УДК 519.7

DOI: http://doi.org/10.25728/pu.2022.4.2

ВЕРХНИЕ ГРАНИЦЫ ОТКЛОНЕНИЯ ТРАЕКТОРИЙ АФФИННОГО СЕМЕЙСТВА ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ ПРИ ВНЕШНИХ ВОЗМУЩЕНИЯХ

М.В. Хлебников, Я.И. Квинто

Аннотация. Предложена простая верхняя оценка величины отклонения траектории для аффинного семейства систем в дискретном времени, подверженного воздействию ограниченных внешних возмущений при ненулевых начальных условиях. Предлагаемый подход предполагает построение параметрической квадратичной функции Ляпунова для рассматриваемой системы, а в качестве технического средства используется аппарат линейных матричных неравенств и метод инвариантных эллипсоидов. Исходная задача сводится к параметрической задаче полуопределенного программирования, которая легко решается численно. Результаты численного моделирования демонстрируют сравнительно невысокий консерватизм полученной оценки. Работа продолжает цикл ранее опубликованных исследований авторов, связанных с оцениванием отклонений в линейных непрерывных и дискретных системах, подверженных воздействию системных неопределенностей и внешних возмущений. Полученные результаты могут быть распространены на различные робастные постановки задачи, а также на задачу минимизации отклонений аффинного семейства систем управления в дискретном времени при наличии внешних возмущений с помощью линейной обратной связи.

Ключевые слова: линейная дискретная система, всплеск, параметрическая функция Ляпунова, ограниченные внешние возмущения, линейные матричные неравенства, инвариантные эллипсоиды.

ВВЕДЕНИЕ

При исследовании переходных режимов в линейных системах большой интерес представляет поведение всей траектории системы. При этом одной из наиболее важных характеристик переходного режима является величина максимального отклонения траектории от нуля.

Существуют различные методы оценивания отклонений траекторий динамической системы (см., например, обзор в статье [1]). В частности, в этой работе был предложен регулярный подход к оцениванию величины максимального отклонения для линейной системы в непрерывном времени, а также развит подход к минимизации отклонений при помощи статической линейной обратной связи по состоянию на основе техники линейных матричных неравенств. Развитый подход был распространен [2] и на системы в дискретном времени, содержащие структурированную матричную неопределенность.

Еще одно важное и перспективное направление исследований в данной области связано с методом локализации инвариантных компактов; отметим здесь работы отечественных ученых А.П. Крищенко, А.Н. Канатникова, С.К. Коровина (см., например, статьи [3–6]).

Ситуация, когда неопределенными параметрами являются сами элементы матрицы, достаточно редкая, так как обычно коэффициенты матрицы сами по себе не имеют непосредственного физического смысла и зависят от параметров более сложным образом. Аффинная неопределенность является простейшей моделью такой *зависимой* структуры неопределенности; подробнее см. монографию [7].

Исследованию дискретных систем с параметрической неопределенностью посвящены работы [8–10]. С технической точки зрения в них применяется подход, предложенный в статье [11] и позволяющий обособить матрицу системы и матрицу функции Ляпунова в матричном неравенстве, представляющем собой достаточное условие устойчивости рассматриваемого семейства. При этом получение менее консервативных оценок осуществляется путем построения параметрической квадратичной функции Ляпунова. Отметим также публикации [12, 13], посвященные близкой тематике.

В настоящей статье авторы продолжают развитие этой линии исследований с целью получения верхних оценок отклонений траекторий аффинного семейства дискретных систем с ненулевыми начальными условиями при воздействии ограниченных внешних возмущений. При этом основным техническим средством является аппарат линейных матричных неравенств [14, 15].

В статье используются следующие обозначения: $\|\cdot\|$ – спектральная норма матрицы и евклидова норма вектора, $^{\mathrm{T}}$ – символ транспонирования, I – единичная матрица соответствующей размерности, а все матричные неравенства понимаются в смысле знакоопределенности матриц.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ПОДХОД К ЕЕ РЕШЕНИЮ

Рассмотрим линейную динамическую систему в дискретном времени

$$x_{k+1} = A(\alpha)x_k + Dw_k \tag{1}$$

с состоянием $x_k \in \mathbb{R}^n$, *ненулевым* начальным условием x_0 и внешним возмущением $w_k \in \mathbb{R}^m$, удовлетворяющим ограничению

$$\|w_k\| \le 1, \quad k = 1, 2, \ldots \tag{2}$$

Здесь $D \in \mathbb{R}^{n\times m}$, а шуровские матрицы $A(\alpha) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ принадлежат выпуклому семейству

$$\mathbb{A} = \left\{ A(\alpha) : A(\alpha) = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i A_i,\ \sum_{i=1}^{N} \alpha_i = 1,\ \alpha_i \ge 0 \right\}. \tag{3}$$

Как хорошо известно, достаточное условие робастной квадратичной устойчивости линейной системы состоит в существовании *общей* квадратичной функции Ляпунова

$$V(x) = x^{\mathrm{T}} P^{-1} x, \quad P > 0.$$

Как показано в работах [8–10], существенно менее консервативные оценки дает подход, основанный на построении *параметрической* квадратичной функции Ляпунова

$$V(x) = x^{\mathrm{T}} P^{-1}(\alpha) x, \quad P(\alpha) > 0.$$

При этом в работе [8] была установлена справедливость следующего утверждения.

Теорема 1. *Пусть существуют матрицы* $0 < P_i = P_i^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *и* $G \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *такие, что для матриц* A_i, D, *определяемых соотношениями* (1), (3), *выполняются условия*

$$\begin{pmatrix} P_i & A_i G & D \\ G^{\mathrm{T}} A_i^{\mathrm{T}} & \mu(G + G^{\mathrm{T}} - P_i) & 0 \\ D^{\mathrm{T}} & 0 & (1-\mu)I \end{pmatrix} \ge 0, \quad i = 1, \ldots, N,$$

при некотором $0 < \mu < 1$.

Тогда система (1) *обладает параметрической квадратичной функцией Ляпунова с матрицей*

$$P(\alpha) = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i P_i.$$

Основной целью настоящей статьи является оценивание верхних границ отклонений траекторий для семейства (1) при внешнем возмущении (2).

Для дискретной системы величина максимального отклонения траектории от нуля в переходном режиме представляется выражением

$$\xi^* = \max_{k=1,2,\ldots} \max_{\|x_0\|=1} \|x_k\|.$$

Оценивание величины ξ^* весьма затруднено (см. работу [1]), однако применение метода инвариантных эллипсоидов на основе техники линейных матричных неравенств позволяет получать ее простые верхние оценки.

Напомним следующий хорошо известный результат. Матрица $P > 0$ квадратичной функции Ляпунова для некоторой динамической системы определяет т.н. *инвариантный* эллипсоид

$$\mathcal{E} = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \quad x^{\mathrm{T}} P^{-1} x \le 1 \right\}, \quad P > 0.$$

Иными словами, траектория системы, начинаясь в любой его точке, будет оставаться в этом эллипсоиде. Отсюда следует, что *для любого* начального условия из шара $\mathcal{B} = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \le 1\}$, содержащегося в эллипсоиде $\mathcal{E}$, в каждый момент времени будет верна оценка

$$\|x_k\| \le \lambda_{\max}(P) = \sqrt{\|P\|}.$$

Ввиду этого, зададимся целью поиска *минимального* инвариантного эллипсоида, ассоциированного с матрицей $P = P(\alpha)$ параметрической квадратичной функции Ляпунова рассматриваемого семейства.

Поскольку

$$\|P(\alpha)\| = \left\| \sum_{i=1}^{N} \alpha_i P_i \right\| \le \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \|P_i\| \le$$

$$\le \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \max_i \|P_i\| \le \max_i \|P_i\|,$$

в рамках предлагаемого подхода будем минимизировать верхнюю оценку наибольшей полуоси инвариантного эллипсоида с матрицей $P(\alpha)$ – величину

$$\max_i \|P_i\|.$$

Далее, условие $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{E}$ эквивалентно требованию

$$P(\alpha) \geq I$$

и гарантируется выполнением условий $P_i \geq I$, $i = 1, \ldots, N$. Действительно,

$$P(\alpha) = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i P_i \geq \sum_{i=1}^{N} \alpha_i I = I.$$

Наконец, заметив, что матричному неравенству

$$\begin{pmatrix} P_i & A_i G & D \\ G^{\mathrm{T}} A_i^{\mathrm{T}} & \mu\left(G + G^{\mathrm{T}} - P_i\right) & 0 \\ D^{\mathrm{T}} & 0 & (1-\mu) I \end{pmatrix} \geq 0$$

по лемме Шура можно придать эквивалентный вид

$$\begin{pmatrix} P_i - \dfrac{1}{1-\mu} D D^{\mathrm{T}} & A_i G \\ G^{\mathrm{T}} A_i^{\mathrm{T}} & \mu\left(G + G^{\mathrm{T}} - P_i\right) \end{pmatrix} \geq 0,$$

с учетом оценки

$$\|x_k\| \leq \sqrt{\|P(\alpha)\|} \leq \max_{i=1,\ldots,N} \sqrt{\|P_i\|}$$

окончательно приходим к следующему утверждению.

Теорема 2. *Пусть* P_i^*, $i = 1, \ldots, N$, *— решение задачи выпуклой оптимизации*

$$\min \max_{i=1,\ldots,N} \|P_i\|$$

при ограничениях

$$\begin{pmatrix} P_i - \dfrac{1}{1-\mu} D D^{\mathrm{T}} & A_i G \\ G^{\mathrm{T}} A_i^{\mathrm{T}} & \mu\left(G + G^{\mathrm{T}} - P_i\right) \end{pmatrix} \geq 0,$$

$$P_i \geq I, \quad i = 1, \ldots, N,$$

относительно матричных переменных $P_i = P_i^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $G \in \mathbb{R}^{n \times n}$ *и скалярного параметра* $0 < \mu < 1$, *где матрицы* A_i, D *определяются соотношениями* (1), (3).

Тогда для решений системы (1) *при всех допустимых внешних возмущениях* (2) *справедлива оценка*

$$\|x_k\| \leq \max_{i=1,\ldots,N} \sqrt{\|P_i^*\|}.$$

Оптимизационная задача, сформулированная в теореме 2, представляет собой параметрическую задачу полуопределенного программирования. Она легко решается численно путем одномерной оптимизации по параметру μ, варьируемому на интервале (0, 1). В частности, для этого может быть эффективно использован пакет cvx [16] в среде Matlab.

2. ПРИМЕР

Рассмотрим (в несколько измененном виде) систему вида (1) из работы [8]:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0{,}0061 & -0{,}2630 & 0{,}2748 \\ 0{,}1266 & 0{,}1242 & -0{,}3029 \\ -0{,}5100 & 0{,}4678 & -0{,}9712 \end{pmatrix},$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 0{,}1330 & 0{,}2009 & 0{,}1672 \\ 0{,}1224 & -0{,}5987 & 0{,}3100 \\ -0{,}5235 & 0{,}0297 & -0{,}4784 \end{pmatrix},$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} -0{,}2733 & -0{,}1868 & -0{,}0077 \\ -0{,}0253 & -0{,}2828 & 0{,}6112 \\ -0{,}2412 & -0{,}0844 & -0{,}8024 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} -0{,}4 \\ -0{,}5 \\ 0{,}2 \end{pmatrix}.$$

Решение задачи одномерной оптимизации, сформулированной в теореме 2, доставляет (при μ = 0,873) матрицы

$$P_1^* = \begin{pmatrix} 4{,}0127 & 0{,}4418 & -2{,}1495 \\ 0{,}4418 & 4{,}3296 & 0{,}6922 \\ -2{,}1495 & 0{,}6922 & 2{,}8445 \end{pmatrix},$$

$$P_2^* = \begin{pmatrix} 2{,}7515 & 0{,}7640 & -1{,}2374 \\ 0{,}7640 & 4{,}8052 & -0{,}1782 \\ -1{,}2374 & -0{,}1782 & 2{,}2964 \end{pmatrix},$$

$$P_3^* = \begin{pmatrix} 2{,}2435 & 1{,}9108 & -0{,}7729 \\ 1{,}9108 & 3{,}9362 & -1{,}1877 \\ -0{,}7729 & -1{,}1877 & 1{,}4804 \end{pmatrix}$$

параметрической функции Ляпунова и матрицу

$$G^* = \begin{pmatrix} 2{,}7991 & -0{,}0704 & -1{,}4510 \\ 2{,}2860 & 5{,}1487 & -0{,}6981 \\ -1{,}0359 & 0{,}2141 & 1{,}9738 \end{pmatrix}.$$

Отсюда

$$\sqrt{\|P_1^*\|} = 2{,}3791, \ \sqrt{\|P_2^*\|} = 2{,}2774, \ \sqrt{\|P_3^*\|} = 2{,}3791$$

и окончательно имеем оценку

$$\|x_k\| \le \max\left\{\sqrt{\|P_1^*\|}, \sqrt{\|P_2^*\|}, \sqrt{\|P_3^*\|}\right\} = \sqrt{\|P_1^*\|} = 2{,}3791.$$

Для сравнения: общая квадратичная функция Ляпунова для этой системы, найденная согласно работе [5], обладает матрицей

$$P^*_{comm} = \begin{pmatrix} 27{,}1113 & -9{,}3697 & -23{,}8293 \\ -9{,}3697 & 76{,}0285 & 6{,}4098 \\ -23{,}8293 & 6{,}4098 & 47{,}9982 \end{pmatrix}$$

и доставляет более чем втрое грубую оценку:

$$\|x_k\| \le \sqrt{\|P^*_{comm}\|} = 9{,}0666.$$

На рис. 1 показаны проекции на плоскость (x_2, x_3) эллипсоидов с матрицами P_1^*, P_2^*, P_3^* (тонкие сплошные линии) и инвариантного эллипсоида с матрицей P_{comm} (жирная штрихпунктирная линия); точечной линией показана проекция единичного шара.

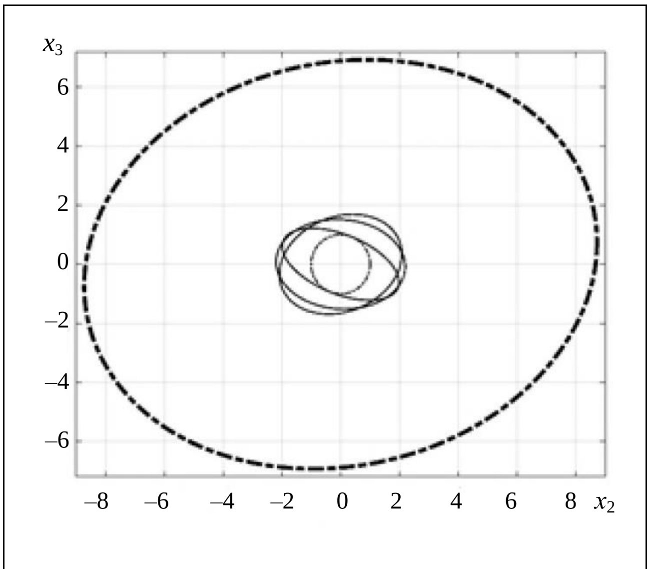

Рис. 1. Проекции эллипсоидов на плоскость (x_2, x_3)

На рис. 2 показана центральная часть рис. 1, а также проекция траектории системы при начальном условии

$$x_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0{,}1391 \\ -0.9903 \end{pmatrix}, \quad \|x_0\| = 1,$$

и допустимом внешнем возмущении

$$w_k = \mathrm{sign}(\sin(k/4)\cos(k/7)), \quad k = 1, 2, \ldots$$

(пунктирная линия).

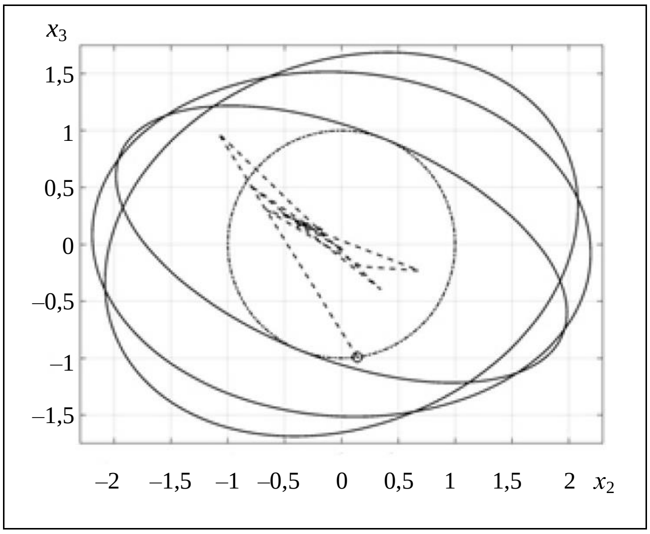

Рис. 2. Проекции эллипсоидов и траектории системы на плоскость (x_2, x_3)

На рис. 3 показана динамика величины $\|x_k\|$ (сплошная линия) и найденная оценка величины всплеска (пунктир).

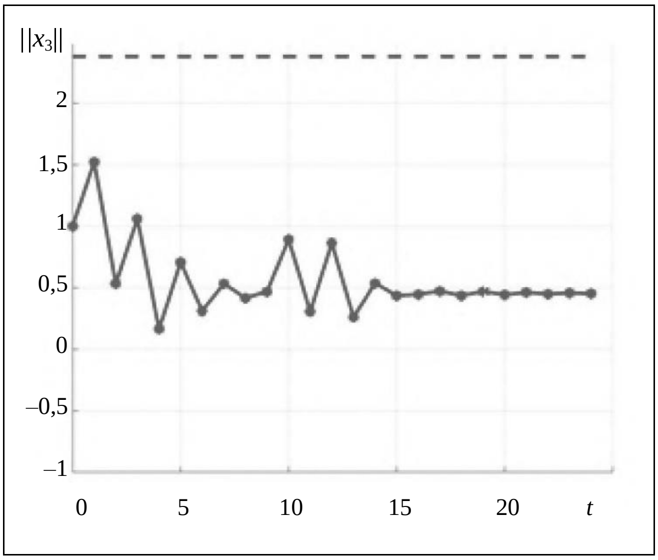

Рис. 3. Динамика величины $\|x_k\|$ и ее оценка

3. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В статье предложена простая верхняя оценка одной из наиболее важных характеристик переходного режима – величины максимального отклонения траектории от нуля – для аффинного семейства систем в дискретном времени, подверженного воздействию ограниченных внешних возмущений при ненулевых начальных условиях. Предлагаемый подход, развивая предыдущие работы авторов, предполагает построение параметрической квадратичной функция Ляпунова для рассматриваемой системы, а в качестве технического средства используется аппарат линейных матричных неравенств и метод инвариантных эллипсоидов. При этом исходную задачу удалось свести к параметрической задаче полуопределенного программирования, которая легко решается численным образом, в частности – в среде Matlab с помощью пакета cvx.

Авторы предполагают распространить полученные результаты на различные робастные постановки исходной задачи, а также на задачу минимизации отклонений аффинного семейства систем управления в дискретном времени при наличии внешних возмущений с помощью линейной обратной связи.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Поляк Б.Т., Тремба А.А., Хлебников М.В.* и др. Большие отклонения в линейных системах при ненулевых начальных условиях // Автоматика и телемеханика. – 2015. – № 6. – С. 18–41. [*Polyak, B.T., Tremba, A.A., Khlebnikov, M.V.*, et al. Large Deviations in Linear Control Systems with Nonzero Initial Conditions // Automation and Remote Control. – 2015. – Vol. 76, No. 6. – P. 957–976.].
2. *Квинто Я.И., Хлебников М.В.* Верхние границы максимального отклонения траектории в линейных дискретных системах: робастная постановка // Управление большими системами. – 2019. – Вып. 77. – С. 70–84. – DOI: https://doi.org/10.25728/ubs.2019.77.4. [*Kvinto, Ya.I., Khlebnikov, M.V.* Upper Bounds of Large Deviations in Linear Discrete-Time Systems: The Robust Statement // Large-Scale Systems Control. – 2019. – Iss. 77. – P. 70–84. – DOI: https://doi.org/10.25728/ubs.2019.77.4 (In Russian)].
3. *Канатников А.Н.* Локализующие множества и поведение траекторий неавтономных систем // Дифференциальные уравнения. – 2019. – Т. 55, № 11. – С. 1465–1475. [*Kanatnikov, A.N.* Localizing Sets and Behavior of Trajectories of Time-Varying Systems // Differential Equations. – 2019. – Vol. 55. – P. 1420–1430].
4. *Крищенко А.П.* Поведение траекторий автономных систем // Дифференциальные уравнения. – 2018. – Т. 54, № 11. – С. 1445–1450. [*Krishchenko, A.P.* Behavior of Trajectories of Time-Invariant Systems // Differential Equations. – 2018. – Vol. 54. – P. 1445–1450].
5. *Канатников А.Н.* Об эффективности функционаьного метода локализации // Дифференциальные уравнения. – 2020. – Т. 56, № 11. – С. 1433–1438. [*Kanatnikov, A.N.* On the Efficiency of the Functional Localization Method // Differential Equations. – 2020. – Vol. 56. – P. 1402–1407.]
6. *Канатников А.Н., Крищенко А.П.* Функциональный метод локализации и принцип инвариантности Ла-Салля // Математика и математическое моделирование. – 2021. – № 1. – С. 1–12. [*Kanatnikov A.N., Krishchenko A.P.* Functional Method of Localization and LaSalle Invariance Principle // Mathematics and Mathematical Modeling. – 2021. – № 1. – P. 1–12. (In Russian)]
7. *Поляк Б.Т., Щербаков П.С.* Робастная устойчивость и управление. – М.: Наука, 2002. – 303 с. [*Polyak B.T., Shcherbakov P.S.* Robastnaya ustoychivost' i upravlenie (Robust Stability and Control). – Moscow: Nauka, 2002. – 303 s. (In Russian)].
8. *Хлебников М.В., Квинто Я.И.* Параметрическая функция Ляпунова для дискретных систем управления с внешними возмущениями: анализ // Проблемы управления. – 2021. – № 4. – С. 21–26. – DOI: http://doi.org/10.25728/pu.2021.4.2 [*Khlebnikov, M.V., Kvinto, Ya.I.* A Parametric Lyapunov Function For Discrete-time Control Systems With Bounded Exogenous Disturbances: Analysis // Control Sciences. – 2021. – No. 4. – P. 18–22. – DOI: http://doi.org/10.25728/cs.2021.4.2].
9. *Geromel, J.C., De Oliveira, M.C., Hsu, L.* LMI Characterization of Structural and Robust Stability // Linear Algebra and Its Applications. – 1998. – Vol. 285. – P. 69–80.
10. *Ramos, D.C.W., Peres, P.L.D.* A Less Conservative LMI Condition for the Robust Stability of Discrete-Time Uncertain Systems // Systems & Control Letters. – 2001. – Vol. 43. – P. 371–378.
11. *De Oliveira, M.C., Bernussou, J., Geromel, J.C.* A New Discrete-Time Robust Stability Condition // Systems & Control Letters. – 1999. – Vol. 37. – P. 261–265.
12. *Deaecto G.S., Geromel J.C.* Stability and Performance of Discrete-Time Switched Linear Systems // Systems & Control Letters. – 2018. – Vol. 118. – P. 1–7.
13. *Egidio L.N., Deaecto G.S., Geromel J.C.* Limit Cycle Global Asymptotic Stability of Continuous-Time Switched Affine Systems // IFAC-PapersOnLine. – 2020. – Vol. 53, No. 2. – P. 6121–6126.
14. *Boyd, S., El Ghaoui, L., Feron, E., Balakrishnan, V.* Linear Matrix Inequalities in Systems and Control Theory. – Philadelphia: SIAM, 1994. – 212 p.
15. *Баландин Д.В., Коган М.М.* Синтез законов управления на основе линейных матричных неравенств. – М.: Физматлит, 2007. – 280 с. [*Balandin, D.V., Kogan, M.M.* Sintez zakonov upravleniya na osnove lineinykh matrichnykh neravenstv (LMI-based Control System Design). – Moscow: Fizmatlit, 2007. – 280 s. (In Russian)].
16. *Grant, M., Boyd, S.* CVX: Matlab Software for Disciplined Convex Programming, Version 2.1. – URL: http://cvxr.com/cvx/.

Статья представлена к публикации членом редколлегии С.А. Красновой.

Поступила в редакцию 22.06.2022,
после доработки 14.09.2022.
Принята к публикации 19.09.2022.

Хлебников Михаил Владимирович – д-р физ.-мат. наук,
✉ khlebnik@ipu.ru,

Квинто Яна Игоревна – канд. техн. наук,
✉ yanakvinto@mail.ru,

Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, г. Москва.

UPPER BOUNDS ON TRAJECTORY DEVIATIONS FOR AN AFFINE FAMILY OF DISCRETE-TIME SYSTEMS UNDER EXOGENOUS DISTURBANCES

M.V. Khlebnikov[1] and Ya.I. Kvinto[2]

Trapeznikov Institute of Control Sciences, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

[1]✉ khlebnik@ipu.ru, [2]✉ yanakvinto@mail.ru

Abstract. We propose a simple upper bound on trajectory deviations for an affine family of discrete-time systems under nonzero initial conditions subjected to bounded exogenous disturbances. It involves the design of a parametric quadratic Lyapunov function for the system. The apparatus of linear matrix inequalities and the method of invariant ellipsoids are used as technical tools. The original problem is reduced to a parametric semidefinite programming problem, which is easily solved numerically. Numerical simulation results demonstrate the relatively low conservatism of the upper bound. This paper continues the series of our previous publications on estimating trajectory deviations for linear continuous- and discrete-time systems with parametric uncertainty and exogenous disturbances. The results presented below can be extended to various robust formulations of the original problem and also the problem of minimizing trajectory deviations for an affine family of discrete-time control systems under exogenous disturbances via linear feedback.

Keywords: linear discrete-time system, trajectory deviations, parametric Lyapunov function, bounded exogenous disturbances, linear matrix inequalities, invariant ellipsoids.