УДК 519.81

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРИЕМНОЙ КАМПАНИИ: ВУЗЫ РАЗЛИЧНОГО КАЧЕСТВА И АБИТУРИЕНТЫ С КВАДРАТИЧНОЙ ФУНКЦИЕЙ ПОЛЕЗНОСТИ

С.Г. Кисельгоф

Приведены сведения о системе приема в вузы России на основании результатов Единого государственного экзамена (ЕГЭ). Построена математическая модель выбора абитуриентом вузов для подачи заявлений. На основе спрогнозированного выбора абитуриентов смоделирована приемная кампания. Показаны недостатки существующего механизма зачисления абитуриентов в вузы.

Ключевые слова: обобщенные паросочетания, абитуриенты, механизм зачисления, ЕГЭ.

ВВЕДЕНИЕ

Рассматривается построение модели приемной кампании в российских государственных вузах. Считается, что все вузы и все абитуриенты разделены на некоторое число категорий в зависимости от их «качества», и деление на категории известно всем участникам. В настоящее время выбор абитуриента в рамках приемной кампании ограничен пятью вузами. При подаче документов абитуриент ориентируется на «качество» вуза и ожидаемую вероятность поступления в этот вуз. В предположении о квадратичных функциях полезности абитуриента и экспоненциальном падении ожидаемой вероятности поступления при росте качества вуза оказывается, что абитуриент будет всегда подавать документ в вуз, поступление в который он считает гарантированным (качество такого вуза считаем соответствующим качеству подготовки абитуриента), а также в один или два вуза качеством выше на три «категории», от одного до трех вузов качеством выше на две категории и один вуз на категорию выше. В результате при существующей системе приема (которая описана далее) сильно пострадают вузы качества «выше среднего»: они недоберут студентов, так как сильные абитуриенты уйдут в наиболее привлекательные вузы, а более слабые будут лишены возможности перейти на освободившиеся места из-за ограниченного числа «волн» зачислений в приемной кампании. Кроме того, возможны несправедливые ситуации, когда относительно более слабые абитуриенты получат места в более сильных вузах, чем относительно более сильные абитуриенты.

Математические модели и анализ механизмов зачисления абитуриентов в вузы давно развиваются в литературе по обобщенным паросочетаниям. Ключевые результаты получены в работах [1—3]. Основные положения теории обобщенных паросочетаний изложены в книге [4]. Обзор исследований по данной тематике дан в работе [5].

1. ОРГАНИЗАЦИЯ ПРИЕМНОЙ КАМПАНИИ В РОССИЙСКИХ ГОСУДАРСТВЕННЫХ ВУЗАХ

Все абитуриенты, кроме редких особых случаев, оцениваются вузом в соответствии с суммой баллов, набранных ими в сумме по трем или четырем предметам на ЕГЭ. Перечень предметов утверждается Министерством образования и науки для каждой специальности и един для всех вузов, осуществляющих подготовку по данной специальности. Решение относительно учета результатов по одному из четырех предметов принимает самостоятельно каждый вуз. Например, при поступлении на направление «Экономика» Министерством утверждены четыре предмета: математика, русский язык, обществознание и иностранный язык. Однако вуз вправе исключить иностранный язык из числа предоставляемых абитуриентом результатов ЕГЭ. На практике такой возможностью пользуется большинство вузов, поэтому далее мы для простоты будем предполагать, что число предметов всегда равно трем.

Приемная кампания включает в себя этап подачи заявлений и этап зачислений, которые описаны далее. Отметим, что несущественные для дальнейшего исследования детали намеренно опущены.

На этапе подачи заявлений абитуриенты подают заявления в интересующие их вузы. В 2010 г. число вузов, в которые мог подавать заявления абитуриент, было ограничено пятью. В каждом вузе абитуриент мог подавать заявление не более чем на три специальности. Заявления принимались приемными комиссиями вузов до середины июля.

Заявление для поступления на определенную специальность принимается при наличии копии аттестата о полном среднем образовании и результатов ЕГЭ по трем предметам, соответствующим этой специальности. Набор предметов утверждается централизованно и не может изменяться самим вузом. Для каждого абитуриента рассчитывается сумма баллов, набранных по указанным трем предметам. Вуз не вправе устанавливать веса предметов при суммировании. Таким образом, при подаче заявления на одну и ту же специальность в разные вузы абитуриент имеет одинаковую сумму баллов ЕГЭ вне зависимости от вуза.

После окончания приема заявлений начинается этап зачисления, который проходит в две «волны». *В первой волне зачислений* вузы объявляют списки абитуриентов, которых они готовы принять. Список всех подавших заявления на некоторую специальность сортируется по сумме баллов ЕГЭ, его верхнюю часть образует список принимаемых абитуриентов, число принимаемых должно соответствовать числу мест. Если число заявлений меньше числа мест в вузе, то все подавшие заявления включаются в список принимаемых абитуриентов. До 4 августа абитуриенты должны были принести подлинник аттестата в один из вузов, включивших их в список. Если до установленного срока включенный в список принимаемых абитуриент не предоставил подлинник, то он выбывает из дальнейшего конкурса на эту специальность в этом вузе. Абитуриенты, принесшие подлинник, переходят в разряд официально рекомендованных к зачислению.

На второй волне зачислений из списка абитуриентов каждой специальности вычеркиваются те, кто был включен в список принимаемых абитуриентов, но не принес подлинник. С учетом этого в верхнюю часть списка снова попадают новые принимаемые абитуриенты, при этом общее число принимаемых абитуриентов не превышает числа мест. Абитуриент, который принес подлинник аттестата в первой волне зачислений, имеет право забрать его и принести в другой вуз, включивший его в список принятых только на втором этапе, но более для этого абитуриента предпочтительный. В остальном правила те же — до установленного централизованно срока (9 августа) вузы ждут абитуриентов с подлинниками аттестатов. После этого централизованная приемная кампания заканчивается, и вузы издают приказы о зачислении тех абитуриентов, которые принесли подлинники аттестатов.

2. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим прием абитуриентов на одну специальность в государственные вузы в соответствии с описанными в § 1 правилами.

Пусть:

A — множество всех абитуриентов;

A_i — множество абитуриентов группы i, $i = \overline{1, M}$, т. е. абитуриенты разбиты на M групп по качеству подготовки: чем выше номер категории, тем лучше подготовка (и сумма баллов ЕГЭ) входящих в нее абитуриентов;

B — множество всех вузов;

B_j — множество вузов категории по качеству j, $j = \overline{1, M+1}$, т. е. вузы разбиты на $M + 1$ категорию по качеству образования (репутации): чем выше номер категории, тем более высокого качества образование дают входящие в нее вузы. Вузы $(M + 1)$-й категории представляют особую категорию элитных вузов с наилучшим качеством подготовки.

Обозначим число абитуриентов в каждой группе через $k_i = |A_i|$, а число вузов в каждой категории через $n_j = |B_j|$. Примем, что в каждой категории одинаковое число вузов, т. е. $n_1 = n_2 = ... = n_{M+1} = n$. Число мест в каждом вузе примем одинаковым и равным L. Относительно числа мест в вузе мы придерживаемся предположения о том, что при невозможности сравнить между собой нескольких абитуриентов вуз вынужден зачислить их всех, даже если это приводит к превышению первоначальной квоты.

Будем считать, что все вузы имеют одинаковые предпочтения на множестве абитуриентов, устроенные следующим образом. Абитуриенты с одинаковым качеством подготовки попадают в одну группу A_i, причем группы, как было указано ранее, упорядочены по качеству подготовки. Чем выше качество подготовки абитуриента (номер его группы, i), тем предпочтительнее он для вуза. Абитуриентов с одинаковой подготовкой вузы сравнить между собой не могут.

Предположение об одинаковых предпочтениях вузов справедливо в том случае, если мы рассматриваем прием только на одну расширенную специальность, на которой в разных вузах требуется одинаковый набор результатов ЕГЭ, т. е. абитуриенты имеют одинаковую сумму баллов.

Для моделирования текущей ситуации на российском образовательном рынке сделаны следующие предположения о предпочтениях абитуриентов и способе принятия ими решений.

- Вузы из более высокой категории предпочтительнее вузов из более низкой категории для любого абитуриента.
- Каждый абитуриент ранжирует вузы внутри категории одинакового качества в индивидуальном порядке.
- Полезность u_a от поступления в вуз $b \in B_j$ для некоторого абитуриента a задается как $u_a(j, s_b) = (j + s_b)^2$, $0 < s_b \leqslant 1$, где j — категория вуза по качеству, а s_b — величина, характеризующая предпочтительность поступления в вуз b по сравнению с другими вузами категории j.
- Значение s_b определяется местом вуза в ранжировке данного абитуриента. А именно, если вуз является лучшим для абитуриента a среди вузов категории j, то $s_b = 1$. Если вуз l-й по предпочтительности в этой категории, то $s_b = (n + 1 - l)/n$, т. е. значение s_b задается таким образом, чтобы любой вуз категории $j + 1$ был заведомо предпочтительнее любого вуза из категории j.
- Кроме полезности от поступления, вузы оцениваются абитуриентами по вероятности поступления, прямо пропорциональной качеству подготовки абитуриента и обратно пропорциональной категории вуза:

$$p = \begin{cases} 2^{i-j}, j \geq i, \\ 1, j < i. \end{cases}$$

  Таким образом, абитуриенту $a \in A_i$ невыгодно подавать документы в вуз $b \in B_j$, если $i > j$, так как это будет заведомой потерей по сравнению с гарантированным вузом из категории $j = i$.
- Если абитуриенту не удается поступить ни в один вуз, его полезность считается равной нулю.

Предположения сделаны с учетом неполноты информации, имеющейся у абитуриентов.

Каждый абитуриент должен выбрать набор из пяти вузов. Для каждого набора оценивается ожидаемая полезность, абитуриент выбирает набор с наибольшей ожидаемой полезностью. Будем считать, что все абитуриенты придерживаются следующего разумного принципа: «Если я зачислен сразу в несколько вузов, то выбираю лучший, т. е. приносящий наибольшую полезность от поступления».

Рассмотрим абитуриента a из группы A_i и его набор, состоящий из пяти вузов. Вузы в наборе упорядочены по предпочтительности для абитуриента a: первый вуз (категория j_1) самый лучший, последний (категория j_5) — самый худший.

Ожидаемая полезность поступления в лучший вуз

$$\bar{u}_a(j_1, s_1) = 2^{i-j_1}(j_1 + s_1)^2.$$

Если абитуриент не поступит в лучший вуз (а это произойдет с вероятностью $p = 1 - 2^{i-j_1}$), то он будет рассматривать следующий вуз в своем наборе.

Абитуриент считает события «поступил в вуз b_1» и «поступил в вуз b_2» независимыми, поэтому вероятность того, что абитуриент не поступил в первый вуз, но поступил во второй, оценивается как произведение вероятностей этих событий. Тогда ожидаемая полезность поступления во второй вуз

$$\bar{u}_a(j_2, s_2) = (1 - 2^{i-j_1})2^{i-j_2}(j_2 + s_2)^2.$$

Естественно, должно быть выполнено условие $j_1 + s_1 > j_2 + s_2$, поскольку ранее мы обозначили через j_1 категорию лучшего в наборе вуза.

Ожидаемая полезность поступления в 3-, 4- и 5-й вузы в наборе вычисляется аналогичным образом. Итоговое выражение для ожидаемой полезности абитуриента a выглядит так:

$$\bar{u}_a = 2^{i-j_1}(j_1 + s_1)^2 + (1 - 2^{i-j_1})(2^{i-j_2}(j_2 + s_2)^2 + (1 - 2^{i-j_2})(2^{i-j_3}(j_3 + s_3)^2 + (1 - 2^{i-j_3}) \times (2^{i-j_4}(j_4 + s_4)^2 + (1 - 2^{i-j_4})2^{i-j_5}(j_5 + s_5)^2))). \quad (1)$$

Замечание. В литературе [1, 2] широко применяются коалиционные игровые модели для моделирования задач о распределении абитуриентов по вузам. Ядро соответствующей игры составляют так называемые попарно стабильные паросочетания.

Для указанных моделей известно, что если предпочтения всех вузов на множестве абитуриентов одинаковы (как при моделировании приема на одну специальность в разные вузы), то равновесное распределение абитуриентов по вузам — попарно стабильное паросочетание — единственно [2].

К сожалению, в текущей российской ситуации распределение абитуриентов по вузам не соответствует попарно стабильному паросочетанию. Таким образом, теоретико-игровое моделирование не позволяет реалистично описать текущую ситуацию, а также выявить недостатки существующего способа организации приемной кампании. Поэтому мы отказались от использования теоретико-игровой модели. ♦

3. ПОВЕДЕНИЕ АБИТУРИЕНТОВ

После того, как сделаны предположения о полезности абитуриента, можно определить, в какие вузы он будет подавать заявления. Для поиска наилучшего набора вузов мы будем решать задачу максимизации ожидаемой полезности (1), пользуясь принципом динамического программирования. Далее приводятся полученные результаты. Доказательство некоторых утверждений дано в Приложении, полное доказательство не приводится в силу громоздкости, см. его в работе [5].

В результате решения оптимизационной задачи абитуриента выявлено, что в качестве самого слабого вуза в наборе любой абитуриент $a \in A_i$, $i \geqslant 2$, будет выбирать свой «любимый» вуз из соответствующей категории B_i, поступление в который он считает гарантированным.

При дальнейшем анализе оказывается, что абитуриенты разных групп подготовки не единодушны в своем выборе. Они выбирают различные наборы вузов в зависимости от своей группы A_i и числа вузов n в каждой категории качества. Если это число мало, значит, абитуриенты имеют хорошо детализированные представления о качестве вузов. Если же это число, напротив, достаточно велико, то абитуриенты находятся в ситуации существенной неопределенности, так как при сравнении больших наборов вузов вынуждены опираться только на свои личные впечатления.

Теперь покажем, как величина n, характеризующая уровень неопределенности относительно качества образования вузов, влияет на выбор абитуриентов. Сначала рассмотрим общую картину выбора абитуриентов при разных значениях n. Мы будем рассматривать ситуации, начиная с $n = 3$.

Ситуация $n = 2$ не представляет интереса и в некотором смысле является вырожденной, так как предполагает очень высокий уровень «определенности» в представлениях абитуриентов о вузах.

Заметим, что мы изначально не задаем фиксированное число групп одинаковой подготовки абитуриентов и категорий вузов. Ясно также, что абитуриенты самых сильных групп оказываются в особом положении в силу ограниченности выбора, поэтому их поведение должно быть рассмотрено особо. Из-за ограниченности объема статьи мы не будем рассматривать здесь эту ситуацию (см. работу [5]).

3.1. Выбор при разных уровнях неопределенности

В результате поиска оптимального поведения абитуриентов было выявлено, что все ситуации в зависимости от величины n (уровня неопределенности) окажутся объединены в четыре ступени, между которыми поведение групп абитуриентов будет качественно отличаться.

1. *Ступень самой низкой неопределенности,* $n = 3, 4$. Если абитуриентам известно очень подробное разбиение вузов на категории по качеству образовательных услуг (каждая категория содержит три или четыре вуза одного качества), то абитуриенты с низким качеством подготовки выберут свои «любимые» вузы из категорий от B_i до B_{i+4}. Абитуриенты с более высоким качеством подготовки выберут два вуза из категории B_{i+3} и по одному вузу из категорий B_{i+2}, B_{i+1}, B_i.

В табл. 1 представлен выбор абитуриента в зависимости от n (характеристики уровня неопределенности) и i (уровня подготовки абитуриента). В результате анализа было выявлено, что абитуриенты разделятся на типы в зависимости от качества подготовки, причем поведение будет одинаковым внутри каждого типа. Строки соответствуют типам абитуриентов с разным уровнем подготовки. Второй и третий столбец описывают, абитуриенты из каких именно групп (A_i) по качеству подготовки будут отнесены к «слабому» и «сильному» типу в зависимости от значения n. В последних пяти столбцах представлен выбираемый абитуриентом набор из пяти вузов.

Уже здесь проявляется закономерность, которая будет наблюдаться все время: при каждом конкретном n чем слабее группа абитуриентов, тем более рискованный набор они выбирают. Например,

Таблица 1

Выбор абитуриентов при $n = 3$ и $n = 4$

Абитуриенты	$n = 3$	$n = 4$	Вуз 1	Вуз 2	Вуз 3	Вуз 4	Вуз 5
«Сильные»	$i \geqslant 6$	$i \geqslant 3$	$(i + 3, 1)$	$(i + 3, (n - 1)/n)$	$(i + 2, 1)$	$(i + 1, 1)$	$(i, 1)$
«Слабые»	$2 \leqslant i \leqslant 5$	$i = 2$	$(i + 4, 1)$	$(i + 3, 1)$	$(i + 2, 1)$	$(i + 1, 1)$	$(i, 1)$

при $n = 3$ абитуриенты из группы A_5 выберут набор вузов из категорий (B_{i+4}; B_{i+3}; B_{i+2}; B_{i+1}; B_i), в то время как более сильные абитуриенты группы A_6 выберут менее рискованный набор из категорий (B_{i+3}; B_{i+3}; B_{i+2}; B_{i+1}; B_i).

2. *Ступень низкой неопределенности*, $5 \leqslant n \leqslant 14$. На второй ступени неопределенности абитуриенты разделятся на три условных типа: «сильные», «средние» и «слабые» абитуриенты.

Заметим, что при $n \geqslant 5$ абитуриенты всегда выбирают лучший вуз из категории B_{i+3} и худший вуз из (гарантированной для них) категории B_i. Различия в выборе абитуриентов разных типов заключаются только в выборе трех оставшихся вузов в наборе (табл. 2).

С увеличением n граница качества подготовки, отсекающая «слабых» от «средних», сдвигается вверх, граница, отделяющая «средних» от «сильных», сдвигается вниз. Таким образом, множество абитуриентов «среднего» типа сжимается и, при росте неопределенности, исчезает.

Абитуриент, относящийся к «слабому» типу при данном n, выбирает два вуза из категории B_{i+3}, два вуза из категории B_{i+2} и гарантированный вуз своей категории B_i. Абитуриенты из «средних» групп подготовки вместо второго вуза из категории B_{i+2} выбирают вуз из категории B_{i+1} и рискуют меньше, чем слабые абитуриенты. Наконец, сильные абитуриенты выбирают вместо второго вуза из категории B_{i+3} второй вуз из категории B_{i+2}. Таким образом, сильные абитуриенты рискуют в наименьшей степени.

3. *Ступень средней неопределенности,* $15 \leqslant n \leqslant 37$. При дальнейшем увеличении n, а значит, росте неопределенности, «исчезает» промежуточный средний тип абитуриентов (табл. 3). Сильные и слабые абитуриенты делают тот же выбор, что и соответствующие типы при меньших значениях n.

Сильные абитуриенты рискуют меньше и выбирают один вуз из категории B_{i+3}, два вуза из категории B_{i+2}, один вуз из категории B_{i+1} и гарантированный вуз категории B_i. Слабая часть абитуриентов выбирает гораздо более рискованный набор — два вуза из категории B_{i+3} и два вуза из категории B_{i+2}.

Заметим, что граница «сильные — слабые» смещается вверх с увеличением n, т. е. все больше абитуриентов попадают в группы слабых и больше рискуют.

Здесь мы также можем отметить циклическое изменение структуры групп абитуриентов: при самых низких n абитуриенты разбились на две группы, затем появились «средние» абитуриенты. На данной ступени неопределенности «средние» снова исчезли, однако при самых высоких значениях n, они, как мы увидим далее, снова появятся.

4. *Ступень высокой неопределенности,* $n \geqslant 38$. Эта, последняя, ступень характеризуется очень высоким уровнем неопределенности и, по всей видимости, должна быть рассмотрена в большей степени для законченности анализа, нежели для практического применения результатов. На этой ступени снова выделяются три типа абитуриентов (табл. 4) с разным поведением: «сильные», «средние» и «слабые». Естественно, границы типов в смысле качества подготовки будут отличаться от таковых на второй ступени неопределенности. При увеличении n граница между средними и сла-

Таблица 2

Выбор абитуриентов при $n = 5$ и $= 14$

Абитуриенты	$n = 5$	$n = 14$	Вуз 1	Вуз 2	Вуз 3	Вуз 4	Вуз 5
«Сильные»	$i \geqslant 47$	$i \geqslant 13$	$(i + 3, 1)$	$(i + 2, 1)$	$(i + 2, (n - 1)/n)$	$(i + 1, 1)$	$(i, 1)$
«Средние»	$4 \leqslant i \leqslant 46$	$i = 12$	$(i + 3, 1)$	$(i + 3, (n - 1)/n)$	$(i + 2, 1)$	$(i + 1, 1)$	$(i, 1)$
«Слабые»	$2 \leqslant i \leqslant 3$	$i \leqslant 11$	$(i + 3, 1)$	$(i + 3, (n - 1)/n)$	$(i + 2, 1)$	$(i + 2, (n - 1)/n)$	$(i, 1)$

Таблица 3

Выбор абитуриентов при $n = 15$ и $n = 37$

Абитуриенты	$n = 15$	$n = 37$	Вуз 1	Вуз 2	Вуз 3	Вуз 4	Вуз 5
«Сильные»	$i \geqslant 12$	$i \geqslant 16$	$(i + 3, 1)$	$(i + 2, 1)$	$(i + 2, (n - 1)/n)$	$(i + 1, 1)$	$(i, 1)$
«Слабые»	$2 \leqslant i \leqslant 11$	$2 \leqslant i \leqslant 15$	$(i + 3, 1)$	$(i + 3, (n - 1)/n)$	$(i + 2, 1)$	$(i + 2, (n - 1)/n)$	$(i, 1)$

Таблица 4

Выбор абитуриентов при $n = 38$ и $n = 50$

Абитуриенты	$n = 38$	$n = 50$	Вуз 1	Вуз 2	Вуз 3	Вуз 4	Вуз 5
«Сильные»	$i \geqslant \frac{n}{2} - 2$	$i \geqslant \frac{n}{2} - 2$	$(i + 3, 1)$	$(i + 2, 1)$	$(i + 2, (n - 1)/n)$	$(i + 1, 1)$	$(i, 1)$
«Средние»	$16 \leqslant i \leqslant \frac{n}{2} - 3$	$14 \leqslant i \leqslant \frac{n}{2} - 3$	$(i + 3, 1)$	$(i + 2, 1)$	$(i + 2, 1)$	$(i + 1, 1)$	$(i, 1)$
«Слабые»	$2 \leqslant i \leqslant 15$	$2 \leqslant i \leqslant 13$	$(i + 3, 1)$	$(i + 3, (n - 1)/n)$	$(i + 2, 1)$	$(i + 2, (n - 1)/n)$	$(i, 1)$

быми, как ни странно, опускается вниз, а граница между сильными и средними ползет вверх.

Средние абитуриенты выбирают один вуз из категории B_{i+3} и три вуза из категории B_{i+2}. Сильные и слабые делают тот же выбор, что и в предыдущих случаях. Здесь соблюдается закономерность: чем сильнее абитуриент, тем менее рискованный набор он выбирает.

4. МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРИЕМНОЙ КАМПАНИИ

Теперь, когда мы определили ожидаемое поведение абитуриентов, можно предсказать развитие приемной кампании. Для этого рассмотрим числовой пример, задав параметр M, определяющий число категорий вузов и групп абитуриентов; параметр n, определяющий число вузов в каждой категории одинакового качества и характеризующий уровень неопределенности; число абитуриентов в группах по качеству подготовки.

Поскольку в нашей модели считается одинаковым число вузов в категории и число мест в вузе, то места будут распределены равномерно по качеству.

Относительно предпочтений абитуриентов будем предполагать, что каждый вуз встречается на первом, втором и далее местах в ранжировках абитуриентов внутри категории одинаковое число раз. Таким образом, в данной модели мы не будем вводить случайную составляющую, связанную с предпочтениями абитуриентов.

4.1. Равномерное распределение абитуриентов

Рассмотрим следующий пример. Пусть:

$M = 10$, т. е. 10 категорий абитуриентов и 11 категорий вузов;

$n = 20$, число вузов в категории;

число абитуриентов совпадает с числом мест в вузах;

абитуриенты распределены по категориям равномерно.

Общее число вузов будет равно $20 \cdot 11 = 220$, а число мест — $220L$. Абитуриенты распределены по категориям равномерно, поэтому $\forall i\ k_i = |A_i| = 220L/10 = 22L$.

На первом этапе каждый абитуриент категорий $2 \leqslant i \leqslant 8$ подаст заявление в вуз своей категории, в два вуза категории B_{i+2} и два вуза категории B_{i+3}. Абитуриенты из двух верхних категорий, в принципе не имеющие категории вузов B_{i+3}, также сделают выбор, максимизирующий их ожидаемую полезность. Для абитуриента из лучшей категории A_{10} набор будет включать вуз своей категории и четыре вуза категории B_{11}. Для абитуриента из категории A_9 набор будет включать один вуз своей категории, один вуз категории B_{10} и три вуза категории B_{11}. Для абитуриента из группы A_1 наилучшим будет выбор, не включающий гарантированный вуз: один вуз из B_2, два вуза из B_3 и два вуза из B_4.

Рис. 1 демонстрирует ожидаемое число заявлений в одном вузе каждой категории. После того, как спрогнозировано поведение абитуриентов, можно легко смоделировать проведение приемной кампании в соответствии с принятым в настоящее время (см. § 1) механизмом. Ожидаемые ре-

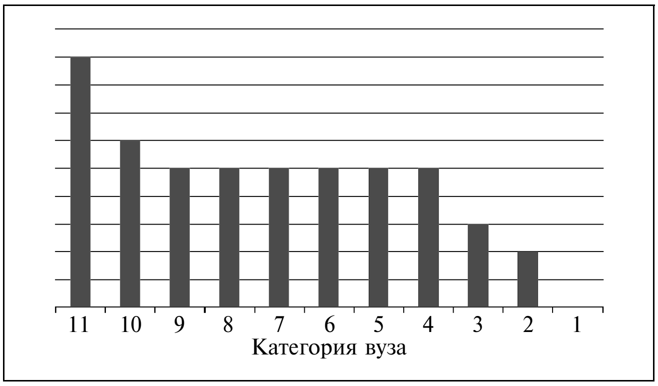

Рис. 1. Число поданных заявлений

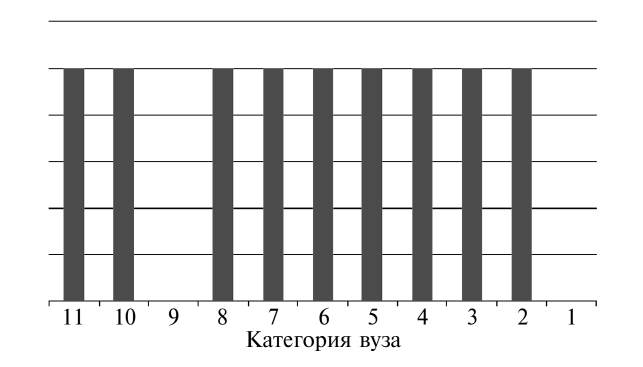

Рис. 2. Число зачисленных абитуриентов

Рис. 3. Число зачисленных абитуриентов из разных групп по категориям вузов

зультаты приемной кампании представлены на рис. 2. В соответствии с этим прогнозом, каждый вуз, кроме вузов из категории B_8, получит по $1{,}1L$ абитуриентов, а вузы девятой и первой категорий останутся без абитуриентов вовсе.

Таким образом, абитуриентов не набирают не только самые слабые вузы, но и вузы качества выше среднего.

4.2. Неполная информация о распределении абитуриентов

Рассмотрим модификацию исходной модели:

$M = 10$, т. е. 10 групп абитуриентов и 11 категорий вузов;

$n = 20$, число вузов в категории;

абитуриенты распределены по группам равномерно;

число абитуриентов меньше числа мест в вузах, а именно равно $0{,}75 \cdot 220L$.

Предположим, что вузы могут более четко оценить качество подготовки абитуриента, чем сами абитуриенты. С точки зрения вуза каждая из групп абитуриентов разделяется на три подгруппы, различимые по качеству подготовки.

Содержательно можно пояснить наше предположение следующим образом: абитуриенты, набравшие 60, 61 или 62 балла на ЕГЭ по математике, считают себя абитуриентами примерно одного качества подготовки (поскольку не располагают точной информацией о своих конкурентах). В то же время вузы способны отличить этих абитуриентов и, при наличии ограничения по числу мест, отказать первому и второму абитуриенту в пользу третьего.

При сделанном предположении предпочтения абитуриентов не изменятся, поскольку они не получат дополнительной информации о вузах, соответственно, все приведенные ранее выводы будут верны и в этой модели.

На рис. 3 графически представлен результат приемной кампании для данного примера. Отметим, что в такой ситуации будет наблюдаться «несправедливое» зачисление, например, абитуриенты группы A_7 зачислены в вузы категории B_8, в то время как некоторые абитуриенты группы A_8 попали в вузы более слабой категории B_7.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предложен способ моделирования поведения абитуриента при выборе набора вузов для подачи заявлений, а также смоделирован ход приемной кампании для различных ситуаций — при разной имеющейся у вузов и абитуриентов информации и разном соотношении числа мест и числа абитуриентов. Данная модель позволяет высветить слабые места существующего в России механизма распределения абитуриентов по вузам. Простой пример из п. 4.1 иллюстрирует ситуацию, когда абитуриентов недобирают не только самые слабые (как следовало бы ожидать) вузы, но и вузы с качеством образования «выше среднего». Такая невыгодная и вузам, и абитуриентам ситуация возникает из-за ограничения числа волн (две в 2011 г.) механизма зачисления. Эта ситуация приводит к тому, что вузам выгодно нарушать правила зачисления (фактически нарушая тем самым законодательство), чтобы не остаться без абитуриентов.

Дальнейшее развитие данного исследования предполагает два направления. Первое из них — моделирование зачисления в течение нескольких лет, при котором абитуриенты второго и последующих лет получают дополнительную историческую информацию. Второе направление — моделирование поведения вузов как активных игроков, которое позволило бы описать и предсказать случаи и характер манипулирования механизмом зачисления.

Автор выражает благодарность Ф.Т. Алескерову за всестороннюю поддержку, обсуждения и ценные замечания, а также К.С. Сорокину за важные содержательные комментарии и помощь в подготовке текста. Автор благодарит Лабораторию анализа и выбора решений НИУ ВШЭ за финансовую поддержку.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Докажем, что при сделанных предположениях абитуриент всегда выбирает ровно один вуз, поступление в который считает гарантированным, а остальные вузы он выбирает из более сильных категорий.

Абитуриент должен выбрать пять вузов так, чтобы максимизировать свою ожидаемую полезность. Упорядочим вузы в наборе так, что на первом месте будет стоять лучший вуз из пяти, а на пятом месте — худший. Тогда процесс выбора вузов может быть описан как задача динамического программирования из пяти шагов. Начнем с конца — с выбора самого слабого вуза в наборе.

Выбор наименее предпочтительного вуза в нашем наборе зависит от предпочтений абитуриентов и от того, какой вуз был выбран в качестве четвертого в наборе (так как самый слабый вуз не может быть лучше четвертого и не может совпадать с ним). Выбирать вуз из категории хуже, чем i, для абитуриента нерационально. Сформулируем оптимизационную задачу, решением которой будет выбираемый пятый вуз:

$$\bar{u} = 2^{i-j_5}\left(j_5 + \frac{x_5}{n}\right)^2 \to \max,$$

$$j_4 + \frac{x_4}{n} \geqslant j_5 + \frac{x_5}{n} + \frac{1}{n}, \qquad (П1)$$

$$j_4 \geqslant j_5, \qquad (П2)$$

$$j_5 \geqslant i, \qquad (П3)$$

$$1 \leqslant x_5 \leqslant n, \qquad (П4)$$

$$j_5,\ x_5 \in N, \qquad (П5)$$

при каждых заданных j_4, x_4, n и i. Сначала найдем решение задачи без учета ограничений (П2), (П3) и (П5), т. е. без учета решений относительно подачи заявлений в другие, более сильные вузы и ограничения целочисленности.

Оптимальное значение функции достигается при $x_5^* = n$ (с учетом ограничения (П4)). Тогда функция полезности примет вид $u = 2^{i-j_5}(j_5 + 1)^2$. Эта функция имеет единственную точку максимума при $j_5^* = 2/\ln 2 - 1$. Таким образом, при всех $i \geqslant 3$ функция полезности для пятого шага является строго убывающей на луче (П3). А значит, максимум с учетом ограничения (П3) достигается при $j_5 = i$. Можно показать, что при $i = 2$ максимальное значение (с учетом целочисленности j_5) также достигается при $j_5 = i$.

Таким образом, максимум целевой функции этой задачи без учета ограничений, связанных с выбором четвертого вуза в наборе, достигается в точке $j_5 = i$; $x_5 = n$ при всех $i \geqslant 2$. Выбор более одного вуза из категории $j = i$ заведомо невыгоден, так как поступление в вуз категории i абитуриент считает гарантированным, $p_i = 1$; т. е. выбор более одного вуза из категории i не может увеличить ожидаемую полезность абитуриента. Следовательно, в качестве четвертого и других вузов в наборе абитуриент не будет выбирать гарантированный вуз и, какими бы ни были решения относительно других четырех вузов, в качестве пятого вуза будет выбран гарантированный вуз из категории B_i.

Полное доказательство всех сформулированных утверждений достаточно громоздко, поэтому не включено в данную статью, оно приведено в работе [5].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Gale D., Shapley L.S.* College Admissions and the Stability of Marriage // American Mathematical Monthly. — 1962. — Vol. 69. — P. 9—14.
2. *Balinski M., Sonmez T.* A Tale of Two Mechanisms: Student Placement // Journal of Economic Theory. — January, 1999. — Vol. 84 (1). — P. 73—94.
3. *Abdulkadiroglu A., Sonmez T.* School Choice: A Mechanism Design Approach // American Economic Review. — June 2003. — Vol. 93. — P. 729—747.
4. *Алескеров Ф.Т., Хабина Э. Л., Шварц Д.А.* Бинарные отношения, графы и коллективные решения. — М.: Изд. дом Высшей школы экономики, 2006. — 300 с.
5. *Кисельгоф С.Г.* Выбор вузов абитуриентами с квадратичной функцией полезности. Препринт WP7/2011/01. — М.: Изд. дом Высшей школы экономики, 2011. — 44 с.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.С. Манделем.

Кисельгоф Софья Геннадьевна — аспирант, преподаватель, Национальный исследовательский университет — Высшая школа экономики, г. Москва,
☎ (495) 621-13-42, ✉ skiselgof@gmail.com.