

МНОГОШАГОВАЯ ЗАДАЧА УПРАВЛЕНИЯ ИНВЕСТИЦИОННЫМИ ПОРТФЕЛЯМИ НА ОСНОВЕ МОДЕЛЕЙ ВЕКТОРНЫХ АВТОРЕГРЕССИЙ И МОДЕЛЕЙ МНОГОМЕРНОЙ ВОЛАТИЛЬНОСТИ

В.В. Хабров

Рассмотрен подход к решению многошаговой задачи управления инвестиционными портфелями в рамках средне-дисперсионного анализа при условии, что управляющему известна информация о моделях ценообразования доходности активов и волатильности их ошибок. Отмечено, что данная задача представляет собой оптимизацию дискретной многошаговой системы в условиях неопределенности при заданных значениях функции от фазовых координат на терминальном шаге и ограничениях вида равенств на управляющие переменные. Исследованы характеристики оптимальных многошаговых портфелей, сформированных на основе прогнозов моделей векторной авторегрессии и многомерной волатильности.

Ключевые слова: дискретная оптимизация, портфельная теория, модель векторной авторегрессии, модели многомерной волатильности.

ВВЕДЕНИЕ

Способы формирования портфелей ценных бумаг на основе подхода Марковица [1, 2] и его последователей (модель ценообразования финансовых активов, арбитражная теория расчетов, трехфакторная модель [3]) не могли учитывать динамику доходностей активов, описанную стохастическими моделями ценообразования, которые служат адекватными инструментами для их представления. Портфели, сформированные на основе подхода Марковица, называют средне-дисперсионными портфелями.

Поскольку в работах [4, 5] было выявлено, что ошибки в оценках математических ожиданий доходностей значительно изменяют структуру портфеля по сравнению с ошибками в дисперсии и ковариациях, то большинство исследований посвящено анализу портфельной стратегии, минимизирующей только дисперсию портфеля (global minimum variance, GMV) и не принимающей во внимание ограничение на его целевую доходность.

Таким образом, подавляющее число исследований, оценивающих влияние стохастических моделей ценообразования доходностей активов на характеристики оптимальных портфелей, посвящено GMV-портфелям. В работах [6, 7] с помо-

щью вспомогательной регрессионной модели [8] и ВЕКК-модели, получившей свое название по первым буквам фамилий авторов — Baba, Engle, Kroner и Kraft [9], исследовалось влияние ошибок при прогнозировании дисперсии и ковариации доходностей активов на характеристики GMV-портфелей. Характеристики GMV-портфелей при использовании моделей условных корреляций исследовались в работах [10, 11]. Показано, что веса GMV-портфеля чувствительны к данным матрицы ковариации и целесообразно для построения портфелей использовать модели, учитывающие поведение корреляций доходностей активов.

Рассматривалось построение оптимальных средне-дисперсионных портфелей, учитывающих динамику доходностей активов [12], было также учтено поведение волатильности ошибок моделей ценообразования [13].

Подход Марковица заключается в одношаговой оптимизации портфеля активов и по окончании данного периода нуждается в пересмотре, поскольку характеристики рискованных активов и их взаимосвязи могли поменяться в течение этого периода, что отразилось бы на вариационно-ковариационной матрице и оценках доходностей активов.

В работах [14–16] поставлена многошаговая задача управления портфелем как задача оптималь-



ного управления, в соответствии с которой необходимо максимизировать полезность потребления и финальное благосостояние. В этом ее отличие от классического средне-дисперсионного подхода, где необходимо максимизировать доходность или минимизировать риск, измеряющиеся математическим ожиданием и дисперсией доходности портфеля соответственно. В качестве модели ценообразования доходностей активов авторы приняли геометрическую модель броуновского движения. Многошаговый случай управления портфелем активов на основе оптимизации функции полезности инвестора и/или потребления широко представлен в литературе [17–21].

В то же время решение многошаговой задачи управления инвестиционным портфелем в рамках средне-дисперсионного подхода в явном виде или в виде численного алгоритма долгое время не было найдено. В работах [22–25] был разобран подход, позволяющий формировать многошаговые портфели на основе информации дискретных моделей условной гетероскедастичности доходностей активов, что позволило авторам смоделировать эволюцию случайных доходностей портфеля в виде «деревьев решений» и тем самым определить оптимальное управление.

В работе [26] представлено аналитическое решение многошаговой задачи управления инвестиционным портфелем на основе средне-дисперсионного подхода путем решения вспомогательной оптимизационной задачи. Авторы подразумевали, что знают параметры распределения векторов доходностей в начальный момент времени, что невозможно в том случае, если инвестор обладает информацией о модели ценообразования доходностей активов, так как в этом случае распределение доходностей будет зависеть от состояния каждого шага.

Настоящая работа представляет собой расширение исследования [13] для многошагового случая и посвящена теоретическим основам формирования оптимальных многошаговых портфелей в рамках средне-дисперсионного подхода для случая, когда известна информация о моделях ценообразования доходностей и их ошибок. В ее практической части исследованы характеристики указанных портфелей, построенных на основе прогнозов моделей векторной авторегрессии и многомерной волатильности.

1. МОДЕЛИ ЦЕНООБРАЗОВАНИЯ ДОХОДНОСТЕЙ И ВОЛАТИЛЬНОСТИ

Прежде чем перейти к постановке оптимизационной многошаговой задачи управления инвестиционными портфелями поясним, в чем заключаю-

ся цель и задачи управления портфелями, а также определимся с перечнем входных данных задачи.

Цель инвестора заключается в достижении через заданное число шагов целевой доходности портфеля при минимальном риске. В зависимости от информации о характеристиках распределений доходностей активов многошаговые портфельные стратегии можно разделить на три основных типа. В случае, если доходности активов портфеля являются независимыми одинаково распределенными случайными величинами, то решение многошаговой задачи управления инвестиционным портфелем сводится к решению ряда независимых одношаговых задач. Если характеристики распределений доходностей активов меняются от шага к шагу, но при этом они известны, то стратегия управления портфелем будет известна заранее на момент начала управления. Портфельные стратегии, при которых характеристики доходностей активов меняются случайным образом, будут учитывать в начале каждого шага вновь поступившую информацию. Поскольку в данной статье предполагается, что инвестору известна информация о модели ценообразования доходности активов, то многошаговая задача управления инвестиционным портфелем будет относиться ко второму типу и заключаться в определении в момент времени t_0 стратегии распределения средств портфеля по его активам на начало каждого момента времени $t \in \{t_0, t_1, \dots, T-1\}$ в течение заданного числа шагов T . В начале каждого из T периодов инвестор будет перераспределять средства портфеля среди его активов в соответствии со стратегией, выработанной в начальный момент времени t_0 , не принимая во внимание вновь поступающую информацию в течение инвестиционного горизонта.

Для решения задачи необходимо определить ожидаемую целевую доходность S портфеля, которую необходимо достичь на терминальном шаге; величину T — число шагов, за которое портфель должен достичь целевую доходность — инвестиционный горизонт портфеля; набор прогнозов векторов доходностей активов портфеля и условных матриц ковариаций ошибок прогнозов доходностей для каждого из шагов в течение инвестиционного горизонта.

Пусть управляющий имеет возможность разместить свой капитал среди N активов, $X = \{x_1, \dots, x_N\}$. Вектор $\omega_t = (\omega_{1,t}, \dots, \omega_{N,t}) \in \mathbb{R}^{N \times 1}$ такой, что $\omega'_t e = 1$, где $e = (1, \dots, 1) \in \mathbb{R}^{N \times 1}$ — единичный вектор, называют портфелем, действующим в период времени $(t, t+1]$, а его компоненты $\omega_{i,t}$, $i = 1, \dots, N$, называют весами i -х активов портфеля.

1.1. Доходности активов и портфеля

Постановка многошаговой задачи управления инвестиционными портфелями требует использования логарифмированных доходностей активов, чтобы задать уравнение динамики доходности портфеля в виде аддитивного функционала. Пусть $r_t = (r_t(x_1), \dots, r_t(x_1)) \in R^{N \times 1}$ — случайный вектор доходностей активов за период времени $(t, t + 1]$, где $r_t(x_i) = r_{i,t} = \ln(PR_{i,t}/PR_{i,t-1})$ — логарифмированная доходность i -го актива.

Если простые доходности активов достаточно малые по размерности величины, то доходность портфеля за период $(t, t + 1]$ — случайную величину — можно представить как $P(\omega_{t+1}) = \omega'_t r_{t+1}$, и динамика доходностей портфеля за n шагов может описываться уравнением [27] $R_n = R_{n-1} + \omega'_{n+1} r_n$.

1.2. Модель векторной авторегрессии

Векторные авторегрессионные модели (vector autoregressions model, VAR) нашли свое применение, главным образом, в анализе макроэкономических данных. Изначально применение VAR-моделей было описано в работах [28—30]. Вопросы построения и оценки VAR-моделей подробно изучались в работах [31—33]. Применение моделей векторных авторегрессий рассмотрено в работах [27, 34—37].

Пусть ряды доходностей стационарны или приведены к стационарному виду. Предположим, что ценообразование случайного вектора доходностей $r_t \in R^{N \times 1}$ описывается VAR(k)-моделью:

$$r_t = d + \Pi_1 r_{t-1} + \dots + \Pi_k r_{t-k} + \varepsilon_t$$

где $d \in R^{N \times 1}$ — вектор констант или детерминированных входных данных, $\Pi_j \in R^{N \times N}$, $j = 1, \dots, k$ — матрицы коэффициентов, связывающие текущие значения доходностей активов с их лагированными значениями, $\varepsilon_t \in R^{N \times 1}$ — вектор случайных ошибок. В зависимости от того, существует ли одновременная корреляция и/или автокорреляция ошибок, а также присутствует ли гетероскедастичность в остатках или они гомоскедастичны — полная матрица ковариаций ошибок будет иметь различный вид. При наличии одновременных корреляций и гетероскедастичности в остатках общая матрица ковариаций имеет вид $\Theta = E(\varepsilon \varepsilon') = \Sigma_t \otimes I_M$, где $\Sigma_t = (\sigma_{ijt}) \in R^{N \times N}$ — матрица одновременной ковариации ошибок модели, которая должна быть невырожденной и положительно определенной, в противном случае размерность r_t может быть снижена, так как компоненты будут линейно зависимы, $\sigma_{ijt} = E(\varepsilon_{i,t} \varepsilon_{j,t})$, $\otimes$ — знак произведения Кроне-

кера, а $I_M \in R^{M \times M}$ — единичная матрица, где M — размер выборки данных.

1.2.1. Прогнозирование в рамках модели векторной авторегрессии

Неопределенность прогноза модели заключается в наличии ошибок ε_t модели и отклонении оценок коэффициентов регрессии от их истинных значений. Вариант прогнозирования, при котором ошибка прогноза существует только из-за наличия ошибок ε_t , называется прогнозированием в рамках теоретической модели. Более подробно вопросы прогнозирования с помощью модели векторной авторегрессии рассмотрены в работах [27, 33, 38].

Будем рассматривать прогнозирование в рамках теоретической VAR(k)-моделей. Пусть известны значения r_t временного ряда VAR(k) для $t = 1, \dots, M$, указанную доступную информацию будем обозначать $I_M = (r_M, \dots, r_0, \dots)$. Предположим, что процесс находится в моменте времени M и необходимо построить прогноз на $l \geq 1$ шагов вперед. Момент времени M называется моментом начала прогнозирования, а целое число $l \geq 1$ есть горизонт прогнозирования. Прогноз на l шагов вперед, минимизирующий среднеквадратичное отклонение, есть условное математическое ожидание

$$\hat{r}_M(l) = E(r_{M+l} | I_M),$$

при этом

$$E\{[r_{M+l} - \hat{r}_M(l)]^2 | I_M\} \geq \min_g E\{[r_{M+l} - g]^2 | I_M\},$$

где g — функция, зависящая от I_M .

Рассмотрим построение прогноза в рамках теоретической модели. Для построения портфелей понадобятся прогнозы на несколько шагов вперед, где число шагов будет определяться инвестиционным горизонтом портфеля. Представим построение прогноза на один шаг вперед, прогнозы на большее число шагов строятся рекурсивно. Точечный прогноз для r_{M+1} при информации I_M есть условное математическое ожидание:

$$\begin{aligned} \hat{r}_M(1) &= E(r_{M+1} | I_M) = \\ &= E\left(d + \sum_{i=1}^k \Pi_i r_{M-i+1} + \varepsilon_{M+1} | I_M\right) = d + \sum_{i=1}^k \Pi_i r_{M-i+1}, \end{aligned}$$

так как $E(\varepsilon_{M+1} | I_M) = 0$ и все r_{M-j} в правой части уравнения регрессии входят в предысторию I_M , то ошибка прогноза

$$e_M(1) = r_{M+1} - \hat{r}_M(1) = r_{M+1} - E(r_{M+1} | I_M) = \varepsilon_{M+1}.$$



Условное математическое ожидание ошибки прогноза доходности на l шагов вперед и ее условная матрица ковариации относительно информации I_M равны соответственно:

$$E_M(e_M(l)) = 0,$$

$$\text{Var}_M(e_M(l)) = \text{Var}_M(\varepsilon_{M+l}) = \Sigma_{M+l, M},$$

где $\Sigma_{M+l, M}$ — условная матрица ковариации ошибки прогноза доходности на l шагов вперед, способы построения которой будут описаны в следующем разделе.

1.3. Модели многомерной волатильности

Наличие условной гетероскедастичности в остатках модели свойственно многим финансовым временным рядам [39–41]. Это требует построения специфических моделей условной гетероскедастичности для описания поведения остатков, а в нашем случае — многомерных моделей условной гетероскедастичности. Такие модели также называют моделями многомерной волатильности или ковариационных матриц, они будут использоваться для построения прогнозов матриц ковариаций ошибок.

Построение моделей ковариационных матриц началось с векторной модели исправления ошибок (Vector Error Correction Model, VECM), которая явилась следствием одномерной модели обобщенной условной авторегрессионной гетероскедастичности (GARCH) на векторный случай [42]. В дальнейшем была предложена более компактная BEKK-модель [9]. Модели VECM и BEKK оказались неудобными для практического применения из-за большого числа оцениваемых параметров, неясности интерпретации, а также сложности ограничений, гарантирующих положительную определенность ковариационной матрицы. Поэтому им на смену пришли новые модели, отдельно представляющие динамику корреляций и волатильности, в том числе модель постоянных условных корреляций (Constant Conditional Correlation, CCC) [43] и модель динамических условных корреляций (Dynamic Conditional Correlation, DCC) [44, 45]. Данные модели, а также их модификации [46] пользуются в последнее время определенной популярностью среди исследователей портфельной теории [10, 11, 47]. Приведем их краткое описание, более подробное описание представлено в работах [31, 43]. В данной работе в рамках эмпирического исследования для описания поведения условных матриц ковариаций ошибок прогнозов доходностей использовались диагональная BEKK(1, 1)-модель, CCC(1, 1)- и DCC(1, 1)-модели.

Предположим, что вектор ошибок модели VAR имеет вид

$$\varepsilon_t = \Sigma_{t, t-1}^{1/2} z_t,$$

где $\Sigma_{t, t-1} \in \mathbb{R}^{N \times N}$ — положительно определенная условная матрица ковариаций, $z_t \in \mathbb{R}^{N \times 1}$ — независимые одинаково распределенные случайные векторы, $E(z_t) = 0$ и $\text{Var}(z_t) = I$, где I — единичная матрица. В силу разложения Холецкого, матрица $\Sigma_{t, t-1}$ представима как

$$V(\varepsilon_t | I_{t-1}) = \Sigma_{t, t-1}^{1/2} V(z_t) (\Sigma_{t, t-1}^{1/2})' = \Sigma_{t, t-1}.$$

Диагональная BEKK(p, q)-модель имеет следующее представление условной матрицы ковариаций:

$$\begin{aligned} \Sigma_{t, t-1} = & CC' + \sum_{j=1}^p A_j' \varepsilon_{t-j} \varepsilon_{t-j}' A_j + \\ & + \sum_{j=1}^q B_j' \Sigma_{t-j-1, t-j-2} B_j, \end{aligned}$$

где A_j и B_j — диагональные матрицы, C — нижняя треугольная матрица.

Для моделей типа CCC(p, q) или DCC(p, q), учитывающих условную корреляцию ошибок, общим является следующее представление ковариационных матриц:

$$\Sigma_{t, t-1} = D_{t-1} \mathfrak{R}_{t-1} D_{t-1},$$

где $\mathfrak{R}_t = (\rho_{ijt}) \in \mathbb{R}^{N \times N}$ — матрица условных корреляций, $D_t = \text{diag}(\sigma_{11t}, \dots, \sigma_{Nnt})$ — диагональная матрица, элементами которой являются условные стандартные ошибки модели. Для оценки волатильности σ_{it} используются одномерные GARCH(p, q)-модели:

$$\begin{aligned} \sigma_{it, t-1}^2 = & (D(\varepsilon_t | I_{t-1})) = E(\varepsilon_t^2 | I_{t-1}) = \\ = & \text{const} + \sum_{i=1}^p \gamma_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^q \beta_j \sigma_{t-j-1, t-j-2}^2. \end{aligned}$$

Простейшее предположение относительно корреляционной матрицы ошибок $\mathfrak{R}_t$ заключается в предположении о постоянстве корреляций во времени, что нашло свое отражение в модели многомерной условной гетероскедастичности с постоянной условной корреляционной матрицей (CCC). Корреляционная матрица такой модели представима как $\mathfrak{R}_t = \mathfrak{R} = (\rho_{ij})$.

Корреляционная матрица оценивается следующим образом:

$$\hat{\mathfrak{R}}_t = (\hat{\rho}_{ij}), \quad \hat{\rho}_{ij} = \frac{\hat{Z}_{ij}}{\sqrt{\hat{Z}_{ii}\hat{Z}_{jj}}}, \quad \hat{Z} = \hat{Z}_{ij}^2 = \frac{1}{M-1} \sum_{t=1}^M z_t z_t',$$

$$z_{it} = \frac{\varepsilon_{it}}{\sigma_{it}^2}, \quad i = 1, \dots, N, \quad t = 1, \dots, M,$$

где M — размер выборочной совокупности для оценки модели. Компоненты случайного вектора z_t представляют собой стандартизированные остатки.

Естественным обобщением ССС-модели, допускающим изменение условных корреляций во времени, служит модель динамических условных корреляций — DCC-модель [48]. Для обеспечения особой формы корреляционной матрицы (симметричности, единиц на главной диагонали и меньших по модулю недиагональных элементов) $\mathfrak{R}_t$ она представляется в виде

$$\mathfrak{R}_t = (\text{diag}(Q_t))^{-1/2} Q_t (\text{diag}(Q_t))^{-1/2},$$

где Q_t — положительно определенная симметрическая матрица, эволюционирующая в соответствии с многомерной GARCH(p, q)-моделью и описывающая динамику корреляций в виде:

$$Q_t = \left(1 - \sum_{n=1}^p \theta_{1n} - \sum_{m=1}^p \theta_{2m} \right) Q +$$

$$+ \sum_{n=1}^p \theta_{1n} z_{t-n} z_{t-n}' + \sum_{m=1}^p \theta_{2m} Q_{t-m},$$

Q — безусловная корреляционная матрица случайных векторов z_t .

Для обеспечения положительной определенности матриц $\mathfrak{R}_t$ и, следовательно, $\Sigma_{t,t-1}$ параметры θ_{1n} и θ_{2m} должны быть положительными и

$$\sum_{n=1}^p \theta_{1n} + \sum_{m=1}^p \theta_{2m} < 1.$$

1.3.1. Построение прогнозов условных матриц ковариаций

Так как для построения многошаговых портфелей потребуются прогнозы условных матриц ковариаций ошибок доходностей активов, то здесь будут приведены способы построения прогнозов диагональной BEKK(1,1)-модели, ССС(1,1)- и DCC(1,1)-моделей.

Рассмотрим диагональную BEKK(1,1)-модель

$$\Sigma_{t+1,t} = CC' + A'\varepsilon_t\varepsilon_t'A + B'\Sigma_{t,t-1}B,$$

$$\varepsilon_t = \Sigma_{t,t-1}^{1/2} z_t, \quad z_t \approx \text{iid}(0, I).$$

Таким образом, BEKK-модель генерирует прогноз волатильности на следующий момент времени, что предполагает $E(\Sigma_{t+1}|I_t) = \Sigma_{t+1,t}$ для всех t . Получить прогноз $E(\Sigma_{t+k}|I_t) = \Sigma_{t+k,t}$ на k шагов вперед, т. е. на момент времени $t+k$, можно рекурсивно, последовательно находя значение волатильности для $t+2$, $t+3$ шагов и т. д. Общий вид прогноза волатильности на $(t+k)$ -й момент времени будет выглядеть следующим образом:

$$\Sigma_{t+k,t} = \sum_{i=0}^{k-2} (A^2 + B^2)^i CC' + (A^2 + B^2)^{k-1} \Sigma_{t+1,t}.$$

Прогнозирование условных матриц ковариаций для ССС-моделей заключается в построении прогнозов диагональных матриц D_t , а для DCC-моделей, помимо прогноза указанной матрицы, также строятся прогнозы корреляционной матрицы $\mathfrak{R}_t$ (см. работу [49]).

Пусть для оценки волатильности σ_t используются одномерные GARCH(1,1)-модели:

$$\sigma_{t+1,t}^2 = c + \gamma \varepsilon_t^2 + \beta \sigma_{t,t-1}^2.$$

Таким образом, GARCH-модель сама генерирует прогноз волатильности на следующий момент времени, что предполагает $E(\sigma_{t+1}^2 | I_t) = \sigma_{t+1,t}^2$ для всех t . Получить прогноз $E(\sigma_{t+k}^2 | I_t) = \sigma_{t+k,t}^2$ на k шагов вперед, т. е. на момент времени $t+k$, можно рекурсивно, последовательно находя значение волатильности для $t+2$, $t+3$ шагов и т. д. Общий вид прогноза волатильности на $(t+k)$ -й момент времени

$$\sigma_{t+k,t}^2 = \sum_{i=0}^{k-2} c(\gamma + \beta)^i + (\gamma + \beta)^{k-1} \sigma_{t+1,t}^2.$$

Рассмотрим построение прогноза условной матрицы корреляций $\mathfrak{R}_t$ для DCC-модели. Структура условной корреляционной матрицы подчиняется GARCH(1,1)-процессу:

$$Q_{t+1} = (1 - \alpha - \beta) \bar{Q} + \alpha z_t z_t' + \beta Q_t.$$

По предположению безусловная корреляционная матрица $\mathfrak{R} \approx Q$ и $E(\mathfrak{R}_{t+i} | I_t) \approx E(Q_{t+i} | I_t)$ для $i = 1, \dots, k$, подобно подходу, примененному для построения $\sigma_{t+1|t}^2$, может быть построена условная



матрица корреляций $E(\mathfrak{R}_{t+k}|I_t)$. Принимая во внимание, что $E(z_{t+k-1}z'_{t+k-1}|I_t) = E(\mathfrak{R}_{t+k-1}|I_t)$, прогноз матрицы корреляций на k шагов вперед

$$\begin{aligned}\mathfrak{R}_{t+k,t} &= E(R_{t+k}|I_t) = \\ &= \sum_{i=0}^{k-2} (1-\alpha-\beta)\bar{\mathfrak{R}}(\alpha+\beta)^i + (\alpha+\beta)^{k-1}\mathfrak{R}_{t+1}.\end{aligned}$$

2. ПОСТАНОВКА МНОГОШАГОВОЙ ЗАДАЧИ УПРАВЛЕНИЯ ИНВЕСТИЦИОННЫМ ПОРТФЕЛЕМ

Для построения портфеля Марковиц [1] предложил использовать математическое ожидание доходности портфеля и его дисперсию. В случае, когда доходности активов — стационарные случайные величины, в соответствии с его подходом информация о возможном процессе ценообразования доходностей активов не используется. В работе [13] рассматривалась одношаговая задача управления инвестиционными портфелями при условии, что инвестору известна информация о модели ценообразования доходностей активов. В настоящей работе будет рассмотрен случай управления многошаговыми инвестиционными портфелями.

Предположим, что в момент времени $t_0 = M$ инвестор обладает информацией I_M . Для удобства будем обозначать начальный момент времени $t = 0$ как t_0 , а соответствующую информацию I_{t_0} , помня, что $I_{t_0} = I_M$. Как было сказано ранее, задача управляющего заключается в определении стратегии распределения средств портфеля на начало каждого момента времени $t \in \{t_0, t_1, \dots, T-1\}$ в течение инвестиционного горизонта T . В начале каждого из T периодов инвестор должен будет перераспределять средства портфеля среди его активов в соответствии со стратегией, выработанной в начальный момент времени t_0 . Таким образом, будущие характеристики портфеля рассчитываются на основе информации, доступной в начальный момент времени t_0 .

Эволюция случайных доходностей портфеля описывается уравнением:

$$R_{t+1} = R_t + \omega'_t r_{t+1}, \quad t = 0, \dots, T-1.$$

В зависимости от экономической постановки задачи на веса активов портфеля могут накладываться различные ограничения. В данном исследовании возможны отрицательные веса активов портфеля, т. е. подразумевается, что инвестор может осуществлять беспроцентные займы в целях покупки активов и брать активы в займы у брокеров. Введем условие нормировки весов активов порт-

феля, которое должно выполняться на начало каждого момента времени t :

$$\omega'_t e - 1 = 0, \quad t = 0, \dots, T-1,$$

где $e = (1, \dots, 1) \in \mathbb{R}^{N \times 1}$ — единичный вектор, т. е. все средства портфеля должны быть распределены среди его активов.

Доходность портфеля за t шагов относительно информации I_{t_0} есть условное математическое ожидание $E_{t_0}(R_t) = R_{t,t_0}$.

Ожидаемая целевая доходность портфеля на терминальном шаге T :

$$\begin{aligned}E(R_T|I_{t_0}) &= E_{t_0}(R_T) = E_{t_0}\left(\sum_{t=t_0}^{T-1} \omega'_t r_{t+1}\right) = \\ &= R_{t,t_0} = \sum_{t=t_0}^{T-1} \omega'_t \hat{r}_{t+1,t_0} = S.\end{aligned}$$

Условная дисперсия доходности портфеля или условная дисперсия ошибки доходности портфеля:

$$\begin{aligned}D(R_T|I_{t_0}) &= D_{t_0}(R_T) = E_{t_0}[(R_T - E_{t_0}(R_T))^2] = \\ &= E_{t_0}\left[\left(\sum_{t=t_0}^{T-1} \omega'_t r_{t+1} + E_{t_0}\left(\sum_{t=t_0}^{T-1} \omega'_t r_{t+1}\right)\right)^2\right] = \\ &= E_{t_0}\left[\left(\sum_{t=t_0}^{T-1} \omega'_t r_{t+1} - \sum_{t=t_0}^{T-1} \omega'_t E_{t_0}(r_{t+1})\right)^2\right] = \\ &= E_{t_0}\left[\left(\sum_{t=t_0}^{T-1} \omega'_t (r_{t+1} - \hat{r}_{t+1,t_0})\right)^2\right].\end{aligned}$$

Так как e_t — вектор ошибок прогноза доходности активов, причем

$$\begin{aligned}E_{t_0}(e_t) &= E(e_{t,t_0}) = 0, \quad \text{Var}_{t_0}(e_t) = E_{t_0}(e_t e'_t) = \\ &= E(e_{t,t_0} e'_{t,t_0}) = \Sigma_{t,t_0},\end{aligned}$$

то условная дисперсия доходности портфеля

$$\begin{aligned}D_{t_0}(R_T) &= E_{t_0}\left[\left(\sum_{t=t_0}^{T-1} \omega'_t e_{t+1,t_0}\right)^2\right] = \\ &= \sum_{t=t_0}^{T-1} \omega'_t \Sigma_{t,t_0} \omega_t + \sum_{t=0}^{T-1} \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{T-1} \text{cov}(\omega'_t e_{t+1,t_0}, \omega'_j e_{j+1,t_0}).\end{aligned}$$

В зависимости от того, существует автокорреляция ошибок доходностей портфеля или нет, могут рассматриваться два различных варианта постановки задачи. В случае наличия автокорреляции ошибок доходностей портфеля постановка задачи с ограничением на общую дисперсию может принести большую ожидаемую доходность при определенном уровне риска, однако представление дис-

персии в данном виде не будет аддитивной функцией, а, следовательно, методы динамического программирования не смогут быть применены напрямую для определения оптимальной стратегии управления портфелем.

2.1. Формулировка проблемы управления многошаговым инвестиционным портфелем

Классическая задача Марковица для многошагового случая, так же как и для однопериодной задачи, может заключаться или в максимизации ожидаемой доходности портфеля в терминальный момент времени $E_{t_0}(R_T)$ при ограничении на условную дисперсию доходности портфеля $D_{t_0}(R_T)$ или в минимизации дисперсии терминальной доходности портфеля при ограничении на ожидаемую доходность портфеля. В данном исследовании будет рассмотрена задача второго типа.

Будет рассмотрена задача управления портфелем при отсутствии автокорреляции ошибок доходностей портфеля, это позволит задать целевую функцию в виде аддитивного функционала и в результате определить оптимальное управление портфелем в явном виде.

Таким образом, описанная ранее задача может быть поставлена как задача динамического программирования, в которой требуется найти последовательность $\Omega^* = \{\omega_0^*, \dots, \omega_{T-1}^*\}$:

целевая функция, подлежащая минимизации,

$$J = D_{t_0}(R_T) = E_{t_0} \left(\sum_{t=0}^{T-1} \omega'_t (e_{t+1}, e'_{t+1}) \omega_t \right) \rightarrow \min_{\{\omega_0, \dots, \omega_{T-1}\}}; \quad (1)$$

значение функции от фазовых координат на терминальном шаге

$$E_{t_0}(R_T) = S; \quad (2)$$

ограничение в виде равенства на управляющие переменные

$$\omega'_t e - 1 = 0, \quad \forall t \in \overline{0, T-1}; \quad (3)$$

уравнение динамики

$$R_{t+1} = R_t + \omega'_t r_{t+1}; \quad (4)$$

начальное состояние

$$R_0 = 0. \quad (5)$$

Поскольку доходности и волатильности активов подчиняются определенным процессам ценообразования, то задача (1)–(5) относится к типу задач оптимизации дискретных многошаговых систем в условиях неопределенности при заданных значениях функций от фазовых координат на тер-

минальном шаге и ограничений в виде равенств на управляющие переменные (см. работу [50]).

2.2. Решение задачи

Так как условные матрицы ковариаций ошибок $E_{t_0}(e_{t+1}, e'_{t+1}) = \Sigma_{t, t_0}$ невырожденные и положительно определенные, то целевая функция (1) выпуклая.

Сформируем расширенную целевую функцию, прибавив к функции (1) ограничения (2)–(4) с некоторыми неопределенными множителями γ , λ_t и β_t :

$$\bar{J} = E_{t_0} \left[\gamma(R_T - S) + \sum_{t=0}^{T-1} ((\omega'_t (e_{t+1}, e'_{t+1}) \omega_t) + \lambda_t(\omega'_t e - 1) + \beta_t(R_t + \omega'_t r_{t+1})) \right]. \quad (6)$$

Для удобства введем скалярную последовательность

$$H_{t_0}^t = E_{t_0} (\omega'_t (e_{t+1}, e'_{t+1}) \omega_t) + \lambda_t(\omega'_t e - 1) + \beta_t(R_t + \omega'_t r_{t+1}) = \omega'_t \Sigma_{t+1, t_0} \omega_t + \lambda_t(\omega'_t e - 1) + \beta_t(R_{t, t_0} + \omega'_t \hat{r}_{t+1, t_0}) \quad (7)$$

и скалярную функцию

$$\Phi_{t_0}^T = E_{t_0} (\gamma(R_T - S)) = \gamma(R_{T, t_0} - M).$$

С учетом выражений (6) и (7), а также изменив индексы суммирования в функции (6), получим:

$$\bar{J} = \Phi_{t_0}^T - \beta_{T-1} R_{T, t_0} + \sum_{t=1}^{T-1} (H_{t_0}^t - \beta_{t-1} R_{t, t_0}) + H_{t_0}^t. \quad (8)$$

Чтобы функция (8) была стационарной, необходимо, чтобы ее дифференциальное приращение для всех допустимых $d\omega_t$ равнялось нулю. Рассмотрим дифференциальное приращение, соответствующее дифференциальным приращениям последовательности значений координат вектора управления ω_t :

$$d\bar{J} = \left[\frac{\partial \Phi_{t_0}^T}{\partial R_{T, t_0}} - \beta_{T-1} \right] dR_{T, t_0} + \sum_{t=1}^{T-1} \left\{ \left[\frac{\partial H_{t_0}^t}{\partial R_{t, t_0}} - \beta_{t-1} \right] dR_{t, t_0} + \frac{\partial H_{t_0}^t}{\partial \omega_t} d\omega_t \right\} + \frac{\partial H_{t_0}^0}{\partial R_{t_0}} dR_{t_0} + \frac{\partial H_{t_0}^0}{\partial \omega_0} d\omega_0. \quad (9)$$



Коэффициенты в формуле (9) при dR_{t,t_0} ($t = t_0, \dots, T-1$) обратятся в нуль, если выбрать векторную последовательность множителей β_t из условия:

$$\beta_{t-1} - \frac{\partial H_{t_0}^t}{\partial R_{t,t_0}} = 0 \text{ или } \beta_{t-1} = \frac{\partial(\omega_t' \Sigma_{t+1,t_0} \omega_t)}{\partial R_{t,t_0}} + \frac{\partial(\lambda_t(\omega_t' e - 1))}{\partial R_{t,t_0}} + \beta_t \frac{\partial(R_{t,t_0} + \omega_t' \hat{r}_{t+1,t_0})}{\partial R_{t,t_0}} = \beta_t (10)$$

при граничных условиях

$$\beta_{T-1} = \frac{\partial \Phi_{t_0}^T}{\partial R_{T,t_0}} \text{ или } \beta_{T-1} = \gamma \frac{\partial(R_{T,t_0} - M)}{\partial R_{T,t_0}} = \gamma. \quad (11)$$

При таком выборе множителя β_t дифференциальное приращение (9) примет вид:

$$d\bar{J} = \sum_{t=0}^{T-1} \frac{\partial H_{t_0}^t}{\partial \omega_t} d\omega_t.$$

Таким образом, дифференциальное приращение (7) по соответствующим дифференциальным приращениям $d\omega_t$ есть градиент функции (8) по ω_t при условии (5) и выполнении ограничений (4). В этом случае для того, чтобы функция (8) принимала стационарное (минимальное) значение, необходимо выполнение условий:

$$\frac{\partial H_{t_0}^t}{\partial \omega_t} = \frac{\partial(\omega_t' \Sigma_{t+1,t_0} \omega_t)}{\partial \omega_t} + \lambda_t \frac{\partial(\omega_t' e - 1)}{\partial \omega_t} + \beta_t \frac{\partial(R_{t,t_0} + \omega_t' \hat{r}_{t+1,t_0})}{\partial \omega_t} = 0, \quad t = 0, \dots, T-1,$$

или

$$2\Sigma_{t+1,t_0} \omega_t + \lambda_t e + \beta_t \hat{r}_{t+1,t_0} = 0, \quad t = 0, \dots, T-1, \quad (12)$$

и чтобы второй дифференциал последовательности (7) был положительным при всех бесконечно малых значениях $d\omega_t$:

$$\begin{aligned} d^2 H_{t_0}^t &= [dR_t', d\omega_t'] \times \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 H_{t_0}^t}{\partial R_t \partial R_t} & \frac{\partial^2 H_{t_0}^t}{\partial R_t \partial \omega_t} \\ \frac{\partial^2 H_{t_0}^t}{\partial \omega_t \partial R_t} & \frac{\partial^2 H_{t_0}^t}{\partial \omega_t \partial \omega_t} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} dR_t \\ d\omega_t \end{bmatrix} = \\ &= [dR_t', d\omega_t'] \times \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \Sigma_{t+1,t_0} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} dR_t \\ d\omega_t \end{bmatrix} = \\ &= d\omega_t' \Sigma_{t+1,t_0} \omega_t. \end{aligned} \quad (13)$$

Так как условные матрицы ковариаций ошибок Σ_{t+1,t_0} невырожденные и положительно определенные, то дифференциал (13) положителен.

Было показано, что соотношения (2)–(5), (7), (10)–(13) выражают необходимые и достаточные условия оптимальности [51].

Чтобы определить последовательность векторов Ω^* , которая приводит к стационарному значению целевой функции (1), необходимо решить двухточечную краевую задачу, описываемую уравнениями (2)–(5), (10)–(12) при $t \in \{t_0, t_1, \dots, T-1\}$.

Поскольку условные ковариационные матрицы ошибок доходностей Σ_{t,t_0} является невырожденными и положительно определенными, то и их обратные матрицы Σ_{t,t_0}^{-1} также будут невырожденными и положительно определенными, что позволяет задать в R^N скалярное произведение и норму:

$$(a, b)_{\Sigma_{t,t_0}} = a' \Sigma_{t,t_0}^{-1} b, \quad \|a\|_{\Sigma_{t,t_0}} = \sqrt{(a, a)_{\Sigma_{t,t_0}}}.$$

Решив двухточечную краевую задачу, найдем оптимальное управление ω_t^* для каждого шага t , которое представляет собой оптимальное распределение средств портфеля на каждом шаге в течение инвестиционного горизонта T :

$$\begin{aligned} \omega_t^* &= \left(\frac{S - A_T}{B_T} \right) \Sigma_{t+1,t_0}^{-1} \hat{r}_{t+1,t_0} + \\ &+ \left(c_t - \frac{S - A_T}{B_T} a_t \right) \Sigma_{t+1,t_0}^{-1} e, \end{aligned} \quad (14)$$

$$\text{где } a_t = \frac{(\hat{r}_{t+1,t_0}, e)_{\Sigma_{t+1,t_0}^{-1}}}{\|e\|_{\Sigma_{t+1,t_0}^{-1}}^2},$$

$$A_t = \sum_{j=0}^{t-1} (a_j) = \sum_{j=0}^{t-1} \left(\frac{(\hat{r}_{j+1,t_0}, e)_{\Sigma_{j+1,t_0}^{-1}}}{\|e\|_{\Sigma_{j+1,t_0}^{-1}}^2} \right),$$

$$b_t = \frac{\|\hat{r}_{t+1,t_0}\|_{\Sigma_{t+1,t_0}^{-1}}^2 \|e\|_{\Sigma_{t+1,t_0}^{-1}}^2 - (\hat{r}_{t+1,t_0}, e)_{\Sigma_{t+1,t_0}^{-1}}^2}{\|e\|_{\Sigma_{t+1,t_0}^{-1}}^2},$$

$$\begin{aligned} B_t &= \sum_{j=0}^{t-1} (b_j) = \\ &= \sum_{j=0}^{t-1} \left(\frac{\|\hat{r}_{j+1,t_0}\|_{\Sigma_{j+1,t_0}^{-1}}^2 \|e\|_{\Sigma_{j+1,t_0}^{-1}}^2 - (\hat{r}_{j+1,t_0}, e)_{\Sigma_{j+1,t_0}^{-1}}^2}{\|e\|_{\Sigma_{j+1,t_0}^{-1}}^2} \right), \end{aligned}$$

$$c_t = \frac{1}{\|e\|_{\Sigma_{t+1}, t_0}^{-1}}, \quad C_t = \sum_{j=0}^t (c_j) = \sum_{j=0}^t \left(\frac{1}{\|e\|_{\Sigma_{j+1}, t_0}^{-1}} \right).$$

Оптимальные портфели (14) будем называть «квазиоптимальными», так как их структура зависит от информации I_{t_0} .

Реальная динамика доходности квазиоптимального портфеля:

$$\begin{aligned} R_n^* &= \sum_{t=0}^{n-1} \omega_t^{*'} r_{t+1} = \\ &= \frac{S-A_T}{B_T} \sum_{t=0}^{n-1} \left\{ \left[(\hat{r}_{t+1, t_0}, r_{t+1})_{\Sigma_{t+1}, t_0}^{-1} \|e\|_{\Sigma_{t+1}, t_0}^2 - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - (\hat{r}_{t+1, t_0}, e)_{\Sigma_{t+1}, t_0}^{-1} (r_{t+1}, e)_{\Sigma_{t+1}, t_0}^{-1} \right] / \|e\|_{\Sigma_{t+1}, t_0}^2 \right\} + \\ &\quad + \sum_{t=0}^{n-1} \frac{(r_{t+1}, e)_{\Sigma_{t+1}, t_0}^{-1}}{\|e\|_{\Sigma_{t+1}, t_0}^2}. \end{aligned}$$

Ожидаемая доходность на шаге t :

$$\begin{aligned} E_{t_0}(\omega_t^{*'} r_{t+1}) &= \\ &= \frac{S-A_T}{B_T} \frac{\left\| \hat{r}_{t+1, t_0} \right\|_{\Sigma_{t+1}, t_0}^2 \|e\|_{\Sigma_{t+1}, t_0}^2 - (\hat{r}_{t+1, t_0}, e)_{\Sigma_{t+1}, t_0}^{-1}}{\|e\|_{\Sigma_{t+1}, t_0}^2} + \\ &\quad + \frac{(\hat{r}_{t+1, t_0}, e)_{\Sigma_{t+1}, t_0}^{-1}}{\|e\|_{\Sigma_{t+1}, t_0}^2} = \frac{S-A_T}{B_T} b_t + a_t. \end{aligned}$$

Ожидаемая доходность за n шагов:

$$E_{t_0}(R_n^*) = E_{t_0} \left(\sum_{t=0}^{n-1} \omega_t^{*'} r_{t+1} \right) = \frac{S-A_T}{B_T} B_n + A_n.$$

Условная дисперсия ошибки доходности на шаге t :

$$\begin{aligned} \omega_t^{*'} \Sigma_{t+1, t_0} \omega_t^* &= \left(\frac{S-A_T}{B_T} \right)^2 \times \\ &\times \frac{\left\| \hat{r}_{t+1, t_0} \right\|_{\Sigma_{t+1}, t_0}^2 \|e\|_{\Sigma_{t+1}, t_0}^2 - (\hat{r}_{t+1, t_0}, e)_{\Sigma_{t+1}, t_0}^{-1}}{\|e\|_{\Sigma_{t+1}, t_0}^2} + \\ &+ \frac{1}{\|e\|_{\Sigma_{t+1}, t_0}^2} = \left(\frac{S-A_T}{B_T} \right)^2 b_t + c_t, \end{aligned}$$

а условная дисперсия ошибки доходности за T шагов — оптимальное значение функции (1):

$$\begin{aligned} J^* &= \sum_{t=0}^{T-1} (\omega_t^{*'} \Sigma_{t+1, t_0} \omega_t^*) = \sum_{t=0}^{T-1} \left(\left(\frac{S-A_T}{B_T} \right)^2 b_t + c_t \right) = \\ &= \frac{(S-A_T)^2}{B_T} + C_T. \end{aligned}$$

3. ЭМПИРИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ

Для эмпирического исследования использовались исторические ежедневные значения трех международных индексов акций MSCI (MSCI Index, далее — индексы): MSCI North America Standard Index (индекс «North America»), MSCI Europe Standard Index (индекс «Europe») и MSCI Pacific Standard Index (индекс «Pacific»). Индексы рассчитываются компанией «Morgan Stanley Capital International» и представляют собой взвешенные индексы свободно обращающихся акций развитых стран. Индексы рассчитываются с поправкой на рыночную капитализацию акций. Все используемые индексы номинированы в долларах США и представляют собой индексы полной доходности, реинвестирующие сумму средств по дивидендам, оставшихся после уплаты налогов.

Индекс «North America» состоит из фондовых индексов стран Северной Америки и включает в себя акции Канады и США. Индекс «Europe» состоит из фондовых индексов акций 16-ти развитых стран Европы: Австрии, Бельгии, Великобритании, Германии, Греции, Дании, Италии, Ирландии, Испании, Нидерландов, Норвегии, Португалии, Финляндии, Франции, Швеции и Швейцарии. Индекс «Pacific» состоит из пяти фондовых индексов стран, отнесенных к Тихоокеанскому региону: Австралия, Гонконг, Новая Зеландия, Сингапур и Япония. Таким образом, можно сказать, что рассматриваемые индексы включают в себя все фондовые индексы развитых стран за исключением фондового индекса Израиля.

Таблица 1

Описательные статистики индексов
(за период с 1 июля 2008 г. по 14 сентября 2012 г.)

Выборочные характеристики	Индекс «North America»	Индекс «Europe»	Индекс «Pacific»
Среднее	0,0001	−0,0002	−0,0002
Стандартное отклонение	0,017	0,0199	0,0153
Асимметрия	−0,373	−0,0043	−0,3494
Экспесс	9,796	7,171	8,7679
Минимум	−0,095	−0,1018	−0,0918
Максимум	0,1043	0,107	0,0983



Таблица 2

Описательные статистики индексов (за разные периоды)

Выборочные характеристики	Индекс «North America»	Индекс «Europe»	Индекс «Pacific»
<i>С 1 июля 2008 г. по 16 сентября 2011 г.</i>			
Среднее	0,0	-0,0005	-0,0003
Стандартное отклонение	0,0184	0,0206	0,0164
Асимметрия	-0,3613	0,0025	-0,3578
Эксцесс	9,1737	7,4697	8,4583
Минимум	-0,095	-0,1018	-0,0918
Максимум	0,1063	0,107	0,0983
<i>С 17 сентября 2011 г. по 14 сентября 2012 г.</i>			
Среднее	0,0007	0,0006	0,0002
Стандартное отклонение	0,0115	0,0173	0,011
Асимметрия	-0,0855	-0,0207	-0,028
Эксцесс	4,4525	4,2716	3,532
Минимум	-0,037	-0,0643	-0,0328
Максимум	0,0433	0,0577	0,035

Данные были приведены к ежедневным логарифмированным доходностям за период с 1 июля 2008 г. по 14 сентября 2012 г. и составили 1099 наблюдений. Для построения моделей использовалось сдвигающееся окно в 839 значений, начинающееся с периода с 1 июля 2008 г. по 16 сентября 2011 г. Данные за период с 17 сентября 2011 г. по 14 сентября 2012 г. (260 значений) использовались для проведения вневыборочного анализа, а именно для построения прогнозов доходностей и матриц условных ковариаций ошибок прогнозов индексов, которые использовались для формирования квазиоптимальных портфелей и сравнения их характеристик. Описательные статистики рядов приведены в табл. 1 и 2.

Данные обоих периодов отличаются между собой, при этом им не свойственна нормальность, о чем свидетельствует наличие асимметрии и островершинность распределений. Так, для выборочных данных характерны большая волатильность и асимметричность, что определялось сначала острой фазой кризисных явлений в мировой экономике, а потом — быстрым посткризисным восстановлением 2009 г. Изменение асимметрии индекса «Europe», которая в первый период была положительной, а во второй — отрицательной, можно объяснить смещением внимания с проблем мировой экономики на долговые проблемы сначала европейского банковского сектора, а после — на долговые проблемы стран Европейского союза. Наличие единичных корней в исследуемых индексах было отвергнуто на 1 %-м уровне значимости.

Количество лагов k для VAR-модели было выбрано согласно показателям информационных критериев (Шварца, Акаике и Хана — Куина), значения которых представлены в табл. 3. На основе указанных критериев была выбрана VAR(3)-модель, оценки коэффициентов которой приведены в табл. 4.

Таблица 3

Значения информационных критериев моделей

Модель	Критерий Акаике (AIC)	Критерий Шварца (SC)	Критерий Хана—Куина (HQ)
VAR(0)	-16,24	-16,22	-16,23
VAR(1)	-17,07	-17,00	-17,05
VAR(2)	-17,15	-17,03	-17,10
VAR(3)	-17,17*	-17,05*	-17,11*
VAR(4)	-17,15	-16,93	-17,07

Примечание. Звездочкой (*) отмечены наименьшие значения соответствующих критериев.

Таблица 4

Оценки параметров трехмерной VAR(3)-модели

Индекс	const	Π_1			Π_2			Π_3		
North America	0,0 (0,0)	-0,168*** (0,051)	0,083* (0,051)	-0,031 (0,057)	-0,038 (0,064)	-0,055 (0,057)	-0,029 (0,059)	0,079* (0,058)	-0,021 (0,051)	0,045 (0,046)
Europe	0,0 (0,0)	0,59*** (0,053)	-0,364*** (0,054)	-0,006 (0,06)	0,208*** (0,067)	-0,18*** (0,06)	-0,041 (0,049)	0,12** (0,06)	-0,097** (0,054)	0,041 (0,049)
Pacific	0,0 (0,0)	0,491*** (0,034)	0,185*** (0,034)	-0,4*** (0,038)	0,173*** (0,043)	0,094*** (0,038)	-0,21*** (0,039)	0,105*** (0,039)	0,034 (0,034)	-0,047* (0,031)

Примечание. В таблице представлены оценки параметров VAR(3)-модели и их стандартные ошибки (в скобках). Π_1 , Π_2 и Π_3 — матрицы параметров векторной авторегрессии, const — константы. Звездочками (*, ** и ***) указана значимость коэффициентов на 10, 5 и 1 %-м уровне соответственно.

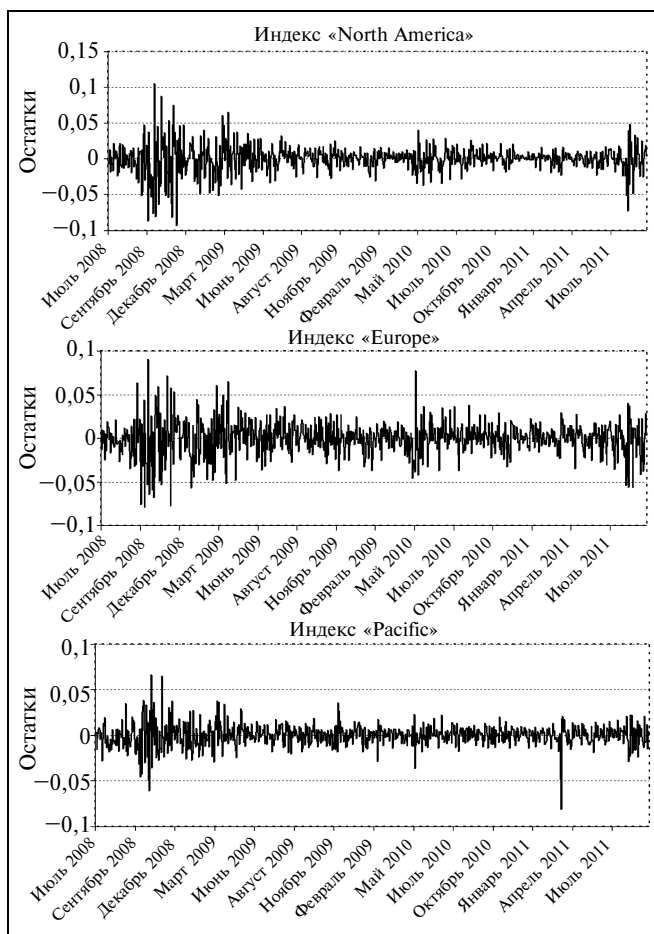


Рис. 1. Остатки VAR(3)-модели

Остатки VAR(3)-модели представлены на рис. 1, а их описательные статистики в табл. 5. В остатках отсутствуют единичные корни и автокорреляция (тест множителей Лагранжа), тест Вайта отклонил гипотезу об отсутствии гетероскедастичности в остатках. Для квадратов остатков условие отсутствия автокорреляции не выполняется. Остатки образуют определенного вида кластеры с высокой волатильностью, что может свидетельствовать о наличии условной гетероскедастичности в остатках модели и потребует построения моделей многомерной волатильности для описания поведения остатков.

Эмпирическое исследование в данной статье посвящено оцениванию практической эффективности предложенных теоретических подходов по формированию и управлению многошаговыми инвестиционными портфелями международных инвесторов. Формирование квазиоптимальных портфелей осуществлялось на основе прогнозов доходностей VAR(3)-модели и прогнозов матриц ковариаций ошибок прогнозов доходностей, ко-

торые строились с помощью таких многомерных GARCH-моделей, как диагональная BEKK(1,1) модель, CCC(1,1)- и DCC(1,1)-моделей. Оценки коэффициентов BEKK(1,1)-модели представлены в табл. 6, CCC(1,1)- и DCC(1,1)-моделей в табл. 7.

Инвестиционные портфели строились с инвестиционным горизонтом T от 1 до 10 шагов вперед, после окончания каждого инвестиционного горизонта T переформировывались в соответствии с новыми данными. Для каждого инвестиционного горизонта целевые доходности рассчитывались таким образом, чтобы их можно было сравнивать между собой:

$$\text{Целевая доходность}(T, S) = S \times T,$$

где S — доходности, лежащие в интервале от 0 до 0,05 с шагом 0,0005.

На основе прогнозов доходностей и прогнозов матриц ковариаций ошибок доходностей строились квазиоптимальные портфели. Для построения прогнозов доходностей использовалась VAR(3)-модель, а для прогнозов матриц ковариаций ошибок — диагональная BEKK(1,1)-, CCC(1,1)- и DCC(1,1)-модели, оцененные на основе остатков VAR(3)-модели. Так как модели и соответствующие им портфели отличаются между собой только типами моделей, описывающих условную матрицу ковариаций ошибок прогнозов, то для упрощения записи будем использовать для их наименования только названия моделей многомерной волатильности. Так, DCC-портфелями будем называть портфели, формирование которых основывалось на прогнозах VAR(3)-DCC(1,1)-модели. Исследование проводилось в рамках внешаблонного моделирования, при котором после каждого инвестиционного горизонта модели и прогнозы оценивались и строились заново с учетом вновь появившейся информации.

Структура квазиоптимального портфеля и его прогнозных и реализованных характеристик оп-

Таблица 5

Описательные статистики остатков VAR(3)-модели

Выборочные характеристики	Индекс «North America»	Индекс «Europe»	Индекс «Pacific»
Среднее	0,0	0,0	0,0
Стандартное отклонение	0,0181	0,0191	0,0121
Асимметрия	-0,4033	-0,1857	-0,2471
Эксцесс	8,6599	5,5916	8,9206
Минимум	-0,0930	-0,0785	-0,0810
Максимум	0,1049	0,0913	0,0665



ределялась следующим образом. Фиксировались длина инвестиционного горизонта и целевая доходность, которую портфель должен достичь в конце инвестиционного горизонта. Для каждого дня из инвестиционного горизонта строился прогноз доходностей активов и условная матрица ковариации ошибок доходностей. Используя указанные входные данные, определялась оптимальная структура квазиоптимального портфеля для каждого из дней в течение инвестиционного горизонта. На основе ежедневных прогнозных значений доходностей активов и ежедневных структур квазиоптимальных портфелей рассчитывались прогноз значения доходностей портфелей, а на основе реальных значений доходностей активов — ошибки прогнозов доходностей портфелей.

Так как качество портфеля зависит от его способности соответствовать целям оптимизационной задачи (1)—(5), то показателями, отражающими качество, будут характеристики ошибок доходностей портфелей. Таким образом, одним из самых важных аспектов при оценке и сравнении квазиоптимальных портфелей является исследование характеристик ошибок прогнозов их доходностей.

На рис. 2 приведены выборочные характеристики ежедневных ошибок доходностей квазиоптимальных БЕКК-, CCC- и DCC-портфелей, а также характеристики классических средне-дисперсионных портфелей, построенных на основе выборочных средних и матриц ковариаций доходностей.

Ошибки прогнозов доходностей сравнивались путем отдельного сравнения средних и дисперсий

Таблица 6

Оценки параметров диагональных БЕКК-моделей

Модель	C			A			B		
БЕКК(1, 1)	0,002*** (0,0003)			0,275*** (0,0236)			0,957*** (0,0072)		
	0,002*** (0,0004)	0,002*** (0,0003)			0,23*** (0,0218)			0,963*** (0,0065)	
	0,001** (0,0004)	0,001** (0,0005)	0,002*** (0,0004)			0,335*** (0,0354)			0,913*** (0,0188)

Примечание. В таблице представлены оценки параметров БЕКК(1, 1)-моделей для остатков VAR(3)-модели и их стандартные ошибки (в скобках). Параметры записаны в виде матриц: C — матрица констант. Звездочками (*, **, ***) указана значимость коэффициентов на 10, 5 и 1 %-м уровне соответственно.

Таблица 7

Оценки параметров CCC(1,1)- и DCC(1,1)-моделей

Модель	const	γ	β	θ_1	θ_2	R		
CCC(1, 1)	0,0 (0,0)	0,1025*** (0,0138)	0,885*** (0,0149)			1,0	0,735*** (0,0157)	0,266*** (0,0334)
	0,0 (0,0)	0,0807*** (0,0136)	0,899*** (0,0163)	—	—	0,735*** (0,0157)	1,0	0,411*** (0,03)
	0,0 (0,0)	0,149*** (0,0197)	0,792*** (0,0283)			0,266*** (0,0334)	0,411*** (0,03)	1,0
DCC(1, 1)	0,0 (0,0)	0,1025*** (0,0138)	0,885*** (0,0149)					
	0,0 (0,0)	0,0807*** (0,0136)	0,899*** (0,0163)	0,933*** (0,0)	0,064*** (0,0)			
	0,0 (0,0)	0,149*** (0,0197)	0,792*** (0,0283)					

Примечание. В таблице представлены оценки параметров CCC(1,1)- и DCC(1,1)-моделей для остатков VAR(3)-модели и их стандартные ошибки (в скобках). Параметры записаны для GARCH(1,1)-моделей, где const — константы, γ и β — ARCH- и GARCH-параметры в одномерных GARCH-моделях соответственно, при этом одномерные GARCH-модели строились для каждого ряда в отдельности, θ_1 и θ_2 — параметры DCC-модели, R — матрица корреляций. Звездочками (*, **, ***) указана значимость на 10, 5 и 1 %-м уровне соответственно.

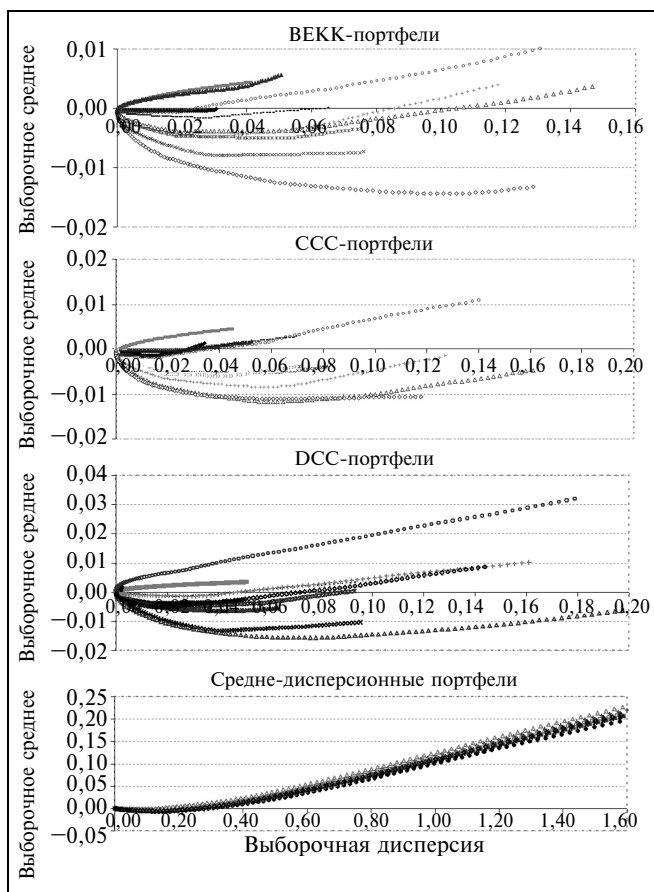


Рис. 2. Характеристики ошибок доходностей средне-дисперсионных портфелей, соответствующие различным инвестиционным горизонтам:

● — 1 шаг, ■ — 2 шага, ▲ — 3 шага, — — 4 шага, × — 5 шагов, × — 6 шагов, + — 7 шагов, ○ — 8 шагов, Δ — 9 шагов, ◇ — 10 шагов

ошибок различных портфелей, построенных для одних и тех же целевых доходностей. Гипотеза о равенстве нулю выборочного среднего ошибок прогнозов доходностей портфеля проверялась с помощью статистики Стьюдента. Дисперсии сравнивались на основе тестовой статистики, имеющей распределение Фишера—Снедекса.

На основе проверки указанных гипотез и данных (см. рис. 2) можно заключить следующее:

— выборочные средние ошибок доходностей BEKK-, CCC- и DCC-портфелей на 10 %-м уровне значимости не отличаются от нуля для всех целевых доходностей всех инвестиционных горизонтов;

— выборочные средние ошибок доходностей средне-дисперсионных портфелей на 10 %-м уровне значимости отличаются от нуля для целевых доходностей от $0,0285T$, т. е. немногим меньшим половины из диапазона целевых доходностей, для всех инвестиционных горизонтов T ;

— гипотеза о равенстве выборочных дисперсий ошибок средне-дисперсионных портфелей и

BEKK-, CCC- и DCC-портфелей соответственно была отвергнута на 10 %-м уровне значимости для всех целевых доходностей всех инвестиционных горизонтов.

Таким образом, выборочные средние и дисперсии ошибок доходностей средне-дисперсионных портфелей более, чем в 8 раз превосходят показатели квазиоптимальных портфелей.

Выборочные дисперсии ошибок доходностей квазиоптимальных портфелей увеличиваются с ростом инвестиционного горизонта.

Проведенный предварительный анализ показал, что средне-дисперсионные портфели существенным образом и в худшую сторону отличаются от квазиоптимальных портфелей. В связи с тем, что характеристики средне-дисперсионных портфелей несопоставимы с характеристиками квазиоптимальных портфелей, то в дальнейшем анализе мы сосредоточимся на характеристиках BEKK-, CCC- и DCC-портфелей.

Выборочные дисперсии квазиоптимальных портфелей достаточно близки друг к другу, однако истинную оценку их близости можно получить, проверив гипотезу о равенстве выборочных дисперсий. В табл. 8 для каждого инвестиционного горизонта приведены обобщенные характеристики квазиоптимальных портфелей, которые целесообразно использовать для каждой целевой доходности. Портфели, обладающие наименьшей выборочной дисперсией ошибки прогноза доходности или портфели, дисперсии которых на 10 %-м уровне значимости не отличаются от портфелей с наименьшей дисперсией ошибки, будем называть целесообразными портфелями. Так как характеристики квазиоптимальных портфелей всецело зависят от моделей, на прогнозах которых они построены, то следует также говорить о целесообразных моделях, на основе которых они построены.

Результаты, представленные в табл. 8, можно суммировать следующим образом.

- DCC-портфели для всех инвестиционных горизонтов и для всех целевых доходностей показывают наибольшие выборочные дисперсии ошибок прогнозов доходностей по сравнению с BEKK- и CCC- портфелями.
- BEKK-портфель в среднем в 84 % случаев (целевых доходностей для всех инвестиционных горизонтов) показывает наименьшую выборочную дисперсию ошибок прогнозов доходностей, CCC-портфели — 16 %. Исключение составляет инвестиционный горизонт в 10 шагов, где BEKK-портфель покрывает 21 % диапазона целевых доходностей, а CCC-портфель — 79 %.
- В среднем в 76 % случаев (целевых доходностей для всех инвестиционных горизонтов) выборочных дисперсий ошибок прогнозов доходностей BEKK- и CCC-портфелей не различаются



Таблица 8

Характеристики квазиоптимальных портфелей

Инвестиционный горизонт T	Портфель с наименьшей дисперсией ошибки прогноза доходности		Портфель с наибольшей дисперсией ошибки прогноза доходности		Портфели с наименьшими выборочными дисперсиями ошибок доходностей или которые незначимо отличаются от них	Портфели с наибольшими выборочными дисперсиями ошибок доходностей или незначимо отличающимися от них	Портфель, который целесообразно использовать для заданной целевой доходностью		
	Модель портфеля	Доля диапазона, %	Модель портфеля	Доля диапазона, %			Модель портфеля	Диапазон целевых доходностей / T	Доля диапазона, покрываемая моделью, %
1	BEKK	100	DCC	100	—	—	BEKK/CCC BEKK BEKK/CCC	0,0000 0,0035 0,0395	7 72 21
2	BEKK CCC	94 6	DCC	100	BEKK, CCC	DCC	BEKK/CCC BEKK	0,0000 0,0140	28 72
3	BEKK CCC	83 17	DCC	100	BEKK, CCC	DCC	BEKK/CCC	0,0000	100
4	BEKK CCC	96 4	DCC	100	BEKK, CCC	DCC	BEKK/CCC	0,0000	100
5	BEKK CCC	68 32	DCC	100	BEKK, CCC	DCC	BEKK/CCC	0,0000	100
6	BEKK CCC	30 70	DCC	100	BEKK, CCC	DCC	BEKK/CCC	0,0000	100
7	BEKK	93	DCC	100	BEKK	—	BEKK/CCC BEKK	0,0000 0,0050	10 27
	CCC	7					BEKK/CCC BEKK BEKK/CCC	0,0185 0,0230 0,0360 0,0500	9 26 28
8	BEKK CCC	95 5	DCC	100	BEKK, CCC	DCC	BEKK/CCC	0,0000	100
9	BEKK	97	DCC	100	BEKK	—	BEKK/CCC	0,0000	11
	CCC	3					BEKK BEKK/CCC	0,0055 0,0140 0,0500	17 72
10	BEKK CCC	21 79	DCC	100	CCC	—	BEKK/CCC CCC	0,0000 0,0275 0,0500	55 45
ИТОГО	BEKK CCC	84* 16*	DCC	100	—	—	BEKK BEKK/CCC	—	24* 76*
Примечание. Звездочкой (*) указаны значения, рассчитанные без учета характеристик портфелей с инвестиционным горизонтом в 10 шагов.									

значимым образом, в остальных — 24 % случаев целесообразно использовать исключительно БЕКК-портфели. Исключение составляет портфель с инвестиционным горизонтом в 10 шагов, где БЕКК- и ССС-портфели для 55 % целевых доходностей из диапазона целевых доходностей обладают дисперсиями ошибок, которые значимым образом не отличаются между собой, в остальных 45 % целевых доходностей целесообразно использовать только ССС-портфели.

Свойства портфелей с инвестиционным горизонтом, кратным пяти дням, требуют дополнительного исследования, так как они связаны с цикличностью указанного периода и особенностями, присущими каждому дню недели, что немаловажно при определении дня недели начала инвестиционного горизонта.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Постановлена и решена многошаговая задача управления инвестиционными портфелями при условии, что управляющему известна информация о модели ценообразования доходностей активов и их ошибок. Предложенный подход был реализован для формирования многошаговых портфелей, что не исключает варианта построения портфеля с инвестиционным горизонтом в 1 шаг, для которого структура и характеристики будут идентичны характеристикам, полученным в одношаговой оптимизационной задаче [13]. Определены условные характеристики доходностей и их ошибки для квазиоптимальных портфелей.

Эмпирическое исследование выявило целесообразность применения подхода построения многошаговых инвестиционных портфелей, учитывающего информацию моделей ценообразования, так как характеристики средне-дисперсионных портфелей значимым образом уступают квазиоптимальным, в том числе ошибки доходностей средне-дисперсионных портфелей значимо отличаются от нуля, а их дисперсии значительно превосходят дисперсии квазиоптимальных портфелей.

Одновременно с этим эмпирическое исследование подтвердило результаты исследований [6, 7, 13], выявивших значимость влияния типа модели многомерной волатильности на дисперсию оптимальных портфелей. Так, портфель, построенный с помощью наиболее современной DCC-модели, обладает наибольшей дисперсией ошибок по сравнению с БЕКК- и ССС-портфелями. Возможно, целесообразность использования этой модели будет раскрываться при конструировании портфелей с более длинным инвестиционным горизонтом. Портфель, построенный на основе прогнозов БЕКК-модели, допустимо использовать практически в 100 % случаев, так как он обладает наимень-

шей дисперсией ошибки прогноза доходности портфеля или дисперсией, которая значимо не отличается от портфеля с наименьшей дисперсией. Таким образом, исследование еще раз подтвердило важность анализа влияния моделей ценообразования волатильности ошибок доходностей активов на характеристики квазиоптимальных портфелей.

Полученные результаты позволят портфельным управляющим снизить риски при управлении инвестиционными портфелями путем их формирования с учетом информации моделей ценообразования доходностей и ошибок доходностей активов.

Дальнейшее развитие темы формирования инвестиционных портфелей с учетом информации моделей ценообразования может быть связано, прежде всего, с исследованием влияния размерности модели ценообразования и ошибок оценок ее коэффициентов на характеристики оптимальных портфелей, а для многошаговых задач управления инвестиционными портфелями

В заключение отметим, что формирование теории, позволяющей априорно определять характеристики инвестиционных портфелей только на основе характеристик моделей ценообразования и волатильности, представляет собой не только весьма интересную теоретическую задачу, но и принесет значительную практическую пользу, так как избавит исследователей и портфельных управляющих от необходимости проведения внутривыборочного моделирования характеристик портфелей в целях определения «наилучшей» портфельной стратегии.

ЛИТЕРАТУРА

1. Markowitz H. M. Portfolio selection // The Journal of Finance. — 1959. — N 7 (1). — P. 77–91.
2. Markowitz H. M. Portfolio selection: Efficient diversification of investments. — N.-Jersey: John Wiley and Sons, 1959. — 344 p.
3. Fama E., French K. The cross-section of expected stock returns // Journal of Finance. — 1992. — N 47. — P. 427–465.
4. Chopra V.K. Mean-variance revisited: Near optimal portfolios and sensitivity to input variations // Journal of Investing. — 1993. — N 2 (1). — P. 51–59.
5. Chopra V.K., Ziemba W.T. The effect of errors in means, variances, and covariances on optimal portfolio choice // Journal of Portfolio Management. — 1993. — N 19 (2). — P. 6–11.
6. Pojarliev M. and Polasek W. Portfolio construction by volatility forecasts: Does the covariance structure matter? // INVESCO Asset Management and Institute of Statistics and Econometrics University of Basel. — URL: http://www.istfin.eco.usi.ch/seminar-papers-polasekport_diag_rev2.pdf (дата обращения: 15.06.2012).
7. Pojarliev M. and Polasek W. Applying multivariate time series forecasts for active portfolio management / University of Basel. — URL: http://www.hathersage.com/fx/readings/multivariate_time_series.pdf (дата обращения 25.06.2012).
8. Pagan A.R., Schwert G.W. Alternative models for conditional stock volatility // Journal of Econometrics. — 1990. — N 50. — P. 267–290.



9. Engle R.F., Kroner K.F. Multivariate simultaneous generalized ARCH // *Econometric Theory*. — 1995. — N 11 (1). — P. 122–150.
10. Yilmaz T. Improving portfolio optimization by DCC and DECO GARCH: Evidence from Istanbul Stock Exchange / MPRA Paper 27314, University Library of Munich, Germany. — URL: http://mpa.ub.uni-muenchen.de/27314/1/DCC_Portfolio_Optimization_tolgahan_yilmaz.pdf (дата обращения 10.07.2012).
11. Михаленок Ю.М. и Малюгин В.И. Оптимизация портфеля финансовых активов на основе многомерных моделей волатильности. // *Материалы Международного конгресса по информатике: информационные системы и технологии* / БГУ. — Минск, 2011. — URL: <http://www.fpmi.bsu.by/ImgFpmi/Cache/15483.pdf> (дата обращения 21.09.2012).
12. Хабров В.В. Построение оптимальных валютных портфелей на основе прогнозов линейных моделей // *Вопросы статистики*. — 2011. — N 11. — С. 44–52.
13. Хабров В.В. Оптимизация управления инвестиционным портфелем на основе моделей векторных авторегрессий и моделей многомерной волатильности // *Прикладная эконометрика*. — 2012. — N 4. — С. 35–63.
14. Samuelson P.A. Lifetime portfolio selection by dynamic stochastic programming // *The Review of Economics and Statistics*. — 1969. — N 51 (3). — P. 239–246.
15. Merton R.C. Lifetime portfolio selection under uncertainty: The continuous-time case // *The Review of Economics and Statistics*. — 1969. — N 51 (3). — P. 247–257.
16. Merton R.C. Optimum Consumption and Portfolio Rules in a Continuous-Time Model // *Journal of Economic Theory*. — 1971. — N 3. — P. 373–413.
17. Chen A.H., Jen Y.C. and Zions S. The Optimal Portfolio Revision Policy // *Journal of Business*. — 1971. — N 44. — P. 51–61.
18. Fama E.F. Multi-period consumption — investment decisions // *American Economic Review*. — 1970. — N 60. — P. 163–174.
19. Elton E.J. and Gruber M.J. The multi-period consumption investment problem and single period analysis // *Oxford Economics Papers*. — Oxford, 1974. — P. 289–301.
20. Elton E.J. and Gruber M.J. On the optimality of some multi-period portfolio selection criteria // *Journal of Business*. — June 1974. — P. 231–243.
21. Pliska S.R. Introduction to Mathematical Finance. — Malden: Basil Blackwell, 1997. — 262 p.
22. Frauendorfer K. The stochastic programming extension of the Markowitz approach // *Intern. Journal on Neuraland Mas-Parallel Computing and Information Systems*. — 1995. — N 5. — P. 449–460.
23. Frauendorfer K., Siede H. Time Series Models in Intertemporal Portfolio Optimization / St. Gallen, CH: Institute for Operations Research, University of St. Gallen. — URL: <http://www.alexandria.unisg.ch/publications/7242> (дата обращения 10.05.2012).
24. Frauendorfer K., Siede H. Portfolio Selection Using Multistage Stochastic Programming // *Central European Journal of Operations Research*. — 2000. — N 7. — P. 277–289.
25. Siede H. Multi-Period Portfolio Optimization — with Emphasis on an Mean-Variance Criterion: diss. PhD. — Bamberg: University of St. Gallen, 2000. — 195 p.
26. Li D. and Ng W.-L. Optimal dynamic portfolio selection: Multi-period mean-variance formulation // *Mathematical Finance*. — 2000. — N 10. — P. 387–406.
27. Tsay R.S. Analysis of financial time series. — N.-Jersey: John Wiley and Sons, 2002. — 714 p.
28. Sims C.A. Macroeconomics and reality // *Econometrica*. — 1980. — N 48. — P. 1–48.
29. Litterman R.B. Techniques of forecasting using vector autoregressions // Working Papers 115, Federal Reserve Bank of Minneapolis. — URL: <http://www.minneapolisfed.org/research/wp/wp115.pdf> (дата обращения 23.04.2012).
30. Litterman R.B. Forecasting with Bayesian vector autoregressions — Five years of experience // *Journal of Business and Economic Statistics*. — 1986. — N 4 (1). — P. 25–38.
31. Lutkepohl H. New introduction to multiple time series analysis. — Berlin: Springer, 2005. — 764 p.
32. *Handbook of Econometrics* / R. F. Engle and eds. — Amsterdam: Elsevier, 1994. — 3160 p.
33. *Эконометрия* / Сулов В.И. и др. — Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2005. — 744 с.
34. Hamilton J.D. Time series analysis. — N.-Jersey: Princeton University Press, 1994. — 820 p.
35. Campbell J.Y., Lo A.W., MacKinlay A.C. The econometrics of financial markets. — N.-Jersey: Princeton University Press, 1997. — 314 p.
36. Johnson R.A. and Wichern D.W. Applied multivariate statistical analysis. — N.-Jersey: Prentice Hall, 2007. — 396 p.
37. Greene W.H. Econometric analysis. — N.-Jersey: Prentice Hall, 1999. — 1052 p.
38. Zivot E. and Wang J. Modeling financial time series with S-Plus. — N.-Y.: Springer, 2002. — 1016 p.
39. Fama E.F., Bliss R.R. The information in long-maturity forward rates // *American Economic Review*. — 1987. — N 77 (4). — P. 680–692.
40. Mandelbrot B. and Hudson R.L. The Mis(behavior) of Markets: A Fractal View of Risk, Ruin, and Reward. — N.-Y.: Basic Books, 2004. — 328 p.
41. Marcellino M. Instability and nonlinearity in the EMU // CEPR Working Paper. — N 3312. — URL: <http://www.eui.eu/Personal/Marcellino/documents/paper24.pdf> (дата обращения 03.05.2012).
42. Bollerslev T., Engle R. F., Wooldridge J.M. Capital asset pricing model with time-varying covariances // *Journal of Political Economy*. — 1988. — N 96. — P. 116–131.
43. Bollerslev T. Modeling the coherence in short-run nominal exchange rates: A multivariate generalized ARCH model // *Review of Economics and Statistics*. — 1990. — N 72. — P. 498–505.
44. Tse Y.K., Tsui A.K.C. A multivariate GARCH model with time-varying correlations // *Journal of Business and Economic Statistics*. — 2002. — N 20. — P. 351–362.
45. Engle R.F. Dynamic conditional correlation — A simple class of multivariate GARCH models // *Ibid.* — 2001. — N 20. — P. 339–350.
46. Cappiello L., Engle R. F., Sheppard K. Asymmetric dynamics in the correlations of global equity and bond returns // *Journal of Financial Econometrics*. — 2006. — N 4. — P. 537–572.
47. Колоколов А. Хеджирование фьючерсами: многомерные GARCH с динамическими условными корреляциями // *Квантиль*. — 2011. — N 9. — С. 61–75.
48. Engle R.F. and Sheppard K. Theoretical and empirical properties of Dynamic Conditional Correlation // *MVGARCH*. Working paper N 2001-15, University of California, San Diego. — URL: <http://pages.stern.nyu.edu/~rengle/Dcc-Sheppard.pdf> (дата обращения 23.08.2012).
49. Peters T. Forecasting the covariance matrix with the DCC GARCH model / Stockholm University. — URL: <http://www2.math.su.se/matstat/reports/serieb/2008/rep4/report.pdf> (дата обращения 14.08.2012).
50. Брайсон А., Хо Ю-Ши. Прикладная теория оптимального управления. — М.: Мир, 1972. — 272 с.
51. Ли Э.Б., Маркус Л. Основы теории оптимального управления. — М.: Наука, 1973.

Статья представлена к публикации членом редколлегии В.Н. Афанасьевым.

Владимир Викторович Хабров — аспирант, Национальный исследовательский университет — Высшая школа экономики, г. Москва; Московский государственный институт электроники и математики, ✉ vaude@yandex.ru.