УДК 519.688 + 517.962.27

РЕКУРРЕНТНЫЕ СООТНОШЕНИЯ АДДИТИВНЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ ДЛЯ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

В.С. Кедрин, О.В. Кузьмин

Рассмотрены способы получения рекуррентных соотношений аддитивных последовательностей периодических функций. Предложен перспективный алгоритм формирования рекуррентных соотношений для восстановления аддитивных последовательностей периодических функций, а также последовательностей более сложного класса периодических функций.

Ключевые слова: временной ряд, периодическая функция, рекуррентное соотношение, Z-преобразование.

ВВЕДЕНИЕ

В рамках теории информации разработка способов передачи сигналов (временных отсчетов) от источника к приемнику представляют собой актуальную задачу. Один из главных аспектов передачи заключается в восстановлении (воспроизведении) исходного цифрового сигнала на приемнике. Очевидно, что для точной передачи дискретного сигнала, описываемого неизвестной периодической функцией на определенном интервале времени, необходимо знание значений этой функции во всех точках данного интервала. Однако существуют определенные классы функций, восстановление которых требует знания значений функции лишь на конечном множестве точек. Примером служат периодические функции, представимые линейной комбинацией m тригонометрических биномов:

$$f(t) = \sum_{k=1}^{m} (A_k\cos(\omega_k t) + B_k\sin(\omega_k t)), \quad m < \infty, \qquad (1)$$

где их амплитуды A_k и B_k — вещественные числа; ω_k — частота, определяемая на интервале $-T \le t \le T$ как $\omega_k = 2k\pi/2T$.

Известно, что данный класс функций имеет важное значение в различных областях науки и техники, например, теории связи, оптике, акустике, теории автоматического регулирования и др.

Как показано в работе [1], для восстановления функции $f(t)$ на интервале $-T \le t \le T$ достаточно знания ее значений в любых $2m$ точках $t_1, t_2, ..., t_{2m}$ указанного интервала. Восстановление функции $f(t)$ в этом случае основано на решении системы уравнений относительно неизвестных значений коэффициентов A_k и B_k, которая получается, если подставить в исходную формулу (1) известные значения $f(t_1), f(t_2), ..., f(t_{2m})$.

Однако при программной реализации такой способ восстановления довольно трудоемок. Например, вычислительная сложность решения системы уравнений методом Гаусса оценивается как $O(n^3)$, где n — порядок системы.

В цифровых системах задача восстановления может рассматриваться более узко: формирование последующих временных отсчетов функции $f(t)$ на основании серии имеющихся отсчетов через промежутки Δt. При такой постановке задачи актуально нахождение эффективной (с позиций вычислительной сложности) методики восстановления последовательностей, образованных классом периодических функций вида (1), с помощью подхода, основанного на рекуррентных соотношениях вычисления их элементов. В работах [2, 3] сформулировано понятие ранга последовательности.

Бесконечная последовательность является последовательностью конечного ранга d, если его члены удовлетворяют линейной рекуррентной формуле размерности d, т. е. найдутся такие коэффициенты $a_1, ..., a_j, ..., a_d$, что для любого натурального i, $i > d$, справедливо соотношение:

$$f_i = \sum_{k=1}^{d} a_k f_{i-k}, \quad a_d \neq 0.$$

Таким образом, можно привести следующую математическую постановку сформулированной задачи восстановления временных отсчетов функции (1) на основании серии имеющихся отсчетов через равные дискретные промежутки Δt.

Пусть задана последовательность $\{y_i\}_{i=1}^{n}$, элементы которой описываются выражением:

$$y_i = \sum_{k=1}^{m} (A_k \cos(\alpha_k i) + B_k \sin(\alpha_k i)), \quad m < \infty, \tag{2}$$

где $\alpha_k = \omega_k \Delta t$, а $\Delta t = 2T/n$ — параметр дискретизации.

Необходимо определить совокупность коэффициентов $\{a_k\}_{k=1}^{d}$ рекуррентного соотношения вида

$$y_n = \sum_{k=1}^{d} a_k y_{n-k}, \quad a_d \neq 0 \tag{3}$$

для восстановления i-го, $i > d$, элемента последовательности $\{y_i\}_{i=1}^{n}$, имея d предшествующих элементов $\{y_{i-d}, ..., y_{i-1}\}$.

Решение данной задачи позволяет не только снять проблему восстановления исходного цифрового сигнала для указанного класса функций (1), но и провести аналогию между численным (сингулярным) рангом r, определенным для рассматриваемого вида функций (1) в работах [2—5], и порядком d рекуррентного соотношения (3).

1. РЕКУРРЕНТНЫЕ СООТНОШЕНИЯ АДДИТИВНЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ ДЛЯ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

В работе [2] сформулировано

Предложение. *Рекуррентное соотношение вида* (3) *для последовательности* $\{y_i\}_{i=1}^{\infty}$, *элементы которой порождаются функцией, состоящей из тригонометрического бинома*

$$y_i = A\cos(\alpha i) + B\sin(\alpha i) \tag{4}$$

может быть получено на основании решения уравнения

$$y_n = Ky_{n-1} - y_{n-2},$$

где K — в общем случае произвольная константа.

Доказательство. Действительно, составим характеристическое уравнение $\lambda^2 - K\lambda + 1 = 0$, $\lambda \neq 0$, которое при $|K| < 2$ имеет два комплексно-сопряженных корня:

$$K/2 \pm i\sqrt{1 - K^2/4}\,. \tag{5}$$

Поскольку $|K| < 2$, то существует α такое, что $K = 2\cos(a)$. В этом случае из соотношения (5) получаем:

$$\lambda_{1,2} = \cos\alpha \pm i\sqrt{1 - 1\cos^2\alpha} = \cos\alpha \pm i\sin\alpha = e^{\pm i\alpha}.$$

Решение исходного разностного уравнения (5) в рассматриваемом частном случае имеет вид

$$y_n = C_1\lambda_1^2 + C_2\lambda_2^2 = C_1e^{in\alpha} + C_2e^{-in\alpha},$$

или

$$y_n = A\cos(\alpha n) + B\sin(\alpha n).$$

Исходя из этого решения для рассматриваемой функции вида (4), рекуррентная формула (3) дает:

$$y_n = 2\cos a y_{n-1} - y_{n-2}. \tag{6}$$

Следовательно, ранг исходной последовательности $d = 2$, при условии $a \neq \pi k$, $k = 1, 2, 3...$ ♦

Следствие. Приведенные рассуждения относительно получения рекуррентного соотношения (6) можно *методом математической индукции* распространить на случаи, когда элементы исходной последовательности $\{y_i\}_{i=0}^{n}$ порождаются функцией (2), содержащей сумму двух и более тригонометрических биномов.

Так, при $m = 2$ имеем соотношение:

$$y_n = A\cos(\alpha_1 n) + B\sin(\alpha_1 n) + A\cos(\alpha_2 n) + \\ + B\sin(\alpha_2 n),$$

для которого частное решение рекуррентного уравнения (3) принимает вид:

$$y_n = C_{11}\lambda_1^2 + C_{12}\lambda_2^2 + C_{21}\lambda_3^2 + C_{22}\lambda_4^2 = \\ = C_{11}e^{in\alpha_1} + C_{12}e^{-in\alpha_1} + C_{21}e^{in\alpha_2} + C_{22}e^{-in\alpha_2}.$$

Из рассмотренных особенностей решения характеристического уравнения для функции вида (4) и формулы Эйлера, корни характеристического уравнения

$$\lambda_{1,2} = \cos\alpha_1 \pm i\cdot\sin\alpha_1 = e^{\pm i\alpha_1},$$

$$\lambda_{3,4} = \cos\alpha_2 \pm i\cdot\sin\alpha_2 = e^{\pm i\alpha_2}.$$

По аналогии с соотношением (5) это возможно, если подобраны такие $K_1 = 2\cos\alpha_1$ и $K_2 = 2\cos\alpha_2$ ($|K_1| < 2$ и $|K_2| < 2$), что исходное характеристическое уравнение для функции вида (2) при $m = 2$ определено четырьмя попарно комплексно-сопряженными корнями:

$$\lambda_{1,2} = K_1/2 \pm i\sqrt{1 - K_1^2/4}\,,$$

$$\lambda_{3,4} = K_2/2 \pm i\sqrt{1 - K_2^2/4}\,.$$

Исходное характеристическое уравнение для функции вида (2) при $m = 2$ можно представить как

$$(\lambda^2 - K_1\lambda + 1)(\lambda^2 - K_2\lambda + 1) = 0, \quad \lambda \neq 0.$$

Следовательно,

$$\lambda^n = (K_1 + K_2)\lambda^{n-1} - (2 + K_1K_2)\lambda^{n-2} + \\ + (K_1 + K_2)\lambda^{n-3} - \lambda^{n-4},$$

что дает характеристическое уравнение, эквивалентное уравнению

$$y_n = (K_1 + K_2)y_{n-1} - (2 + K_1K_2)y_{n-2} + \\ + (K_1 + K_2)y_{n-3} - y_{n-4}.$$

Аналогично при $m = 3$ рекуррентное соотношение примет вид:

$$y_n = (K_1 + K_2 + K_3)y_{n-1} - (3 + K_1K_2 + K_1K_3 + \\ + K_2K_3)y_{n-2} + (2K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_1K_2K_3)y_{n-3} - \\ - (3 + K_1K_2 + K_1K_3 + K_2K_3)y_{n-4} + \\ + (K_1 + K_2 + K_3)y_{n-5} - y_{n-6},$$

где $K_1 = 2\cos\alpha_1$, $K_2 = 2\cos\alpha_2$ и $K_3 = 2\cos\alpha_3$, и т. д.

Отметим, что в общем виде совокупность коэффициентов $\{a_i\}_{i=1}^{d}$ рекуррентного соотношения (3) для элементов последовательности $\{y_i\}_{i=0}^{n}$, образованных функцией вида (2), может быть получена с помощью соотношения

$$\lambda^n\left(1 - \sum_{i=1}^{d} a_i\lambda^{-i}\right) = \lambda^n \prod_{k=1}^{m} (1 - K_k\lambda^{-1} + \lambda^{-2}).$$

Рассматриваемые рекуррентные соотношения можно получить и другим способом, используя Z-преобразование [6, 7].

Действительно, если искомую линейную рекуррентную формулу переписать в виде:

$$y_n = \sum_{j=0}^{J} b_j z_{n-j} + \sum_{i=1}^{d} a_i y_{n-i}, \qquad (7)$$

то нахождение рекуррентной формулы будет заключается в подборе множеств коэффициентов $\{b_j\}_{j=0}^{J}$ и $\{a_i\}_{i=1}^{d}$ и соответствующей дискретной последовательности $\mathbf{x} = \{x_n\}_{n \geq 0}$ такой, чтобы результат давал отсчеты некоторой функции $y_n = f(nT)$, где T — период дискретизации.

В общем случае такая задача может иметь большое число решений и алгоритмы их нахождения плохо поддаются формализации.

Рассмотрев один из частных случаев, когда

$$x_n = \delta_{n,0} = \begin{cases} 1, \text{если } n = 0, \\ 0, \text{если } n \neq 0, \end{cases}$$

на основании соотношения (7) получим равенства:

— для случая $n < J$

$$y_0 = b_0,$$
$$y_1 = b_1 + a_1y_0,$$
$$y_2 = b_2 + a_1y_1 + a_2y_0,$$
$$...;$$

— для случая $n = J$

$$y_n = b_n + a_1y_{n-1} + a_2y_{n-2} + ... + a_ny_0;$$

— для случая $n > J$

$$y_n = \sum_{i=1}^{d} a_i y_{n-i}. \qquad (8)$$

Вернувшись к формуле (7) и осуществив Z-преобразование обеих частей, получим:

$$Y(z) = \sum_{j=0}^{J} b_j z^{-j} \Big/ \left(1 - \sum_{i=1}^{d} a_i z^{-i}\right). \qquad (9)$$

Таким образом, осуществляя Z-преобразование исходной функции в виде (9), можно получить множество коэффициентов $\{a_i\}_{i=1}^{d}$ рекуррентного соотношения (8). Для определения начальных условий в виде коэффициентов $\{b_j\}_{j=0}^{J}$ в случае $n > J$ достаточно выделить только знаменатель дроби в правой части соотношения (9), а в случае же $n \leq J$ необходимо выделить и числитель дроби в правой части соотношения (9).

Рассмотрим Z-преобразование исходной функции вида (2):

$$y_n = \sum_{k=1}^{m} \frac{A_i(z^{-2} - \cos(\alpha_k)z^{-1}) - B_k\sin(\alpha_k)z^{-1}}{1 - 2\cos(\alpha_k)z^{-1} + z^{-2}}. \qquad (10)$$

Для нахождения коэффициентов рекуррентного соотношения (8) формулу (10) необходимо привести к виду (9). Для случая $n > 2m$ фактически нужно выделить только общий знаменатель дроби в правой части соотношения (10). С учетом замены $K_k = 2\cos\alpha_k$ получаем соотношение:

$$1 - \sum_{i=1}^{d} a_i z^{-i} = \prod_{k=1}^{m} (1 - K_k z^{-1} + z^{-2}),$$

с помощью которого можно найти множество коэффициентов $\{a_i\}_{i=1}^{d}$ рекуррентного соотношения (8) для последовательности, образованной исходной функцией вида (2).

Таким образом, найти коэффициенты $\{a_i\}_{i=1}^{d}$ рекуррентного соотношения (3) для функции вида (2) можно различными способами, которые в итоге оказываются эквивалентными.

2. СВОЙСТВА РЕКУРРЕНТНЫХ СООТНОШЕНИЙ ДЛЯ АДДИТИВНЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Лемма. *Порядок d рекуррентного соотношения* (3) *последовательности* $\{y_i\}_{i=0}^{n}$, $n \ge m$, *элементы которой образованы периодической функцией вида* (2), *определяется числом тригонометрических биномов* $G_k = A_k\cos(\alpha_k i) + B_k\sin(\alpha_k i)$, *входящих в исходную функцию и для* $y_i = \sum_{k=1}^{m} G_k$ *он равен* $2m$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Как отмечено в § 1, каждый периодический бином G_k определяется однородным рекуррентным (разностным) уравнением второго порядка вида $y_n = Ky_{n-1} - y_{n-2}$, решение которого дает два комплексно-сопряженных корня $\lambda_{1,2} = K/2 \pm i\sqrt{1 - K^2/4}$. Таким образом, каждый тригонометрический бином имеет порядок $d_k = 2$. Следовательно, поскольку порядок d рекуррентного соотношения (3) аддитивно определяется числом m тригонометрических биномов, включенных в исходную функцию, $y_i = \sum_{k=1}^{m} G_k$, то $d = 2m$. ♦

Утверждение 1. *Для любых конечных значений амплитуд* $\{A_k, B_k\}_{k=0}^{m}$ *функции*

$$y_i = \sum_{k=1}^{m} (A_k\cos(\alpha_k i) + B_k\sin(\alpha_k i)), \quad m < \infty, \qquad (11)$$

множество значений ее частот $\{\alpha_k\}_{k=1}^{m}$ *определяется совокупностью коэффициентов* $\{a_i\}_{i=1}^{d}$ *рекуррентной формулы* (3).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Сформулированное утверждение следует из свойств решения однородного рекуррентного (разностного) уравнения второго порядка. Так, в § 1 было показано, что каждый тригонометрический бином $G_k = A_k\cos(\alpha_k i) + B_k\sin(\alpha_k i)$ определяется парой комплексно-сопряженных корней $\lambda_{k1,2} = K_k/2 \pm i\sqrt{1 - K_k^2/4}$ при условии, что каждый коэффициент K_k определяется равенством

$$K_k = 2\cos\alpha_k. \qquad (12)$$

Поскольку совокупность коэффициентов $\{a_i\}_{i=1}^{d}$ рекуррентной формулы (3) для получения элементов последовательности $\{y_i\}_{i=0}^{n}$, удовлетворяющих равенству (11), определяется только множеством значений $\{K_k\}_{k=1}^{m}$ (см. § 1): $\{a_i\}_{i=1}^{d} = f_2(\{K_k\}_{k=1}^{m})$, то, в силу равенства (12), утверждение 1 справедливо. ♦

Утверждение 2. *Для любых конечных значений фаз* $\{\varphi_k, \phi_k\}_{k=1}^{m}$ *функции*

$$y_i = \sum_{k=1}^{m} (A_k\cos(\alpha_k i + \varphi_k) + B_k\sin(\alpha_k i + \phi_k)), \quad m < \infty, \qquad (13)$$

множество значений ее частот $\{\alpha_k\}_{k=1}^{m}$ *определяется совокупностью коэффициентов* $\{a_i\}_{i=1}^{d}$ *рекуррентной формулы* (3).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Используя известные тригонометрические тождества:

$$\cos(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta,$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta,$$

исходную функцию (13) представим в виде:

$$y_i = \sum_{k=1}^{m} ((A_k\sin\phi_k + B_k\cos\varphi_k)\cos(\alpha_k i) + (A_k\cos\phi_k - B_k\sin\varphi_k)\sin(\alpha_k i)), \quad m < \infty.$$

Делая замену $(A_k\sin\phi_k + B_k\cos\varphi_k) = A_k^0$ и $(A_k\cos\phi_k - B_k\sin\varphi_k) = B_k^0$, получим

$$y_i = \sum_{k=1}^{m} (A_k^0\cos(\alpha_k i) + B_k^0\sin(\alpha_k i)), \quad m < \infty. \qquad (14)$$

Поскольку для любых конечных значений амплитуд $\{A_k^0, B_k^0\}_{k=1}^{m}$ функции (14) множество значений ее частот $\{\alpha_k\}_{k=1}^{m}$ определяется совокупностью коэффициентов $\{a_i\}_{i=1}^{d}$ рекуррентной формулы (3) (см. утверждение 1), а значения амплитуд $\{A_k^0, B_k^0\}_{k=1}^{m}$, как показано ранее, определяются соответствующими значениями фаз $\{\varphi_k, \phi_k\}_{k=1}^{m}$:

$$\{A_k^0, B_k^0\}_{k=0}^{m} = f(\{\varphi_k, \phi_k\}_{k=0}^{m}),$$

то утверждение 2 справедливо. ♦

Следствие. Из утверждений 1 и 2 следует, что для любых возможных значений амплитуд $\{A_k, B_k\}_{k=0}^{m}$ и фаз $\{\varphi_k, \phi_k\}_{k=0}^{m}$ функции (13) множество значений ее частот $\{\alpha_k\}_{k=0}^{m}$ определяется совокупностью коэффициентов $\{a_i\}_{i=1}^{d}$ рекуррентной формулы (3), позволяющих получить элементы последовательности $\{y_i\}_{i=0}^{n}$.

Утверждение 3. *Элементы последовательности* $\{y_i\}_{i=0}^{n}$, *образованные периодической функцией* (2), *определяемые рекуррентным соотношением* (3) *порядка d, могут быть определены подобным соотношением более высокого порядка* $d + d_0$, $d_0 > 0$, *при условии, что исходное множество частот* $\{\alpha_i\}_{i=1}^{m+l}$, *необходимых для определения коэффициентов рекуррентного соотношения более высокого порядка* $d + d_0$, *включает в себя множество частот* $\{\alpha_i\}_{i=1}^{m}$, *необходимых для определения коэффициентов рекуррентного соотношения порядка d:*

$$\{\alpha_i\}_{i=1}^{m} \subset \{\alpha'_j\}_{j=1}^{m+l}.$$

Доказательство. Согласно лемме, порядок рекуррентного соотношения (3) последовательности $\{y_i\}_{i=0}^{n}$, $n \geq m$, элементы которой образованы периодической функцией вида (2), равен $d = 2m$.

По аналогии, в случае, если элементы последовательности $\{y'_i\}_{i=0}^{n}$ описываются функцией

$$y'_i = \sum_{k=1}^{m} (A_k\cos(\alpha_k i) + B_i\sin(\alpha_k i)) +$$

$$+ \sum_{j=1}^{l} (A_j^0 \cos(\alpha_j^0 n) + B_j^0 \sin(\alpha_j^0 n)), \quad m < \infty,\ l < \infty, \quad (15)$$

то порядок рекуррентного соотношения (3) равен $d + d^0 = 2(m + l)$.

Согласно утверждению 2 совокупность коэффициентов $\{a_i\}_{i=1}^{d}$ и $\{a_i^0\}_{i=1}^{d^0}$ рекуррентной формулы (3) для получения элементов последовательности $\{y'_i\}_{i=0}^{n}$, удовлетворяющих функции (15), определяется только множеством значений частот $\{\alpha'_k\}_{k=1}^{m+l}$ тригонометрических биномов G'_k для любых конечных значений их амплитуд $\{A_k, B_k\}_{k=1}^{m}$ и $\{A_j^0, B_j^0\}_{j=1}^{l}$.

Следовательно, поскольку для амплитуд $\{A_k, B_k\}_{k=1}^{m}$ и $\{A_j^0, B_j^0\}_{j=1}^{l}$ функции (15) допускается существование такого варианта, что $\{A_j^0\}_{j=1}^{l} = \{0\}_{j=1}^{l}$ и $\{B_j^0\}_{j=1}^{l} = \{0\}_{j=1}^{l}$, при котором функции (2) и (15) будут определять одну и ту же последовательность $\{y_i\}_{i=0}^{n} = \{y'_i\}_{i=0}^{n}$, то соответствующие этим функциям рекуррентные формулы вида (3) оказываются эквивалентными. ♦

3. АЛГОРИТМ ФОРМИРОВАНИЯ РЕКУРРЕНТНЫХ СООТНОШЕНИЙ ДЛЯ АДДИТИВНЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Рекуррентные соотношения для функции вида (2) в общем случае можно получить с помощью итерационного дискретного алгоритма. Так, если рекуррентное соотношение (3) представить в виде

$$0 = a_0 + \sum_{k=0}^{d} a_{k+1} f_{i-k},\ a_d \neq 0,$$

то можно построить таблицу расчета множества его коэффициентов $\{a_i\}_{i=0}^{d}$ для получения элементов последовательности, соответствующих функции вида (2), при различных m через множество $\{K_k\}_{k=1}^{m}$, где $K_k = 2\cos\alpha_k$.

В представленной таблице можно видеть зависимость коэффициентов столбца с индексом j от коэффициентов столбца с индексом $j - 1$, которая описывается формулой

$$a_i(j) = a_{i-2}(j-1) - K_i a_{i-1}(j-1) + a_i(j-1),$$
$$i > 1,$$

при начальных условиях $a_0(j) = 0$ и $a_1(j) = 1$.

Основываясь на приведенном соотношении, авторы разработали полиномиальный итерацион-

Коэффициенты рекуррентных соотношений для аддитивных последовательностей периодических функций

a	m			
	1	2	3	...
a_0	0	0	0	...
a_1	1	1	1	...
a_2	$-K_1$	$-(K_1 + K_2)$	$-(K_1 + K_2 + K_3)$	...
a_3	1	$(2 + K_1K_2)$	$(3 + K_1K_2 + K_1K_3 + K_2K_3)$	...
a_4	0	$-(K_1 + K_2)$	$-(2K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_1K_2K_3)$	...
a_5	0	1	$(3 + K_1K_2 + K_1K_3 + K_2K_3)$	...
a_6	0	0	$(K_1 + K_2 + K_3)$	...
a_7	0	0	1	...
⋮	⋮	⋮	⋮	...

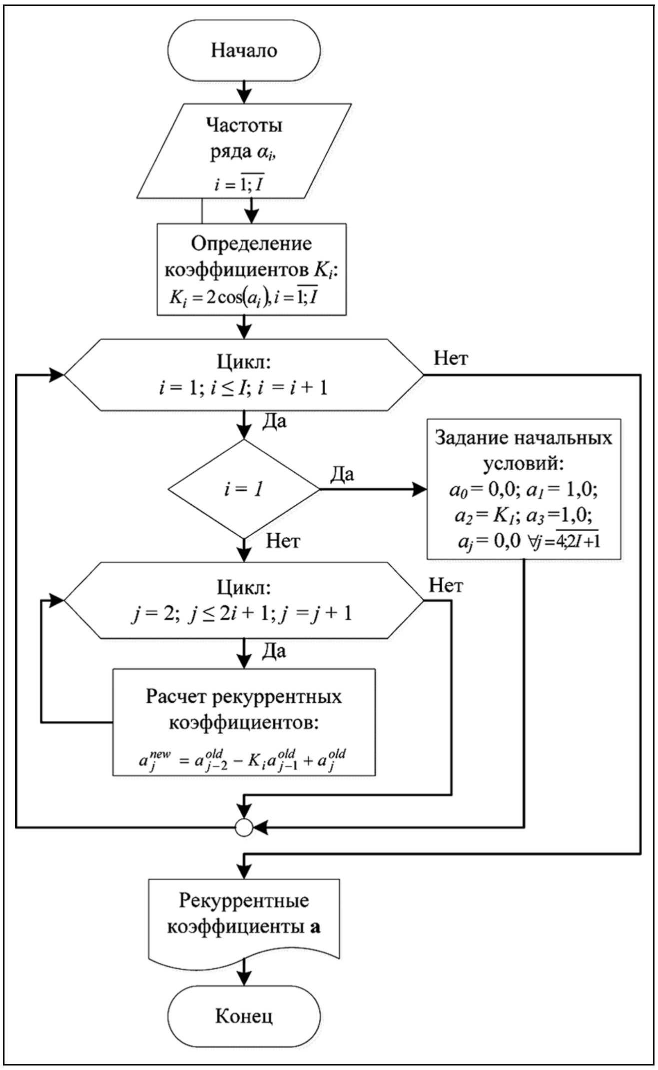


Рис. 1. Схема алгоритма формирования рекуррентных соотношений для аддитивных последовательностей периодических функций

ный алгоритм определения рекуррентной формулы вида (3) для получения элементов последовательности $\{y_i\}_{i=0}^{n}$, образованных периодической функцией вида (2), на основании информации о множестве частот $\{\alpha_k\}_{k=1}^{m}$, входящих в нее периодических биномов G_k.

Представленный на рис. 1 алгоритм весьма перспективен в смысле получения рекуррентных соотношений для восстановления последовательностей, элементы которых будут описываться более сложными классами периодических функций. При неизменной структуре алгоритма достаточно изменить формулу расчета коэффициентов и можно получить рекуррентное соотношение для исходной функции более сложного вида. Так, например, на основании таблицы Z-преобразования можно получить рекуррентные соотношения для временного ряда, определяемого функцией вида:

$$\{y(i)\}_{i=0}^{n} = \sum_{k=1}^{m} (A_k C_k^i \cos(\alpha_k i + \varphi_k) + B_i C_k^i \sin(\alpha_k i + \phi_k)), \quad m < \infty,$$

с помощью расчета значений матрицы коэффициентов рекуррентного соотношения (3) по формуле

$$a_i(j) = a_{i-2}(j-1) - K_i C_i a_{i-1}(j-1) + C_i^2 a_i(j-1), \quad i > 1.$$

В целях проверки сформированного алгоритма был проведен численный эксперимент по формированию рекуррентных соотношений при различных m для получения элементов последовательности $\{y_i\}_{i=0}^{n}$, образованных периодической функцией вида (2).

Эксперимент. Для получения элементов последовательности $\{y_i\}_{i=0}^{n}$, образованных функцией вида:

$$y_i = \sum_{k=1}^{m} (A_k \cos(ki + \varphi_k) + B_k \sin(k^i + \phi_k)),$$

были рассчитаны рекуррентные соотношения при различных значениях m. Результаты работы программы, реализующей разработанный алгоритм (см. рис. 1):

$m = 1$:

$$y_n = 1{,}0806 y_{n-1} - y_{n-2};$$

$m = 2$:

$$y_n = 0{,}248311 y_{n-1} - 1{,}10062 y_{n-2} + 0{,}248311 y_{n-3} - y_{n-4};$$

$m = 3$:

$$y_n = -1{,}73167 y_{n-1} - 1{,}60897 y_{n-2} + 1{,}68259 y_{n-3} - 1{,}60897 y_{n-4} - 1{,}73167 y_{n-5} - y_{n-6};$$

$m = 4$:

$$y_n = -3{,}03896 y_{n-1} - 4{,}87276 y_{n-2} - 5{,}51765 y_{n-3} - 5{,}41756 y_{n-4} - 5{,}51765 y_{n-5} - 4{,}87276 y_{n-6} - 3{,}03896 y_{n-7} - y_{n-8};$$

$m = 5$:

$$y_n = -2{,}47164 y_{n-1} - 4{,}14869 y_{n-2} - 5{,}79217 y_{n-3} - 7{,}16003 y_{n-4} - 7{,}96178 y_{n-5} - 7{,}16003 y_{n-6} - 5{,}79217 y_{n-7} - 4{,}14869 y_{n-8} - 2{,}47164 y_{n-9} - y_{n-10}.$$

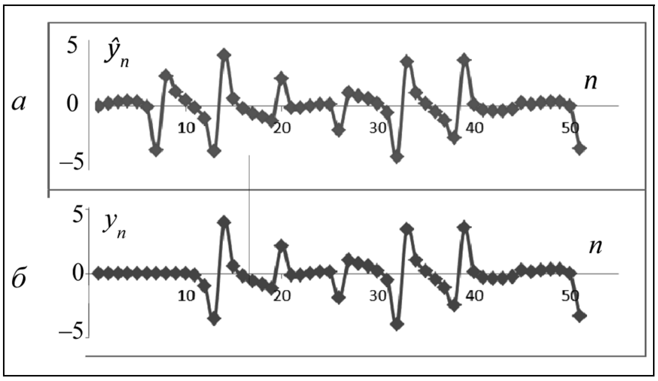


Рис. 2. График функции при $m = 5$, полученный на основании исходной формулы (*а*) и в результате моделирования (*б*)

Результаты моделирования (рис. 2) иллюстрируют применимость полученных рекуррентных соотношений. Для выбранной точности в пять знаков после запятой, среднеквадратическая ошибка $\sigma_y \le \varepsilon$, где $\varepsilon < 10^{-5}$, при восстановлении функции вида (2) при различных m, $m < 6$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Решена задача восстановления исходного цифрового сигнала, определенного в виде дискретной последовательности, для класса периодических функций (1), представимых линейной комбинацией m тригонометрических биномов. Предполагалось, что указанные последовательности можно получить с помощью рекуррентных соотношений вида (3), порядок d которых соответствует численному (сингулярному) рангу r для рассмотренного вида функций (1): $r = d = 2m$. Выявлены свойства найденных реккурентных соотношений аддитивных последовательностей для периодических функций и разработан алгоритм их получения. Как показали расчеты, полученные рекуррентные соотношения позволяют восстановить искомые последовательности с приемлемой точностью. Дальнейшее продолжение работы заключается в определении рекурентных соотношений вида (3) для более сложных классов периодических функций, а также оценке применимости указанных соотношений в условиях зашумленного цифрового сигнала.

ЛИТЕРАТУРА

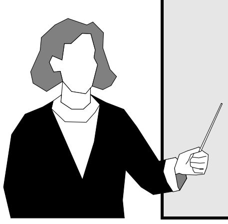
1. *Хургин Я.И., Яковлев В.П.* Финитные функции в физике и технике. — М.: Либроком, 2010. — 601 с.
2. *Голяндина Н.Э.* Метод «Гусеница»-SSA: анализ временных рядов: учеб. пособие. — СПб.: Изд-во СПбГУ, 2004. — 76 с.
3. *Golyandina N.* On the choice of parameters in Singular Spectrum Analysis and related subspace-based methods // Statistics and Its Interface. — 2010. — Vol. 3, N 3. — P. 259—279.
4. *Данилов Д.Л., Жиглявский А.А.* Главные компоненты временных рядов: метод «Гусеница». — М.: Наука, 2004. — 222 с.
5. *Кузьмин О.В., Кедрин В.С.* Анализ структуры гармонических рядов динамики на базе алгоритма сингулярного разложения // Проблемы управления. — 2013. — № 1. — С. 26—31.
6. *Деч Г.* Руководство к практическому применению преобразования Лапласа и *Z*-преобразования. — М.: Книга по требованию, 2012. — 288 с.
7. *Попов Н.Р., Попов И.И.* О формулах дискретного преобразования Лапласа, Фурье, Z-преобразования и их применение // Радиотехника. — 2000. — Вып. 116. — С. 28—34.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.С. Манделем.

Кедрин Виктор Сергеевич — канд. техн. наук, директор, филиал Иркутского государственного университета в г. Братске, ☎ (3953) 45-60-70, ✉ kedrinvs@mail.ru,

Кузьмин Олег Викторович — д-р физ.-мат. наук, зав. кафедрой, Иркутский государственный университет, ☎ (3952) 24-22-14, ✉ quzminov@mail.ru.

Читайте в следующем номере



- ✓ **Вовенко Т.А., Волковицкий А.К., Павлов Б.В.** и др. Модели и структура бортовых измерений пространственных физических полей
- ✓ **Глумов В.М., Пучков А.М., Селезнев А.Е.** Синтез и анализ алгоритмов управления боковым движением беспилотного летательного аппарата с двумя управляющими поверхностями
- ✓ **Дартау Л.А.** Государственное управление здоровьем и качеством жизни. Ч. 2. Организационно-правовая технология
- ✓ **Кадырова А.Р.** Текучесть кадров: обзор экономико-математических методов исследования проблемы. Ч. 2. Модели текучести неруководящих сотрудников
- ✓ **Новиков Д.А.** Модели информационного противоборства в управлении толпой
- ✓ **Сизых Д.С., Сизых Н.В.** Методы экспресс-оценки финансового состояния компании по матричному балансу. Ч. 2. Методы оценки абсолютных показателей