решения системы уравнений. Эти свойства делают рекурсию Левинсона особенно привлекательной в ситуациях, требующих быстрого решения систем уравнений с матрицами больших размеров. В качестве типичных примеров области применения этого алгоритма можно привести идентификацию в режиме реального времени при адаптивном управлении, а также задачи обработки звуковых сигналов [3] и изображений [4].

Отметим и так называемые «сверхбыстрые» алгоритмы [5, 6]. Такие процедуры, разработанные на основе обобщенного алгоритма Шура, требуют $O(n\log^2 n)$ арифметических операций для решения системы уравнений с теплицевой матрицей порядка $n$. Однако, поскольку символ Ландау $O(\cdot)$ характеризует лишь асимптотическое поведение различных алгоритмов при $n \to \infty$, вопрос об их свойствах при конечных значениях $n$ требует отдельного рассмотрения. Теоретические исследования показывают [5] и численные эксперименты подтверждают [6], что сверхбыстрые алгоритмы по скорости своей работы «настигают» рекурсию Левинсона при $256 < n < 512$, тогда как при $n < 256$ алгоритм Левинсона явно предпочтительнее.

При идентификации многомерных процессов приходится решать системы уравнений с блочно-теплицевыми матрицами, и алгоритм Левинсона был адаптирован для этого случая [7, 8]. На каждой итерации в многомерной рекурсии Левинсона наиболее трудоемки операции обращения двух ковариационных матриц. Одна из них содержит ковариации ошибок прогнозирования исследуемого процесса, вторая состоит из ковариаций ошибок «прогнозирования назад», т. е. ошибок оценивания предыдущих значений.

Если каждый блок в блочно-теплицевой матрице системы уравнений представляет собой, в свою очередь, теплицеву подматрицу, то использование взаимосвязей между ковариациями ошибок позволяет сократить число операций обращения ковариационных матриц в два раза [9]. Однако, хоть такое допущение и естественно для задач обработки изображений [4], оно оказывается весьма ограничивающим при идентификации в контексте задач управления.

В данной статье исследуются зависимости между ковариационными матрицами ошибок без каких-либо предположений о структуре блоков, из которых состоит блочно-теплицева матрица системы уравнений. Вывод формул опирается лишь на предположение о положительной определенности обращаемых ковариационных матриц. Такое допущение, в отличие от принятого в работе [9] предположения о теплицевой структуре каждого блока, не оказывает существенного влияния на область применимости полученных результатов, так как в практических ситуациях оно, как правило, справедливо.

Использование выявленных взаимосвязей сокращает число операций обращения матриц в два раза по сравнению со стандартным вариантом многомерной рекурсии Левинсона.

## 1. ИДЕНТИФИКАЦИЯ ФИЛЬТРА ДЛЯ ОПТИМАЛЬНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ СЛУЧАЙНОГО ПРОЦЕССА

Типичный пример применения алгоритма Левинсона представляет собой задача идентификации системы для оптимального (в смысле минимума среднеквадратичных ошибок) преобразования некоторого наблюдаемого стационарного процесса. Пусть

$$y_t = \sum_{j=0}^{n} A_j x_{t-j} + e_t, \qquad (1)$$

где $x_t = (x_{1,t} \dots x_{r,t})^T$ — заданный $r$-мерный входной сигнал искомого фильтра (предполагается, что процесс $x_t$ центрирован, т. е. $\mathrm{M}\{x_{k,\ t}\} = 0$); $y_t = (y_{1,t} \dots y_{r,t})^T$ — требуемый выходной сигнал; $A_j$ — искомые матрицы коэффициентов фильтра размером $r \times r$, $j = 0, 1, \dots, n$; $e_t = (e_{1,t} \dots e_{r,t})^T$ — $r$-мерный вектор ошибок.

Принцип ортогональности предполагает некоррелированность ошибок с входным сигналом:

$$\mathrm{M}\{e_t x_{t-j}^T\} = 0_r, \quad j = 0, 1, \dots, n, \qquad (2)$$

где символом $0_r$ обозначена нулевая матрица размера $r \times r$. Действительно, если бы существовала ненулевая корреляция компонент вектора $e_t$ с компонентами вектора $x_{t-j}$, то значения ошибок можно было бы оценивать по значениям входного процесса. Включая такие оценки как поправки в модель фильтра, входящую в правую часть формулы (1), можно было бы уменьшить дисперсию компонент вектора ошибок $e_t$, т. е. фильтр (1) не был бы оптимальным. Таким образом, соотношения (2) отражают условие оптимальности искомого фильтра.

Выразив ошибки через входной и выходной сигналы при помощи равенства (1), получим

$$\mathrm{M}\left\{\left(y_t - \sum_{j=0}^{n} A_j x_{t-j}\right) x_{t-k}^T\right\} = 0_r, \quad k = 0, 1, \dots, n,$$

откуда следуют уравнения

$$\sum_{j=0}^{n} A_j \mathrm{M}\{x_{t-j} x_{t-k}^T\} = \mathrm{M}\{y_t x_{t-k}^T\}, \quad k = 0, 1, \dots, n, \qquad (3)$$

которые можно записать более компактно, если ввести обозначения $\mathrm{M}\{x_t x_{t-k}^T\} = C_k$, $\mathrm{M}\{y_t x_{t-k}^T\} = B_k$.

Тогда система уравнений (3) с учетом стационарности процесса $x_t$ принимает вид

$$\sum_{j=0}^{n} A_j C_{k-j} = B_k, \quad k = 0, 1, \dots, n,$$

или, в матричной форме записи,

$$AC = B, \qquad (4)$$

где $A = (A_0\ A_1\ \dots\ A_n)$; $B = (B_0\ B_1\ \dots\ B_n)$;

$$C = \begin{pmatrix} C_0 & C_1 & \dots & C_{n-1} & C_n \\ C_{-1} & C_0 & \dots & & C_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ C_{-n+1} & & \dots & C_0 & C_1 \\ C_{-n} & C_{-n+1} & \dots & C_{-1} & C_0 \end{pmatrix} —$$

симметрическая положительно определенная блочно-теплицева матрица, состоящая из блоков $C_l$ размером $r \times r$, причем $C_{-l} = C_l^T$, $l = -n, \dots, -1, 0, 1, \dots, n$.

В Приложении приведен многомерный алгоритм Левинсона, которым можно воспользоваться для решения системы уравнений (4), заменив неизвестные ковариационные подматрицы $C_l$ их статистическими оценками $R_l$. Отличительная черта алгоритма, помимо высокой скорости расчетов и минимального объема требуемой памяти, заключается в рекурсивной последовательности вычислений. На каждой итерации решение системы (4) для некоторого значения $n = m$ выражается через решение для случая $n = m - 1$, найденное на предыдущей итерации. Эта особенность алгоритма очень удобна на практике, так как порядок фильтра (1) обычно не известен априорно. Выполнив расчеты при некотором $n = m$, можно проверить адекватность найденной модели, и в случае отрицательного результата проверки продолжать рекурсивные вычисления до достижения требуемой точности. Статистические критерии для проверки адекватности эмпирической модели многомерного случайного процесса можно найти, например, в работах [10—12].

## 2. АНАЛИЗ ВЗАИМОСВЯЗЕЙ МЕЖДУ КОВАРИАЦИОННЫМИ МАТРИЦАМИ

Предположим, что $r$-мерный фильтр с весовыми матрицами $Y_{m-1,0}$, $Y_{m-1,1}$, ..., $Y_{m-1,m-1}$ применяется для прогнозирования значения процесса $x_{t+1}$ по предшествующим значениям $x_t$, $x_{t-1}$, ..., $x_{t-m+1}$:

$$x_{t+1} = \hat{x}_{t+1} + \varepsilon_{t+1}, \tag{5}$$

где

$$\hat{x}_{t+1} = -\sum_{j=0}^{m-1} Y_{m-1,j}x_{t-j} \text{ —} \tag{6}$$

прогнозируемое значение вектора $x_{t+1}$, $\varepsilon_{t+1}$ — $r$-мерный вектор ошибок прогноза.

Соотношения (5) и (6) приводят к простой формуле для вычисления статистических оценок ковариаций случайного вектора $\varepsilon_{t+1}$. Поскольку процесс $x_t$ центрирован, то

$$\mathrm{M}\{\varepsilon_{t+1}\} = \mathrm{M}\{x_{t+1} - \hat{x}_{t+1}\} =$$
$$= \mathrm{M}\{x_{t+1}\} + \sum_{j=0}^{m-1} Y_{m-1,j}\mathrm{M}\{x_{t-j}\} = (\underbrace{0 \cdots 0}_{r})^T.$$

Поэтому

$$\mathrm{cov}\{\varepsilon_{t+1}, \varepsilon_{t+1}\} = \mathrm{M}\{\varepsilon_{t+1}\varepsilon_{t+1}^T\} =$$
$$= \mathrm{M}\left\{\left(x_{t+1} + \sum_{j=0}^{m-1} Y_{m-1,j}x_{t-j}\right)\left(x_{t+1} + \sum_{j=0}^{m-1} Y_{m-1,j}x_{t-j}\right)^T\right\} =$$
$$= \mathrm{M}\{x_{t+1}x_{t+1}^T\} + \sum_{j=0}^{m-1} Y_{m-1}\mathrm{M}\{x_{t-j}x_{t+1}^T\} +$$
$$+ \sum_{j=0}^{m-1} \mathrm{M}\{x_{t+1}x_{t-j}^T\}\, Y_{m-1,j}^T +$$
$$+ \sum_{j,k=0}^{m-1} Y_{m-1,j}\mathrm{M}\{x_{t-j}x_{t-k}^T\}\, Y_{m-1,k}^T.$$

Учитывая, что (вследствие стационарности процесса $x_t$) элементы матрицы $\mathrm{M}\{x_{t-j}x_{t-k}^T\} = C_{k-j}$ зависят только от разности индексов $(k - j)$, выражение для автоковариационной матрицы ошибок можно представить в виде

$$\mathrm{cov}\{\varepsilon_{t+1}, \varepsilon_{t+1}\} = C_0 + \sum_{j=0}^{m-1} Y_{m-1,j}C_{-1-j} +$$
$$+ \sum_{j=0}^{m-1} C_{j+1}\,Y_{m-1,j}^T + \sum_{j,k=0}^{m-1} Y_{m-1,j}C_{k-j}Y_{m-1,k}^T =$$
$$= C_0 + \sum_{j=1}^{m} Y_{m-1,j-1}C_{-j} + \sum_{j=0}^{m-1} C_{j+1}\,Y_{m-1,j}^T +$$
$$+ \sum_{k=0}^{m-1}\left[\sum_{j=0}^{m-1} Y_{m-1,j}C_{k-j}\right]Y_{m-1,k}^T =$$
$$= C_0 + \sum_{j=1}^{m} Y_{m-1,j-1}\,C_j^T +$$
$$+ \sum_{i=0}^{m-1}\left[C_{i+1} + \sum_{j=0}^{m-1} Y_{m-1,j}C_{i-j}\right]Y_{m-1,i}^T \tag{7}$$

Если заменить неизвестные матрицы $C_j$ их статистическими оценками $R_j$, а матричные коэффициенты $Y_{m-1,j}$ выбрать так, чтобы выполнялось условие (П1 — см. Приложение), то выражение в квадратных скобках формулы (7) обращается в нуль при всех значениях индекса $i = 0, 1, ..., m - 1$. При этом, как видно из соотношений (7) и (П6), матрица $\tilde{V}_m$ является выборочной ковариационной матрицей случайного вектора $\varepsilon_{t+1}$.

Далее, рассматривая так называемую задачу «прогнозирования в обращенном времени» (т. е. задачу оценивания вектора $x_{t-m}$ по векторам $x_{t-m+1}$, $x_{t-m+2}$, ..., $x_t$), можно путем аналогичных рассуждений убедиться в том, что матрица $V_m$, определяемая формулой (П4), является ковариационной матрицей случайного вектора, состоящего из ошибок такого оценивания.

Таким образом, матрицы $V_m$ и $\tilde{V}_m$ неотрицательно определены, поскольку это матрицы ковариаций случайных векторов с действительными компонентами. Более того, если бы какая-либо из этих матриц оказалось вырожденной, то соответствующее распределение вероятностей было бы несобственным, т. е. существовала бы детерминированная зависимость между компонентами случайного вектора. Так как в практических ситуациях подобные свойства не характерны для случайных процессов, будем предполагать, что матрицы $V_m$ и $\tilde{V}_m$ не вырождены и, следовательно, положительно определены.

Рассмотрим матрицу $F_m = \tilde{W}_m W_m$ (где сомножители $\tilde{W}_m$ и $W_m$ определены формулами (П5) и (П3)) и обозначим ее характеристические числа через $f_1, ..., f_r$. Из определения сомножителей матрицы $F_m$ следует равенство

$$V_m^{-1/2} F_m V_m^{1/2} = V_m^{-1/2} U_m^T \tilde{V}_m^{-1} U_m V_m^{-1/2} = = (\tilde{V}_m^{-1/2} U_m V_m^{-1/2})^T (\tilde{V}_m^{-1/2} U_m V_m^{-1/2}),$$

т. е. существует преобразование подобия, связывающее матрицу $F_m$ с некоторой симметрической неотрицательно определенной матрицей, все элементы которой действительны. Следовательно, все характеристические числа $f_1, ..., f_r$ действительны и неотрицательны [13].

Кроме того, воспользовавшись соотношениями (П3), (П5) и (П12), получим

$$V_{m+1} = (I_r - F_m)V_m, \qquad (8)$$

где $I_r$ — единичная матрица порядка $r$. Представив это равенство в виде

$$V_m^{-1/2} V_{m+1} V_m^{-1/2} = V_m^{-1/2}(I_r - F_m)V_m^{1/2} = = (V_{m+1}^{1/2} V_m^{-1/2})^T V_{m+1}^{1/2} V_m^{-1/2}$$

и учитывая невырожденность матриц $V_m$ и $V_{m+1}$, можно убедиться в том, что все характеристические числа матрицы $(I_r - F_m)$ (обозначим их через $g_1, ..., g_r$) действительны и положительны.

Числа $g_1, ..., g_r$ по определению являются корнями уравнения $\det(I_r - F_m - \lambda I_r) \equiv \det(-F_m + (1 - \lambda)I_r) = 0$, тогда как характеристические числа $f_1, ..., f_r$ удовлетворяют уравнению $\det(F_m - \lambda I_r) = 0$. Поэтому все корни этих двух уравнений можно проиндексировать в такой последовательности, что $f_k = 1 - g_k$, $k = 1, ..., r$. Так как все $f_k$ действительны и неотрицательны, а все $g_k$ действительны и положительны, то из полученных соотношений следуют неравенства

$$|f_k| < 1, \quad k = 1, ..., r. \qquad (9)$$

Путем аналогичных рассуждений можно прийти к соотношениям

$$\tilde{V}_{m+1} = (I_r - \tilde{F}_m)\tilde{V}_m, \qquad (10)$$

$$|\tilde{f}_k| < 1, \quad k = 1, ..., r, \qquad (11)$$

где $\tilde{F}_m = W_m \tilde{W}_m$; $\tilde{f}_1, ..., \tilde{f}_k$ — характеристические числа матрицы $\tilde{F}_m$.

Известно [13], что при выполнении условий (9) и (11) сходятся матричные степенные ряды

$$\sum_{j=0}^{\infty} F_m^j = (I_r - F_m)^{-1} \text{ и } \sum_{j=0}^{\infty} \tilde{F}_m^j = (I_r - \tilde{F}_m)^{-1}.$$

Следовательно, $(I_r - \tilde{F}_m)^{-1} = \sum_{j=0}^{\infty} (W_m \tilde{W}_m)^j = I_r + + \sum_{j=0}^{\infty} (W_m \tilde{W}_m)^j = I_r + \sum_{j=0}^{\infty} W_m (\tilde{W}_m W_m)^j \tilde{W}_m = I_r + + W_m \left( \sum_{j=0}^{\infty} F_m^j \right) \tilde{W}_m$, т. е.

$$(I_r - \tilde{F}_m)^{-1} = I_r + W_m (I_r - F_m)^{-1} \tilde{W}_m. \qquad (12)$$

Заметим, что матрицы $V_m$ и $\tilde{V}_m$ входят в формулы алгоритма Левинсона в минус первой степени. Исключение составляют лишь формулы (П12) и (П13), предназначенные только для перехода к следующей итерации. Поэтому на каждой итерации можно избежать вычисления матриц $V_{m+1}$ и $\tilde{V}_{m+1}$, если сразу вычислять обратные к ним матрицы по формулам

$$V_{m+1}^{-1} = V_m^{-1}(I_r - F_m)^{-1}, \qquad (13)$$

$$\tilde{V}_{m+1}^{-1} = \tilde{V}_m^{-1}(I_r - \tilde{F}_m)^{-1}, \qquad (14)$$

вытекающим из соотношений (8) и (10).

Таким образом, выведенная здесь формула (12) предоставляет возможность заменить процедуру обращения двух матриц $V_{m+1}$ и $\tilde{V}_{m+1}$ обращением только одной матрицы $(I_r - F_m)$. Вычислив $(I_r - F_m)^{-1}$, можно затем найти $V_{m+1}^{-1}$ и $\tilde{V}_{m+1}^{-1}$ по формулам (12)—(14). Следовательно, применение предлагаемой модификации на каждой итерации алгоритма приводит к двукратному сокращению числа операций обращения матриц, поскольку матрицы $V_m^{-1}$ и $\tilde{V}_m^{-1}$, используемые в формулах (13) и (14), найдены на предыдущем шаге.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Наиболее трудоемкими операциями многомерной рекурсии Левинсона являются процедуры обращения матриц. Предлагаемая модификация вычислительной схемы позволяет сократить число обращаемых матриц в два раза по сравнению со стандартным вариантом алгоритма. Однако, как было уже отмечено во Введении к данной статье, при достаточно больших ($n$ > 512) размерах матрицы решаемой системы уравнений «сверхбыстрые» алгоритмы опережают рекурсию Левинсона по скорости расчетов.

В этой связи можно обратить внимание на то, что если при возрастании $n$ до значения в несколько десятков (обычно из опыта называют значение $n$ в пределах от 40 до 50) по-прежнему не достигается адекватность эмпирической модели случайного процесса, этот факт служит основанием для сомнений в стационарности [14]. Дело в том, что медленное убывание выборочной ковариационной функции вызвано расположением каких-либо из корней характеристического уравнения искомой динамической системы вблизи границы ее устойчивости (являющейся в случае дискретного времени единичной окружностью). Такое расположение корней приводит к плохой обусловленности матрицы решаемой системы уравнений, что может вызвать недопустимо большую погрешность, какой бы алгоритм решения ни применялся [15].

В подобных ситуациях необходимо преобразование исходного временного ряда для удаления корней характеристического уравнения от границы области стационарности. Итогом такого преобразования должно стать достаточно быстрое убывание абсолютной величины ковариационной функции исследуемого процесса и, следовательно, достижение адекватности искомой эмпирической модели при сравнительно небольшом значении $n$. В качестве широко распространенного и хорошо зарекомендовавшего себя на практике примера желаемого преобразования можно привести дифференцирование компонент временного ряда, которое в случае дискретного времени сводится к взятию конечных разностей наблюдаемого процесса [14, 16].

## ПРИЛОЖЕНИЕ

### МНОГОМЕРНЫЙ АЛГОРИТМ ЛЕВИНСОНА

В данном Приложении приводится вычислительная схема многомерной рекурсии Левинсона [7, 8] для отыскания матрицы $X_m = (X_{m,0}\ X_{m,1}\ \dots\ X_{m,m})$, удовлетворяющей системе уравнений $X_mP_m = Q_m$, где

$$Q_m = (Q_{0,0}\ Q_{1,1}\ \dots\ Q_{m,m});$$

$$P_m = \begin{pmatrix} R_0 & R_1 & \dots & R_{m-1} & R_m \\ R_{-1} & R_0 & \dots & & R_{m-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ R_{-m+1} & & \dots & R_0 & R_1 \\ R_{-m} & R_{-m+1} & \dots & R_{-1} & R_0 \end{pmatrix} —$$

симметрическая положительно определенная блочно-теплицева матрица. Каждая из подматриц $X_{mj}$, $Q_{jj}$ и $R_k$ имеет размер $r \times r$, причем $R_{-l} = R_l^T$, $j = 0, 1, \dots, m$, $l = -m, \dots, -1, 0, 1, \dots, m$.

Предположим, что нам известны матрицы

$$X_{m-1} = (X_{m-1,0}\ X_{m-1,1}\ \dots\ X_{m-1,\,m-1}),\ Y_{m-1} = \\ = (Y_{m-1,0}\ Y_{m-1,1}\ \dots\ Y_{m-1,\,m-1}) \text{ и } Z_{m-1} = \\ = (Z_{m-1,0}\ Z_{m-1,1}\ \dots\ Z_{m-1,\,m-1}),$$

удовлетворяющие системе уравнений

$$\begin{cases} X_{m-1}P_{m-1} = (Q_{0,0}Q_{1,1}\dots Q_{m-1,\,m-1}) \\ Y_{m-1}P_{m-1} = (-R_1\dots-R_m) \\ Z_{m-1}P_{m-1} = (-R_m^T\dots-R_1^T). \end{cases} \quad (\text{П1})$$

Тогда решение системы

$$\begin{cases} X_mP_m = (Q_{0,0}Q_{1,1}\dots Q_{m-1,\,m-1}Q_{m,\,m}) \\ Y_mP_m = (-R_1\dots-R_m-R_{m+1}) \\ Z_mP_m = (-R_{m+1}^T-R_m^T\dots-R_1^T) \end{cases}$$

можно найти по следующим формулам [7, 8]:

$$U_m = R_{m+1} + \sum_{j=1}^{m} Y_{m-1,\,m-j}R_j; \quad (\text{П2})$$

$$W_m = -U_mV_m^{-1}, \quad (\text{П3})$$

где

$$V_m = R_0 + \sum_{j=1}^{m} Z_{m-1,\,m-j}R_j; \quad (\text{П4})$$

$$\tilde{W}_m = -U_m^T\tilde{V}_m^{-1}, \quad (\text{П5})$$

где

$$\tilde{V}_m = R_0 + \sum_{j=1}^{m} Y_{m-1,\,j-1}R_j^T; \quad (\text{П6})$$

$$Y_m = (Y_{m-1,\,0}Y_{m-1,\,1}\ \dots\ Y_{m-1,\,m-1}0_r) + \\ + W_m(Z_{m-1,\,0}Z_{m-1,\,1}\ \dots\ Z_{m-1,\,m-1}I_r), \quad (\text{П7})$$

где $I_r$ — единичная матрица порядка $r$;

$$Z_m = (0_r Z_{m-1,\,0} Z_{m-1,\,1} \dots Z_{m-1,\,m-1}) + \tilde{W}_m (I_r Y_{m-1,\,0} Y_{m-1,\,1} \dots Y_{m-1,\,m-1}); \quad (\text{П8})$$

$$S_m = \sum_{j=1}^{m} X_{m-1,\,m-j} R_j; \quad (\text{П9})$$

$$\hat{W}_m = (Q_{m,\,m} - S_m) V_m^{-1}; \quad (\text{П10})$$

$$X_m = (X_{m-1,\,0} X_{m-1,\,1} \dots X_{m-1,\,m-1} 0_r) + \hat{W}_m (Z_{m-1,\,0} Z_{m-1,\,1} \dots Z_{m-1,\,m-1} I_r); \quad (\text{П11})$$

$$V_{m+1} = V_m - U_m^T \tilde{V}_m^{-1} U_m; \quad (\text{П12})$$

$$\tilde{V}_{m+1} = \tilde{V}_m - U_m V_m^{-1} U_m^T. \quad (\text{П13})$$

Вычислительная процедура начинается с присваивания значений

$$m = 1,\ X_{0,0} = Q_{0,0} R_0^{-1}, \quad Y_{0,0} = -R_1 R_0^{-1}, \quad Z_{0,0} = -R_1^T R_0^{-1},$$

$$V_1 = R_0 - R_1^T R_0^{-1} R_1, \quad \tilde{V}_1 = R_0 - R_1 R_0^{-1} R_1^T$$

и может продолжаться по формулам (П2), (П3), (П5), (П7)—(П13) до любого заданного значения $m = n$.

## ЛИТЕРАТУРА


1. *Kailath T., Sayed A.* Fast Reliable Algorithms for Matrices with Structure. — Philadelphia: SIAM Publ., 1999. — 358 p.
2. *Levinson N.* The Weiner RMS Error Criterion in Filter Design and Prediction // Journal of Mathematics and Physics. — 1947. — Vol. 25, N 4. — P. 261—278.
3. *Bäckström T.* Linear Predictive Modelling of Speech — Constraints and Line Spectrum Pair Decomposition. Doctoral thesis. Report no. 71 / Helsinki University of Technology, Laboratory of Acoustics and Audio Signal Processing. Espoo, Finland, 2004.
4. *Therrien C.W.* Relations Between 2-D and Multichannel Linear Prediction // IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing. — 1981. — Vol. ASSP-29, N 3. — P. 454—456.
5. *Ammar G.S., Gragg W.B.* Superfast Solution of Real Positive Definite Toeplitz Systems // SIAM J. Matrix Anal. Appl. — 1988. — Vol. 9, N 1. — P. 61—76.
6. *Ammar G.S., Gragg W.B.* Numerical Experience with a Superfast Real Toeplitz Solver // Linear Algebra and its Applications. — 1989. — Vol. 121, N 8. — P. 185—206.
7. *Whittle P.* Prediction and Regulation by Linear Least-Square Methods. — London: English Universities Press, 1963. — 147 p.
8. *Wiggins R.A., Robinson E.A.* Recursive Solution to the Multichannel Filtering Problem // J. Geophys. Res. — 1965. — Vol. 70, N 8. — P. 1885—1891.
9. *Marple S.L.* Digital Spectral Analysis with Applications in C, FORTRAN, and MATLAB. — Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 2003. — 465 p.
10. *Li W.K., McLeod A.I.* Distribution of the Residual Autocorrelations in Multivariate ARMA Time Series Models // J. R. Stat. Soc. — 1981. — Vol. B-43, N 2. — P. 231—239.
11. *Кашьяп Р.Л., Рао А.Р.* Построение динамических стохастических моделей по экспериментальным данным. — М.: Наука, 1983. — 384 с.
12. *Gatu C., Kontoghiorghes E.J., Gilli M., Winker P.* An Efficient Branch-and-Bound Strategy for Subset Vector Autoregressive Model Selection // Journal of Economic Dynamics and Control. — 2008. — Vol. 32, N 6. — P. 1949—1963.
13. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. — 560 с.
14. *Box G.E.P., Jenkins G.M., Reinsel G.C.* Time Series Analysis: Forecasting and Control. — Chichester: Wiley, 2008. — 746 p.
15. *Беклемишев Д.В.* Дополнительные главы линейной алгебры. — СПб.: Лань, 2008. — 496 с.
16. *Choi I., Park D.* Causal Relation Between Interest and Exchange Rates in the Asian Currency Crisis // Japan and the World Economy. — 2008. — Vol. 20, N 3. — P. 435—452.


*Статья представлена к публикации членом редколлегии С.Д. Земляковым.*

**Климченко Владимир Владимирович** — канд. техн. наук, ст. науч. сотрудник, Институт автоматики и процессов управления РАН, г. Владивосток, ☎(4232) 31-02-02, e-mail: volk@iacp.dvo.ru.

**Содержание сборника "Управление большими системами", вып. 23, http://ubs.mtas.ru/**

- ✓ ***Алиев В.С.*** Многошаговые игры двух лиц с принятием решений на каждом шаге при агрегированной информации о выборе "осторожного" второго игрока
- ✓ ***Чечурин Л.С.*** Алгебраическое достаточное условие периодически нестационарных систем управления
- ✓ ***Шубладзе А.М.*** и др. Исследование оптимальных по степени устойчивости решений при ПИД управлении. Часть 2
- ✓ ***Андриевский Б.Р., Фрадков А.Л.*** Адаптивные методы передачи информации модуляцией генераторов хаотических сигналов
- ✓ ***Трахтенгерц Э.А.*** Компьютерные технологии коррекции целей, стратегических решений и оперативных воздействий в динамике управления
- ✓ ***Горелов М.А.*** Конкурентное равновесие на финансовом рынке
- ✓ ***Юдицкий С.А.*** Графодинамическая автоматная модель разрешения конфликтов в организационных системах
- ✓ ***Воронин Ю.Ф., Камаев В.А., Бойко Н.А.*** Эмпирическая методика снижения брака отливок
- ✓ ***Калимулина Э.Ю.*** Расчет надежности сложных систем с параллельной структурой, полностью восстанавливаемых в процессе эксплуатации