УДК 62-50:681.3

ПРИМЕНЕНИЕ КУСОЧНО-ЛИНЕЙНОЙ АППРОКСИМАЦИИ ФУНКЦИЙ РАСХОДА ДЛЯ ПОСТРОЕНИЯ МЕТОДОВ УПРАВЛЕНИЯ ЗАПАСАМИ

Е.Н. Хоботов

Рассмотрены задачи управления многопродуктовыми запасами при известном спросе. Для их решения предложены модели и методы, использующие кусочно-линейную аппроксимацию функций спроса и функций расхода запасов.

Ключевые слова: модели, управление запасами, программные продукты, спрос, хранение запасов, многономенклатурные запасы.

ВВЕДЕНИЕ

Задачи управления многопродуктовыми запасами в последние годы вызывают повышенный интерес, который обусловлен наличием значительного числа организаций, осуществляющих хранение и реализацию больших объемов запасов, что приводит к большим затратам на их содержание. Такие затраты могут быть существенно сокращены при организации управления путем правильного выбора объемов и времени пополнения запасов.

Однако подавляющее большинство известных моделей управления запасами однопродуктовые, т. е. они построены в предположении [1 — 3], что на складе хранится один либо несколько типов продукции, объединенных в комплекты, например, для сборки некоторых изделий, или допускается возможность независимого управления запасами продукции разных типов. Большие затруднения при разработке методов управления запасами вызывают условия неопределенности и нестационарности, в которых работают организации, связанные с созданием и хранением запасов. Для управления запасами в условиях неопределенности в работе [4] предложено применять специально конструируемые адаптивные алгоритмы [5] и алгоритмы фильтрации [6]. В работах [7, 8] для управления запасами в условиях неопределенности была предложена новая концепция управления, суть которой заключается в том, что задачу управления можно решать на основе теоремы разделения, выделяя прогнозируемый детерминированный тренд функций спроса (включающий периодические, в частности, сезонные компоненты) и стохастические остатки. При этом проблема управления запасами по прогнозируемому тренду по постановке представляет собой детерминированную задачу управления, а проблема управления запасами по стохастическим остаткам спроса — задачу управления, которая решается с помощью вероятностной модели.

Проблематика и методы решения задач управления многопродуктовыми запасами исследованы и разработаны в меньшей степени, хотя этой тематике была посвящена монография [4], в которой для решения стохастических многопродуктовых многономенклатурных задач управления запасами предлагалось применить многомерный фильтр Калмана. В последнее время активизировались исследования в области создания методов для решения детерминированных задач управления многопродуктовыми запасами, в частности, были предложены методы, предназначенные для управления многопродуктовыми запасами, но для случая постоянного спроса [9]. Для управления многопродуктовыми запасами в условиях случайного спроса был предложен интересный алгоритм, основанный на идеях теории массового обслуживания [10]. Однако при его использовании для получения решения требуется определять минимум многоэкстремальной функции, что может занимать, как отмечалось [10], несколько часов счета.

В данной работе рассматриваются другие идеи и принципы, использующие результаты, полученные в работах [7—9] и позволяющие строить весьма эффективные модели и методы управления многопродуктовыми запасами в условиях известного спроса. Наиболее продуктивной оказалась идея кусочно-линейной аппроксимации функций расхода запасов, позволяющая строить линеаризованные модели управления запасами. Для линеаризованных моделей получены оценки затрат на хранение и пополнение запасов, а также оценки, позволяющие определять моменты, когда следует пересчитывать времена между пополнениями запасов.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В задачах управления многопродуктовыми запасами при известном и случайном спросе требуется определять оптимальные объемы и времена пополнения запасов хранимой продукции различных типов так, чтобы сумма расходов, связанных с пополнением и хранением запасов, достигала бы минимального значения.

Рассмотрим конкретные постановки задач управления многопродуктовыми запасами, для которых в работе построены модели и методы решения.

1.1. Задача управления запасами продукции одного типа

Рассмотрим сначала задачу управления запасами продукции одного типа, на примере решения которой удобно пояснить предлагаемые идеи и принципы построения моделей и методов управления многопродуктовыми запасами. Эта задача формулируется следующим образом.

Пусть спрос $r(t)$ на продукцию известен для всех $t \in T$, стоимость хранения единицы продукции в единицу времени равна C, а стоимость пополнения и оформления запасов C_s не зависит от размера пополнения. Не нарушая общности, будем считать, что заказ выполняется мгновенно, т. е. время выполнения заказа равно нулю. В задаче требуется определить объемы и время между смежными пополнениями запасов так, чтобы минимизировать затраты на пополнение и хранение запасов в течение планируемого интервала времени T.

Расход q_{12} продукции в течение интервала времени между любыми моментами времени t_1 и t_2 ($t_1 \leqslant t_2$ и t_1, $t_2 \in [0, T]$) можно определить с помощью следующего соотношения [1—5]:

$$q_{12} = \int_{t_1}^{t_2} r(t)dt.$$

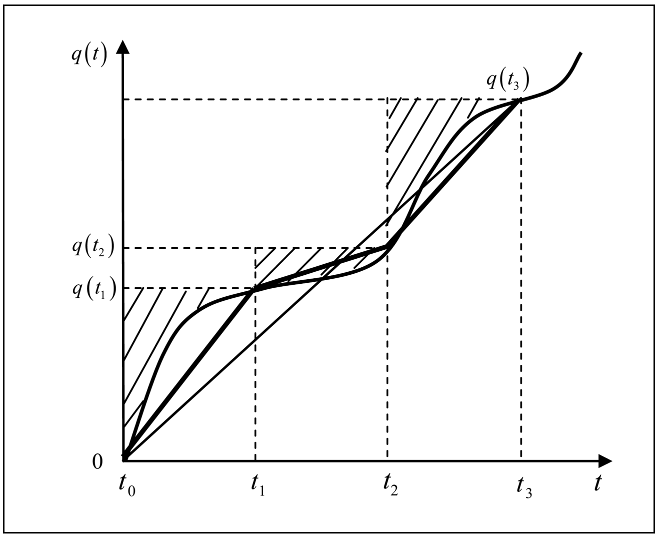

Рис. 1. Функция *q*(*t*), определяющая расход продукции

Графически процесс изменения во времени расхода продукции $q(t)$ может быть представлен в виде, показанном на рис. 1. В общем случае функция $q(t)$ является непрерывной, монотонно неубывающей функцией времени.

Продукции, закупленной в начале периода планирования, т. е. в момент t_0, должно хватить до момента t_1, в который приобретается вторая партия. Второй партии хватает до момента t_2 и т. д. Вплоть до закупки продукции в момент t_{n-1}, которой должно хватить до момента $t_n = T$.

Закупленная в момент t_0 в количестве $q(t_1)$ продукция расходуется постепенно и поэтому на интервале $[t_0, t_1]$ существует некоторый запас, стоимость хранения которого равна произведению стоимости хранения C единицы товара в единицу времени на площадь заштрихованного «квазитреугольника» (см. рис. 1), лежащего над функцией $q(t)$ на интервале $[t_0, t_1]$. Площадь этого «квазитреугольника» равна

$$\int_{t_0}^{t_1} [q(t_1) - q(t)]dt.$$

Аналогично формируются запасы продукции и в последующие периоды. Стоимость хранения запаса в течение интервала времени $[t_{i-1}, t_i]$ равна [1—5]:

$$C \int_{t_{i-1}}^{t_i} [q(t_i) - q(t)]dt, \quad i = 1, ..., n,$$

а в течение интервала времени $[t_0, t_n]$ или $[t_0, T]$ в предположении, что за время T производится целое число пополнений запасов, равное n, равна сумме площадей всех таких «квазитреугольников», умноженной на C:

$$D = nC_s + C\left[\int_{t_0}^{t_1}[q(t_1) - q(t)]dt + \int_{t_1}^{t_2}[q(t_2) - q(t)]dt + \right.$$

$$\left. + \ldots + \int_{t_{n-1}}^{t_n}[q(t_n) - q(t)]dt\right] = nC_s + C\left[\int_{t_0}^{t_1}q(t_1)dt - \right.$$

$$\left. - \int_{t_1}^{t_2}q(t_2)dt + \ldots + \int_{t_{n-1}}^{t_n}q(t_n)dt - \int_{t_0}^{t_n}q(t)]dt\right] =$$

$$= nC_s + C[q(t_1)(t_1 - t_0) + q(t_2)(t_2 - t_1) + \ldots$$

$$\ldots + q(t_n)(t_n - t_{n-1})] - C\int_{t_0}^{t_n}q(t)dt,$$

где C_s — затраты, связанные с доставкой, оформлением и размещением запасов.

В задачах управления многопродуктовыми запасами важно, чтобы интервалы времени между смежными пополнениями запасов были одинаковыми [9]. В противном случае могут возникать «пиковые» режимы работы, когда в течение ограниченного интервала времени на склад будет поступать несколько партий пополнения запасов и потребуется принять, разгрузить, проверить, оформить и разместить на складе такое количество продукции, которое превышает производственные возможности соответствующих служб.

При одинаковом времени между смежными пополнениями запасов все разности $(t_i - t_{i-1})$, $i = 1, \ldots, n$ будут равны t_s, и выражение для $D(t_s)$ примет вид:

$$D(t_s) = C_sT/t_s + Ct_s(q(t_s) + q(2t_s) + \ldots + q(T)) - $$
$$- C\int_{t_0}^{T}q(t)dt,\ n = T/t_s, \qquad (1)$$

где интеграл $\int_{t_0}^{T}q(t_s)dt$ — величина постоянная, определяемая видом функции $q(t)$.

Для определения оптимального t_s, которое минимизирует функцию (1.1), придется применить численные методы [11].

1.2. Задача управления многопродуктовыми запасами

Рассмотрим теперь задачу управления запасами продукции многих типов, которая формулируется следующим образом.

Пусть спрос $r_i(t)$ на продукцию i-го типа, которая хранится на складе, известен для всех $t \in T$ и $i = 1, \ldots, L$, стоимость хранения единицы продукции i-го типа в единицу времени равна C_i, а стоимость пополнения и оформления запасов C_s не зависит от размера пополнения. Требуется определить объемы и время между смежными пополнениями запасов так, чтобы минимизировать затраты на пополнение и хранение запасов в течение планируемого интервала времени T.

Интервал времени t_s между смежными пополнениями запасов, как и в работе [9], будем полагать одинаковым, а также предполагать, что в течение интервала планирования T производится целое число пополнений запасов n.

Функция затрат или издержек $D(t_s)$ в этом случае строится аналогично случаю хранения продукции одного типа и принимает вид:

$$D(t_s) = C_sT/t_s + \sum_{i=1}^{L}\left(C_it_s(q_i(t_s) + q_i(2t_s) + \ldots\right.$$
$$\left.\ldots + q_i(T)) - C_i\int_{t_0}^{T}q_i(t)dt\right), \qquad (2)$$

где $q_i(t)$ — расход продукции i-го типа к моменту времени t, L — число типов хранимой продукции. Остальные обозначения определяют те же величины, что и в ранее приведенных соотношениях.

Для определения оптимального значения t_s, которое минимизирует функцию (2), также придется применить численные методы [11].

Минимизация функций издержек (1) и (2), хотя и не создает принципиальных сложностей, поскольку в настоящее время методы минимизации функций одной переменной хорошо развиты и позволяют получать решения даже при поиске минимума многоэкстремальных функций [11], но может вызывать значительные затруднения, особенно при значительном ассортименте хранимой продукции.

В связи с этим для создания методов, которые позволяли бы эффективно получать приближенные решения задач управления многопродуктовыми запасами, предлагается воспользоваться идеей аппроксимации функций расхода продукции линейными функциями.

Рассмотрим сначала применение этой идеи на примере решения задачи управления запасами продукции одного типа при известном спросе.

Функция расхода продукции $q(t)$ в этом случае аппроксимируется линейной функцией $y(t)$, уравнение которой имеет вид:

$$y(t) = \bar{r}\, t = \frac{q(T)}{T}\, t,$$

где $\bar{r}$ — средний спрос в единицу времени на продукцию на интервале времени T. Значение $y(t)$ в момент времени T будет равно $q(T)$, т. е. $y(T) = q(T)$. На рис. 1 в качестве примера такой аппроксимации для случая $T = t_3$ показана линейная функция, соединяющая начало координат с точкой $(q(t_3), t_3)$.

Для линейной функции $y(t)$, аппроксимирующей функцию затрат $q(t)$, с учетом приведенных в работах [1—3, 9] принципов формируется функция издержек $D(t_s)$, которая для данного случая принимает вид:

$$D(t_s) = \frac{C_s T}{t_s} + \frac{C\bar{r}\, t_s T}{2}.$$

Оптимальное значение t_s^*, при котором функция издержек достигает минимума, определяется из условия $\frac{dD(t_s)}{dt_s} = 0$. Решая это уравнение, получаем формулы, аналогичные формулам Харрисона—Уилсона [1—4, 9], но со средним значением спроса $\bar{r}$ в единицу времени на интервале планирования T. Соотношения для вычисления t_s^* и D^* при этом t_s^* принимают вид:

$$t_s^* = \sqrt{2C_s/C\bar{r}}, \quad D^* = T\sqrt{2C_sC\bar{r}}.$$

Однако средний спрос между смежными пополнениями запасов может отличаться от среднего спроса на всем интервале планирования T. Поэтому вычисление размера пополнения запасов Q с помощью соотношения $Q = \bar{r}\, t_s^*$ может приводить как к возникновению остатков продукции, так и к ее нехватке на складе к моменту следующего пополнения запасов. Это в свою очередь приведет к увеличению затрат на содержание запасов. Для устранения этих проблем функцию расхода $q(t)$ целесообразно аппроксимировать линейными функциями еще и на каждом интервале времени между

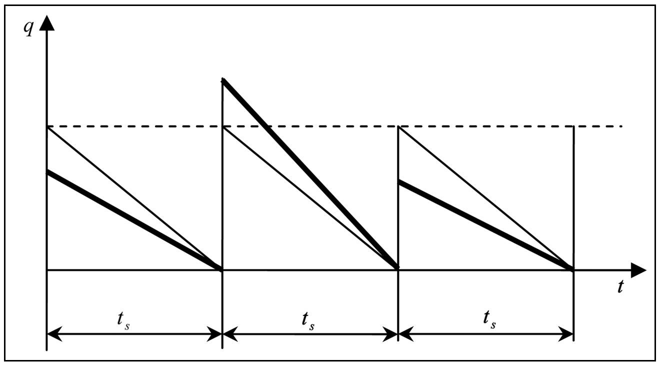

Рис. 2. Графическое представление процессов расхода продукции

смежными пополнениями запасов следующим образом:

$$y(t) = q_k + \frac{q_{k+1} - q_k}{t_s}(t - kt_s) = q_k + \hat{r}_k(t - kt_s),$$
$$t \in [kt_s, (k+1)t_s], \qquad (3)$$

где q_k — значение функции расхода продукции в момент времени $t = kt_s$, т. е. при k-м пополнении запасов, $\hat{r}_k$ — средний спрос в единицу времени на интервале времени между k-м и $(k + 1)$-м пополнениями запасов.

Графически процессы такой аппроксимации могут быть представлены, как показано на рис. 1 жирными линиями.

Размер запаса $Q(t)$ на складе в течение интервала времени t_s между k-м и $(k + 1)$-м пополнениями при такой аппроксимации функции расхода определяется линейной функцией следующего вида:

$$Q(t) = Qk - \hat{r}_k(t - kt_s), \quad t \in [kt_s, (k+1)t_s], \qquad (4)$$

где Q_k — размер k-го пополнения запасов, который определяется из условия $Q_k = \hat{r}_k t_s$ так, чтобы в момент пополнения запасов их остатков от предыдущего пополнения на складе не было.

Такое определение размера пополнения запасов Q_k позволяет избегать как возникновения остатков продукции, так и ее нехватки на складе к моменту следующего пополнения запасов, что не будет приводить к увеличению затрат на содержание запасов.

Графически изменение размера запаса на складе в этом случае может быть представлено, как показано на рис. 2, жирными линиями.

Назовем модель, в которой функция расхода продукции аппроксимируется линейной функцией вида (3), а размер запаса на складе определяется с помощью соотношения (4), линеаризованной моделью задачи управления запасами.

Для линеаризованной модели задачи управления запасами с известным спросом справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть спрос* $r(t)$ *на продукцию в единицу времени известен на интервале планирования* T, *в течение которого поставляется на склад, хранится и затем реализуется* R *единиц продукции. Тогда оптимальное значение функции затрат на хранение и пополнение запасов в линеаризованной модели задачи управления запасами будет равно оптимальному значению затрат* D^*, *которые требуются для хранения и пополнения запасов* R *единиц продукции при постоянном спросе, равном среднему спросу* $\bar{r}$ ($R = \sum\limits_{k=1}^{n} Q_k = \bar{r}T$) *за время* T *при одних и тех же стоимостях на хранение продукции* C *и пополнение запасов* C_s. ♦

Полученный в теореме 1 результат указывает на весьма высокую эффективность предлагаемого подхода, в основе которого лежит кусочно-линейная аппроксимация функций расхода, для управления запасами в условиях известного спроса.

Значительный интерес вызывает получение оценок, связывающих изменение затрат на хранение и пополнение запасов с неточностями в прогнозировании среднего спроса $\bar{r}$ на интервале планирования T, одна из которых приводится в следующей теореме.

Теорема 2. *Пусть прогнозное значение среднего спроса в единицу времени на планируемом интервале времени* T *равно* $\bar{r}$, *а реальное значение среднего спроса в единицу времени за это время оказалась равным* $\tilde{r}$, *т. е. за время* T *было поставлено на склад и затем реализовано* R *единиц продукции* ($R = \sum\limits_{k=1}^{n} Q_k = \tilde{r}T$). *Тогда для значения функции затрат* $\tilde{D}$ *на хранение и пополнение запасов в линеаризованной модели задачи управления запасами, вычисленного с прогнозируемым значением среднего спроса* $\bar{r}$, *справедливо соотношение:*

$$\tilde{D} = \frac{T}{2}\sqrt{2C_sC\tilde{r}}\,(\sqrt{\tilde{r}/\bar{r}} + \sqrt{\bar{r}/\tilde{r}}) = D^*d, \qquad (5)$$

где $D^* = T\sqrt{2C_sC\tilde{r}}$ — *оптимальные затраты на хранение и пополнение запасов для линеаризованной модели при реальном среднем спросе.* ♦

В процессе управления запасами становятся известными реальные значения среднего спроса $\tilde{r}$. Это дает возможность оценивать значение функции затрат $\bar{D}$ на хранение и пополнение запасов с помощью линеаризованной модели задачи управления запасами. Действительно, в те моменты времени $\bar{T}$, когда могут быть определены реальные значения среднего спроса $\tilde{r}$, из соотношения (5) при $T = \bar{T}$ получаем $\bar{D} = \bar{D}^*d$.

Здесь $\bar{D}^* = \bar{T}\sqrt{2C_sC\tilde{r}}$ — значение оптимальных затрат на хранение и пополнение запасов для линеаризованной модели при условии, что реальное значение среднего спроса за время $\bar{T}$ равно $\tilde{r}$. Если величина d в соотношении (5) окажется больше $(1 + \varepsilon)$, где ε — размер допустимых отклонений, то целесообразно сделать новый прогноз среднего спроса $\bar{r}$ и пересчитать t_s. В противном случае можно продолжать работу с прежним значением t_s.

Такие проверки позволяют строить процесс управления запасами на «скользящем» интервале планирования, когда параметры управления пересчитываются по мере необходимости, что очень удобно для организации управления работой реальных складов.

2. ПОСТРОЕНИЕ ЛИНЕАРИЗОВАННЫХ МОДЕЛЕЙ И МЕТОДОВ УПРАВЛЕНИЯ МНОГОПРОДУКТОВЫМИ ЗАПАСАМИ

Идея аппроксимации функций расхода продукции оказывается весьма плодотворной и позволяет строить эффективные методы для управления многопродуктовыми запасами в условиях известного спроса.

Рассмотрим сначала применение этой идеи на примере построения метода для решения задачи управления многопродуктовыми запасами, когда спрос на продукцию известен. Эта задача может быть сформулирована следующим образом.

Пусть спрос $r_i(t)$ на продукцию i-го типа, $i = 1, ..., L$, в единицу времени известен, стоимость хранения единицы продукции i-го типа в единицу времени равна C_i, а стоимость пополнения и оформления запасов C_s не зависит от размера пополнения. Интервал времени t_s между смежными пополнениями запасов, как и в ранее рассмотренных моделях, выбирается одинаковым. Требуется определить объемы и время между смежными пополнениями запасов так, чтобы по возможности сократить затраты на пополнение и хранение запасов в течение планируемого интервала времени T.

Предположим, что в течение интервала планирования T запасы пополняются n раз, где n — целое.

Для построения модели каждую функцию расхода продукции $q_i(t)$ будем аппроксимировать линейной функцией $y_i(t) = \bar{r}_i t = \dfrac{q_i(T)}{T} t$, $i = 1, ..., L$, где $\bar{r}_i$ — средний спрос на продукцию i-го типа на интервале времени T.

После аппроксимации функций затрат в соответствии с описанными принципами (см. также работу [9]), формируется функция затрат $D(t_s)$, которая имеет вид:

$$D(t_s) = \left(\sum_{i=1}^{L} \frac{C_i \bar{r}_i t_s^2}{2} + C_s\right) \frac{T}{t_s} = \sum_{i=1}^{L} \frac{C_i \bar{r}_i t_s T}{2} + C_s \frac{T}{t_s}.$$

Функция $D(t_s)$ является непрерывной функцией t_s, и она стремится к $+\infty$ при $t_s \to 0$. Поэтому оптимальное значение t_s достигается, когда

$$\frac{dD(t_s)}{dt_s} = \sum_{i=1}^{L} \frac{C_i \bar{r}_i T}{2} - \frac{C_s T}{t_s^2} = 0.$$

Из этого условия определяется время между смежными пополнениями запасов t_s^* и размер затрат $D^*(t_s)$ при этом t_s^*:

$$t_s^* = \sqrt{2C_s \Big/ \sum_{i=1}^{n} C_i \bar{r}_i}, \quad D^* = T\sqrt{2C_s \sum_{i=1}^{L} C_i \bar{r}_i}. \quad (6)$$

Для более точного приближения функции расхода продукции i-го типа $q_i(t)$, как и для продукции одного типа, можно использовать ее линейную аппроксимацию между k-м и $(k + 1)$-м пополнениями запасов, которая имеет следующий вид:

$$y_{ik}(t) = q_{ik} + \frac{q_{ik+1} - q_{ik}}{t_s}(t - kt_s) = q_{ik} + \hat{r}_{ik}(t - kt_s),$$
$$t \in [kt_s, (k + 1)t_s],$$

где q_{ik} — значение функции расхода продукции i-го типа в момент времени $t = kt_s$, т. е. при k-м пополнении запасов; $\hat{r}_{ik}$ — средний спрос на продукцию i-го типа в единицу времени между k-м и $(k + 1)$-м пополнениями запасов.

Размер запаса продукции i-го типа на складе $Q_{ik}(t)$ в течение интервала времени t_s между k-м и $(k + 1)$-м пополнениями при такой аппроксимации функции расхода будет описываться линейной функцией следующего вида:

$$Q_{ik}(t) = Q_{ik} - \hat{r}_{ik}(t - kt_s), \quad t \in [kt_s, (k + 1)t_s], \quad (7)$$

где Q_{ik} — размер k-го пополнения запасов продукции i-го типа, который определяется из условия $Q_{ik} = \hat{r}_{ik} t_s$ так, чтобы в момент пополнения запасов остатков от предыдущего пополнения на складе не было.

Назовем модель, в которой функцию расхода продукции каждого типа аппроксимируют линейной функцией, а размер запаса на складе определяют с помощью соотношения (7), линеаризованной моделью задачи управления многопродуктовыми запасами.

Для линеаризованной модели задачи управления запасами с известным спросом на продукцию каждого типа справедлива следующая теорема.

Теорема 3. *Пусть спрос $r_i(t)$ на продукцию i-го типа в единицу времени известен для всех $i = 1, ..., L$ и интервала планирования, в течение которого поставляется и реализуется R_i единиц продукции i-го типа. Тогда оптимальное значение функции затрат на хранение и пополнение запасов в линеаризованной модели задачи управления запасами будет равно оптимальному значению затрат D^*, которые требуются для хранения и пополнения запасов R_i единиц продукции i-го типа, $i = 1, ..., L$ при постоянном спросе, равном среднему спросу $\bar{r}_i$ $\left(R_i = \sum_{k=1}^{n} Q_{ik} = \bar{r}_i T\right)$ за время T.* ♦

Как и в случае хранения продукции одного типа, значительный интерес вызывает получение оценок, связывающих изменение затрат на хранение и пополнение запасов с неточностями в прогнозировании среднего спроса $\bar{r}_i$ по продукции каждого типа на интервале планирования T. Одна из таких оценок приводится в следующей теореме.

Теорема 4. *Пусть прогнозируемое значение среднего спроса в единицу времени на продукцию i-го типа, $i = 1, ..., L$, в течение интервала времени T равно $\bar{r}_i$, а реальное значение среднего спроса за это время оказалось равным $\tilde{r}_i$, т. е. за время T было поставлено на склад и затем реализовано R_i единиц продукции ($R_i = \sum_{k=1}^{n} Q_{ik} = \tilde{r}_i T$). Тогда функция затрат $\hat{D}$ на хранение и пополнение запасов в линеаризованной* *модели задачи управления многопродуктовыми запасами может быть представлена в виде:*

$$\hat{D} = \frac{T}{2}\sqrt{2C_s\sum_{i=1}^{L}C_i\tilde{r}_i}\left[\left(\sum_{i=1}^{L}C_i\tilde{r}_i\Big/\sum_{i=1}^{L}C_i\bar{r}_i\right)^{1/2} + \right.$$

$$\left. + \left(\sum_{i=1}^{L}C_i\bar{r}_i\Big/\sum_{i=1}^{L}C_i\tilde{r}_i\right)^{1/2}\right] = \hat{D}^*\hat{d}, \qquad (8)$$

где $D^* = T\sqrt{2C_s\sum_{i=1}^{L}C_i\tilde{r}_i}$ *— оптимальные затраты на хранение и пополнение запасов для линеаризованной модели при реальнос среднем спросе.* ♦

В процессе управления запасами становятся известными реальные значения среднего спроса $\tilde{r}_i$ по продукции каждого типа. Это дает возможность оценивать значение функции затрат $\bar{D}$ на хранение и пополнение запасов с помощью линеаризованной модели задачи управления запасами. Действительно, в моменты $\bar{T}$, когда можно определить реальные значения среднего спроса $\tilde{r}_i$, из формулы (8) при $T = \bar{T}$ получаем $\bar{D} = \bar{D}^*\tilde{d}$, где $\bar{D}^* = \bar{T}\sqrt{2C_s\sum_{i=1}^{L}C_i\bar{r}_i}$ — оптимальные затраты на хранение и пополнение запасов для линеаризованной модели при условии, что реальное значение среднего спроса на продукцию i-го типа за время $\bar{T}$ равно $\tilde{r}_i$.

Рассмотренные методы контроля затрат и корректировки времени между смежными пополнениями запасов t_s с некоторыми изменениями могут быть применены для всех рассматриваемых далее моделей.

Алгоритм управления запасами для данной задачи может быть записан по шагам следующим образом.

Шаг 1. С помощью методов прогнозирования определяются значения среднего спроса $\bar{r}_i$ $i = 1, ..., L$, на интервале планирования T.

Шаг 2. По значениям $\bar{r}_i$ с помощью соотношения (6) вычисляется оптимальное время t_s между смежными пополнениями запасов.

Шаг 3. Проверяется завершение этапа управления запасами. Если текущее время $t \geqslant T$, то этап управления завершается. Новый этап управления начинается с шага 1. В противном случае переход к шагу 4.

Шаг 4. В момент заказа при $\bar{T} \geqslant 2t_s$ проверяется целесообразность пересчета значения t_s. Если величина $\tilde{d}$, вычисленная по формуле $\bar{D} = \bar{D}^*\tilde{d}$, окажется больше $(1 + \varepsilon)$, где ε — размер допустимых отклонений, то переход к шагу 1. В противном случае переход к шагу 5.

Шаг 5. С помощью рекуррентных соотношений методов прогнозирования определяются наборы $\hat{r}^l_{ik+1}$ и наборы пополнений запасов $Q^l_{ik+1} = \hat{r}^l_{ik+1}t_s$. Из этого множества выбирается то значение Q^l_{ik+1}, для которого значение Q^l_{ik-1} показало лучший результат, и делается заказ на пополнение запасов. Переход к шагу 3.

В соотношениях, полученных для определения времени между смежными пополнениями запасов в этих моделях, используются значения среднего спроса на продукцию каждого типа, что и отличает их от подобных соотношений в моделях, построенных для условий постоянного спроса [9].

3. ПРИНЦИПЫ ФОРМИРОВАНИЯ СТРАТЕГИИ УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ РАЗНЫХ ПО ДОХОДНОСТИ ГРУПП ПРОДУКЦИИ

Пусть вся хранимая продукция делится на группы A и B [1—3, 9]. Продукция группы A, оборот которой приносит наибольшую прибыль, должна по возможности быть всегда в наличии на складе. Поэтому дефицит продукции группы A на складе по возможности целесообразно сокращать. Для продукции группы B, приносящей существенно меньшую прибыль, оказывается достаточно дорого и технически сложно обеспечивать ее постоянное наличие на складе. Целесообразно предусматривать определенный ее дефицит и потерю неудовлетворенных заявок.

Задача управления многопродуктовыми запасами с различной стратегией управления для разных по доходности групп продукции может быть сформулирована следующим образом.

Пусть стоимость хранения единицы продукции i-го типа в единицу времени равна C_{1i}, $i = 1, ..., L$, штраф за дефицит единицы продукции j-го типа, $j \in L_B$, в единицу времени равен C_{2i}, а стоимость пополнения и оформления запасов C_s не зависит от размера пополнения. Интервал времени t_s между смежными пополнениями запасов, как и в ранее рассмотренных моделях, будет выбираться одинаковым на всем интервале планирования T.

Требуется определить объемы и время между смежными пополнениями запасов, а также времена, когда допускается дефицит продукции группы B. Эти времена и объемы пополнений следует выбирать таким образом, чтобы по возможности сократить издержки на пополнение запасов, на штрафы за дефицит продукции и на хранение запасов в течение планируемого интервала времени T.

Функции расхода продукции $q_i(t)$, как и в рассмотренных случаях, аппроксимируются линейными функциями $y_i(t) = \bar{r}_i t = \dfrac{q_i(T)}{T} t$, $i = 1, ..., L$, и строится функция издержек $D(t_s, t_{1i})$, которая для этого случая принимает вид:

$$D(t_s, t_{1i}) = \left(\sum_{j \in L_A} \frac{C_{1j}\bar{r}_j t_s^2}{2} + \sum_{i \in L_B} \frac{C_{1i}\bar{r}_i t_{1i}^2}{2} + \sum_{i \in L_B} \frac{C_{2i}\bar{r}_i (t_s - t_{1i})^2}{2} + C_s\right)\frac{T}{t_s},$$

где L_A — множество наименований продукции группы A, L_B — множество наименований продукции группы B, t_{1i} — время, в течение которого планируется наличие продукции i-го типа на складе, t_{2i} $(t_{2i} = t_s - t_{1i})$ — время, в течение которого допускается дефицит продукции i-го типа на складе. Остальные обозначения имеют такой же смысл, что и в приведенных ранее моделях.

Функция $D(t_s, t_{1i})$ является непрерывно дифференцируемой и на ее переменные наложены ограничения $t_s \geqslant 0$ и $t_{1i} \geqslant 0$. При $t_s \to 0$ функция $D(t_s, t_{1i}) \to \infty$, а дефицит продукции i-го типа может возникнуть при $t > t_{1i}$. Поэтому минимум этой функции достигается при таких значениях t_s и t_{1i}, для которых выполняются условия: $\partial D(t_s, t_{1i})/\partial t_s = 0$, $\partial D(t_s, t_{1i})/\partial t_{1i} \geqslant 0$.

Так определяются времена t_s, t_{1i} и функция затрат D^* при соответствующих значениях t_s, t_{1i}:

$$t_s = \sqrt{2C_s \Big/ \left(\sum_{i \in L_B} \bar{r}_i \frac{C_{1i}C_{2i}}{C_{1i} + C_{2i}} + \sum_{j \in L_A} \bar{r}_j C_{1j}\right)},$$

$$t_{1i} = \frac{C_{2i}}{C_{1i} + C_{2i}}, \quad i \in L_B,$$

$$D^* = T\sqrt{2C_s\left(\sum_{j \in L_A} C_{1j}\bar{r}_j + \sum_{i \in L_B} \bar{r}_i \frac{C_{1i}C_{2i}}{C_{1i} + C_{2i}}\right)}.$$

Для более точного приближения функцию расхода продукции i-го типа $q_i(t)$ между k-м и $(k + 1)$-м пополнениями запасов, как и в рассмотренных выше случаях, можно аппроксимировать линейной функцией следующего вида:

$$y_{ik}(t) = q_{ik} + \frac{q_{ik+1} - q_{ik}}{t_s}(t - kt_s) = q_{ik} + \hat{r}_{ik}(t - kt_s),$$
$$t \in [kt_s, (k + 1)t_s],$$

где q_{ik} — значения функции расхода продукции i-го типа в момент времени $t = kt_s$, т. е. при k-м пополнении запасов; $\hat{r}_{ik}$ — средний спрос на продукцию i-го типа между k-м и $(k + 1)$-м пополнениями запасов.

Размеры запаса продукции i-го типа, $i \in L_A$, $Q_{ik}(t)$ и продукции j-го типа, $j \in L_B$, s_{jk} на складе в течение интервала времени t_s между k-м и $(k + 1)$-м пополнениями при такой аппроксимации функции расхода могут быть заданы линейными функциями следующего вида соответственно:

$$Q_{ik}(t) = Q_{ik} - \hat{r}_{ik}(t - kt_s), \;\; i \in L_A, \;\; t \in [kt_s, (k + 1)t_s],$$

$$s_{jk}(t) = s_{jk} - \hat{r}_{jk}(t - kt_s), \;\; j \in L_B, \;\; t \in [kt_s, kt_s + t_{1j}].$$

Для линеаризованной модели этой задачи управления запасами с известным спросом на продукцию каждого типа справедлива следующая теорема.

Теорема 5. *Пусть спрос $r_i(t)$ на продукцию i-го типа в единицу времени известен для всех $i = 1, ..., L$ и $t \in T$, в течение которого было реализовано R_i единиц продукции i-го типа ($i \in L_A$, $R_i = \sum_{k=1}^{n} Q_{ik} = \tilde{r}_i T$), а также R_j единиц продукции j-го типа $\left(j \in L_B, R_j = \sum_{k=1}^{n} Q_{jk} = \tilde{r}_j \dfrac{C_{2i}}{C_{1i} + C_{2i}} T\right)$. Тогда оптимальное значение функции затрат на хранение и пополнение запасов в линеаризованной модели данной задачи управления запасами равно оптимальному значению затрат D^*, которые потребуются для хранения и пополнения запасов при постоянном спросе, равном среднему спросу $\bar{r}_i$ $\left(R_i = \sum_{k=1}^{n} Q_{ik} = \bar{r}_i T\right)$ при $i \in L_A$ и $\bar{r}_j$ $\left(R_j = \sum_{k=1}^{n} Q_{jk} = \bar{r}_j t_{1j} \dfrac{T}{t_s}\right)$ при $i \in L_B$ за время T.* ♦

Размеры пополнений Q_{ik}^l для продукции группы A и s_{ik}^l для продукции группы B будут определяться в соответствии с соотношениями: $Q^l_{jk} = \hat{r}^l_{jk} t_s$, $j \in L_A$ и $s^l_{ik} = \hat{r}^l_{ik} t_{1i}$, $i \in L_B$. Здесь так же, как и в ранее рассмотренных случаях, на k-м периоде пополнения запасов из множества $\{Q^l_{ik+1}\}$ выбирается то значение Q^l_{ik+1}, для которого значение Q^l_{ik-1} в предыдущем периоде показало лучший результат, а из множества $\{s^l_{ik+1}\}$ выбирается то значение s^l_{ik+1}, для которого значение s^l_{ik-1} в предыдущем периоде также показало лучший результат.

Оценку, связывающую изменение затрат на хранение, штрафы за дефицит продукции и пополнение запасов с неточностями в прогнозировании среднего спроса $\bar{r}_i$ по продукции каждого типа на интервале планирования T, дает следующая теорема.

Теорема 6. *Пусть прогнозируемое значение среднего спроса в единицу времени на продукцию i-го типа* ($i \in L_A \cup L_B$) *в течение планируемого интервала времени T равно* $\bar{r}_i$, *а реальное значение среднего спроса за это время оказалось равно* $\tilde{r}_i$, *т. е. за время T было реализовано* R_i *единиц продукции i-го типа* $\left(i \in L_A,\ R_i = \sum\limits_{k=1}^{n} Q_{ik} = \tilde{r}_i T\right)$, *а также* R_j *единиц продукции j-го типа* $\left(j \in L_B,\ R_j = \sum\limits_{k=1}^{n} Q_{jk} = \tilde{r}_j \dfrac{C_{2i}}{C_{1i} + C_{2i}} T\right)$.

Тогда функция затрат $\hat{D}$ *на хранение и пополнение запасов в линеаризованной модели задачи управления многопродуктовыми запасами может быть представлена в виде:*

$$\hat{D} = \frac{T}{2}\sqrt{2C_s\left(\sum_{j \in L_A} C_{1j}\tilde{r}_j + \sum_{i \in L_B} \tilde{r}_i \frac{C_{1i}C_{2i}}{C_{1i}+C_{2i}}\right)} \times$$

$$\times\left(\sqrt{\frac{\sum\limits_{j \in L_A} C_{1j}\tilde{r}_j + \sum\limits_{i \in L_B} \tilde{r}_i \dfrac{C_{1i}C_{2i}}{C_{1i}+C_{2i}}}{\sum\limits_{j \in L_A} C_{1j}\bar{r}_j + \sum\limits_{i \in L_B} \bar{r}_i \dfrac{C_{1i}C_{2i}}{C_{1i}+C_{2i}}}} + \right.$$

$$\left. + \sqrt{\frac{\sum\limits_{j \in L_A} C_{1j}\bar{r}_j + \sum\limits_{i \in L_B} \bar{r}_i \dfrac{C_{1i}C_{2i}}{C_{1i}+C_{2i}}}{\sum\limits_{j \in L_A} C_{1j}\tilde{r}_j + \sum\limits_{i \in L_B} \tilde{r}_i \dfrac{C_{1i}C_{2i}}{C_{1i}+C_{2i}}}}\right) = D^*\bar{d}. \blacklozenge$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предложена идея кусочно-линейной аппроксимации функций расхода, на основе которой удалось построить достаточно эффективные методы управления многопродуктовыми запасами. Для линеаризованных моделей рассматриваемых задач сформулированы и доказаны теоремы, в которых приводятся оценки затрат на хранение и пополнение запасов, а также оценки, позволяющие в условиях случайного спроса определять моменты, когда следует пересчитывать времена между смежными пополнениями запасов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Хедли Д., Уайтин Т.* Анализ систем управления запасами. — М.: Наука, 1969.
2. *Промышленная* логистика / Под ред. А.А. Колобова. — М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1997.
3. *Хоботов Е.Н.* Управление в технических системах. Часть 1. Управление запасами. — М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2001.
4. *Лотоцкий В.А., Мандель А.С.* Модели и методы управления запасами. — М.: Наука, 1991.
5. *Мандель А.С., Семенов Д.А.* Адаптивные алгоритмы оценки параметров оптимальных стратегий управления запасами при ограниченном дефиците // Автоматика и телемеханика. — 2008. — № 6.
6. *Коновалов А.С., Мандель А.С.* Применение фильтра Калмана для прогнозирования спроса при решении задач управления запасами // Тр. междунар. науч.-практ. конф. «Теория активных систем», 17—19 ноября 2009 г., Москва. — М., 2009. — Т. 1. — С. 259—263.
7. *Мандель А.С.* О парадигмах решения задач управления в условиях неопределенности // Там же. — С. 275—279.
8. *Новые* модели в задачах управления запасами и производством в условиях нестационарности и стохастичности процессов среды функционирования / А.С. Коновалов, В.А. Лапин, А.С. Мандель, И.И. Барладян // Материалы четвертой междунар. конф. «Управление развитием крупномасштабных систем MLSD'2010», 4 — 6 октября 2010 г., Москва. — М., 2010. — Т. 2. — С. 187—189.
9. *Калинин Н.А., Хоботов Е.Н.* Модели управления многопродуктовыми запасами при постоянном спросе // Автоматика и телемеханика. — 2008. — № 9. — С. 156—169.
10. *Рубальский Г.Б.* Стохастическая теория управления запасами // Автоматика и телемеханика. — 2009. — № 12. — С. 175—186.
11. *Сухарев А.Г., Тимохов А.В., Федоров В.В.* Курс методов оптимизации. — М.: Наука, 1986.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.С. Манделем.

Хоботов Евгений Николаевич — д-р техн. наук, профессор, Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана, ✉ e_khobotov@mail.ru.