УДК 004.724.2+004.272.43

РАСШИРЕННЫЕ БЛОК-СХЕМЫ ДЛЯ ИДЕАЛЬНЫХ СИСТЕМНЫХ СЕТЕЙ

М.Ф. Каравай, В.С. Подлазов

Рассмотрен метод построения 1-расширенных блок-схем, являющихся обобщением изучаемых в комбинаторике симметричных блок-схем. Дано определение 1-расширенных блок-схем, указан алгоритм их построения и рассмотрен способ их применения для построения распределенных полных коммутаторов как «идеальных» системных сетей для многопроцессорных вычислительных систем.

Ключевые слова: многопроцессорная вычислительная система, идеальная системная сеть, распределенный полный коммутатор, неблокируемая сеть, бесконфликтная самомаршрутизация, произвольная перестановка пакетов данных, симметричная блок-схема.

ВВЕДЕНИЕ. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В настоящее время за сетями связи многопроцессорных вычислительных систем утвердился термин системные сети. Идеальной системной сетью (СС) [1] считается та, которая обеспечивает прямые канальные соединения (без промежуточной буферизации данных) для любой пары абонентов сети при параллельной передаче от всех абонентов. Поэтому, например, идеальной является СС, которая имеет структуру полного графа или состоит из одной СБИС полного коммутатора. Обе эти структуры непригодны для создания идеальных СС с большим числом абонентов — первая вследствие большого числа портов абонентов и каналов между ними, а вторая из-за невозможности создания коммутаторных СБИС с необходимым числом портов.

Идеальная СС позволяет бесконфликтно осуществлять произвольную перестановку пакетов данных по прямым каналам между абонентами посредством их независимой самомаршрутизации каждым абонентом. Это маршрутное свойство идеальной СС называется неблокируемостью и самомаршрутизируемостью.

В работах [2—4] был предложен метод расширения любой СС с сохранением свойств маршрутизации. Он основывается на описании СС в терминах неполных уравновешенных блок-схем, давно уже исследуемых в комбинаторике [5]. Если в качестве исходной СС берется полный коммутатор, то расширенная СС является неблокируемым и самомаршрутизируемым распределенным полным коммутатором, т. е. представляет собой идеальную системную сеть. Данный метод расширения имеет возможность каскадного применения, что позволяет строить идеальные СС на любое число абонентов [4].

Неполной уравновешенной блок-схемой $B(N, M, m, k, \sigma)$ называется набор из M блоков, в которые входят N элементов так, что в каждый блок входит k разных элементов, каждый элемент входит в m блоков, а каждая пара элементов входит в σ блоков.

Отметим, что для блок-схемы $B(N, M, k, m, \sigma)$ не определен порядок размещения блоков, элементов в них и порядок нумерации элементов. Таким образом, произвольная перестановка блоков и элементов в блоках, а также перенумерация элементов являются тождественными преобразованиями, которые не меняют блок-схему с точностью до изоморфизма.

Приведенное определение блок-схемы связывает ее параметры следующими соотношениями: $Nm = kM$ и $N = m(k - 1)/\sigma + 1$. Минимальное число блоков M и максимальное число элементов N обеспечивается в случае симметричных блок-схем, когда $k = m$ и $M = N = m(m - 1)/\sigma + 1$. Такие симметричные блок-схемы $B(N, m, \sigma)$ и рассматриваются в дальнейшем.

Теперь в определении симметричной блок-схемы заменим блок на некоторую исходную СС с m портами — ИсхС(m), элемент — на абонента с m портами, вхождение элемента в блок — на дуплексное подсоединение абонента к одной из ИсхС(m) и, наконец, симметричную блок-схему — на расширенную СС с N абонентами. Тогда последняя состоит из N копий ИсхС(m), к каждой копии подсоединено m разных абонентов, каждый абонент подсоединен к m копиям ИсхС(m), а между каждой парой абонентов имеется σ параллельных каналов, которые проходят через разные ИсхС(m). При этом каждый канал *последовательно* проходит только через одну ИсхС(m). Поэтому расширенная сеть наследует маршрутные свойства ИсхС(m), и добавляется σ-кратное резервирование каналов. Такая расширенная сеть называется простейшей СС — ПРС(N, m, σ). Очевидно, что ПРС(N, m, σ) изоморфна блок-схема $B(N, m, \sigma)$. Если ИсхС(m) задается полным коммутатором $m\times m$, то ПРС(N, m, σ) является идеальной СС с резервными каналами.

Структура ПРС(N, m, σ) имеет вид симметричного двудольного графа, в котором число узлов в каждой доле равно N, а степень любого узла в каждой доле равна m (рис. 1). Узлами одной доли являются ИсхС(m), а узлами другой доли — m-портовые абоненты. Между любыми двумя узлами в каждой доле существует ровно σ разных путей длины 2, проходящих через разные узлы в другой доле. Такой граф мы называем минимальным квазиполным графом [6, 7].

Если ИсхС(m) задается полным коммутатором $m \times m$, то ПРС(N, m, σ) можно представить как распределенный полный коммутатор $N\times N$. Что для этого нужно? Достаточно представить m-многопортового абонента (рис. 2) как связку 1-портового абонента и разветвителя/объединителя дуплексных каналов $(1\times m)/(m\times 1)$ — РОКm.

Теперь схему ПРС(N, m, σ) (см. рис. 1) можно преобразовать в схему СС с двумя коммутирующими каскадами — хребта коммутаторов $m\times m$ и каскада РОКm. Пример такой схемы при $m = 3$ приведен на рис. 3. Часть такой схемы СС, располагающаяся выше интерфейса абонент — РОКm и заключенная в штриховой прямоугольник, представляет собой полный распределенный коммутатор с N дуплексными портами, который является однокаскадным распределенным коммутатором РК$_1$(N, m, σ).

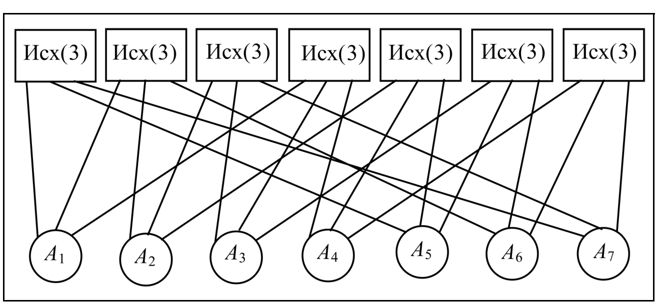

Рис. 1. Структура ПРС(7, 3, 1) в виде минимального квазиполного графа

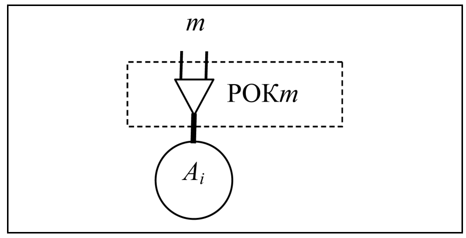

Рис. 2. Разветвитель/объединитель *m* дуплексных каналов РОК*m*

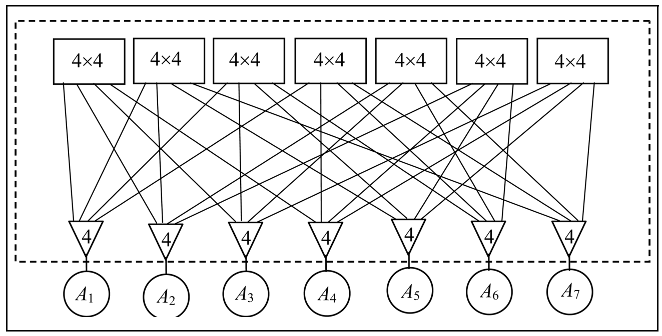

Рис. 3. Распределенный полный коммутатор 7×7 — РК$_1$(7, 4, 2)

Если взять распределенный коммутатор РК$_1$(N, m, σ) в качестве ИсхС(N), то с использованием ПРС(N, m, σ) и РОКm можно построить [4] двухкаскадный распределенный полный коммутатор $R_2\times R_2$, в котором $N\lfloor N/m\rfloor < R_2 < N\lceil N/m\rceil$. Итеративное повторение этой процедуры позволяет строить многокаскадные полные коммутаторы с резервными каналами на любое число портов. Эти коммутаторы сохраняют свойство неблокируемости и самомаршрутизируемости, т. е. остаются идеальными СС.

Для симметричных блок-схем $B(N, m, \sigma)$ имеется проблема существования и построения. Блок-схемы $B(N, m, \sigma)$ существуют не для всех значений параметров m и σ. Очевидно, что они не существуют для тех значений m и σ, которые задают нецелые N. Для целых N известны только необходимые условия существования блок-схем $B(N, m, \sigma)$ — теорема БРЧ (Брук, Райзер, Човла) [5]. Но если

Таблица 1

Параметры симметричных блок-схем $B(N, m, \sigma)$

$B(N, m, 1)$											
m	2	3	4	5	6	7	8	9	10	**11**	12
N	3	7	13	21	31	43	57	73	91	**111**	133
$B(N, m, 2)$											
m	—	3	4	5	**6**	7	8	9	10	**11**	**12**
N		4	7	11	**16**	22	29	37	46	**56**	**67**
$B(N, m, 3)$											
m	—	—	4	5	6	7	8	**9**	**10**	11	**12**
N	—	—	5	—	11	15	—	**25**	**31**	—	**45**
$B(N, m, 4)$											
m	—	—	—	5	6	7	8	9	10	11	12
N	—	—	—	6	—	—	15	19	—	—	34

даже теорема БРЧ не запрещает существование блок-схемы $B(N, m, \sigma)$, то регулярные методы построения известны только для блок-схем, которые представимы в циклической форме [6, 7]. Не все возможные и существующие блок-схемы представимы в такой форме.

В табл. 1 кратко приведены параметры возможных симметричных блок-схем. Блок-схемы, которые не существуют (нецелое N), не имеют значений N; построенные циклические блок-схемы не имеют заливки; блок-схемы, которые запрещены теоремой БРЧ, выделены светлой заливкой; ациклические блок-схемы, которые уже построены, выделены косой штриховкой; ациклические блок-схемы, которые еще не построены, выделены темной заливкой.

В данной работе ставится задача расширить определение симметричной блок-схемы так, чтобы «расширенная блок-схема» могла существовать для любых значений параметров m и σ, могла быть построена в циклической форме и, самое главное, могла быть использована для построения идеальных СС с резервными каналами, возможно с некоторыми накладными расходами.

1. АЛГОРИТМ ПОСТРОЕНИЯ БЛОК-СХЕМ В ЦИКЛИЧЕСКОЙ ФОРМЕ

Симметричные блок-схемы явно задаются [2—5] таблицей, состоящей из N строк и $m + 1$ столбцов (см. примеры в табл. 2 и 3). Первый столбец таблицы блок-схемы $B(N, m, \sigma)$ содержит номера блоков, занумерованных от 1 до N. Элементы также нумеруются с 1 до N. В ячейках i-й строки остальных столбцов содержатся номера элементов, входящих в i-й блок.

Симметричная блок-схема имеет две формы канонического представления — циклическую и ациклическую. Ациклическая форма более общая — некоторые блок-схемы могут существовать в ациклической форме, но не могут быть представлены в циклической. Любая циклическая блок-схема может быть тождественными преобразованиями превращена в ациклическую, но не наоборот.

Циклическая блок-схема имеет форму представления, в которой столбцы таблицы содержат сдвинутые по строкам циклические последовательности номеров элементов 1, 2, ..., N. Будем характеризовать такую блок-схему набором номеров блоков (строк), в которые входит 1-й элемент. Обозначим этот набор как Σ. Циклическая блок-схема существует не для любого набора Σ — его еще надо найти. Построение циклической блок-схемы и сводится к нахождению набора Σ.

В ациклической блок-схеме всегда можно выделить две меньших несимметричных блок-схемы — производную $B'(m, N - 1, \sigma, m - 1, \sigma - 1)$ и остаточную $B''(N - m, N - 1, m - \sigma, m, \sigma)$. Производные блок-схемы в табл. 2 и 3 выделены жирным шрифтом, а остаточные — заливкой.

Таблица 2

Блок-схема $B(7, 3, 1)$ в двух формах представления

Циклическая блок-схема, $\Sigma = (1, 2, 4)$				Ациклическая блок-схема			
Блоки	Элементы			Блоки	Элементы		
1	**1**	7	5	1	1	2	3
2	2	**1**	6	2	**1**	4	6
3	3	2	7	3	**1**	5	7
4	4	3	**1**	4	**2**	4	5
5	5	4	2	5	**2**	6	7
6	6	5	3	6	**3**	4	7
7	7	6	4	7	**3**	5	6

Таблица 3

Блок-схема $B(7, 4, 2)$ в двух формах представления

Циклическая блок-схема, $\Sigma = (1, 2, 3, 5)$					Ациклическая блок-схема				
Блоки	Элементы				Блоки	Элементы			
1	**1**	7	6	4	1	1	2	3	4
2	2	**1**	7	5	2	**1**	**2**	5	7
3	3	2	**1**	6	3	**1**	**3**	5	6
4	4	3	2	7	4	**1**	**4**	6	7
5	5	4	3	**1**	5	**2**	**3**	6	7
6	6	5	4	2	6	**2**	**4**	5	6
7	7	6	5	3	7	**3**	**4**	5	7

Для циклических блок-схем при $\sigma = 1$ существует и достаточное условие их существования [5] — оно сводится к выполнению условия $m = p^r + 1$, где p — простое число и r — натуральное число.

Симметричные блок-схемы $B(N, m, \sigma)$ ищутся в виде матриц D размерности $N \times m$, строки которых задают блоки с размещенными в них элементами. Алгоритм построения матриц-решений D состоит в переборе всех вариантов размещения циклических последовательностей 1, 2, ..., N в столбцах матрицы с отбором тех вариантов, для которых матрица D задает циклическую блок-схему. Обозначим a_i номер строки, в которой находится 1 в i-м столбце, считая $a_1 = 1$ и $a_i > a_{i+1}$. Обозначим Σ набор чисел (a_2, ..., a_m). Поиск решения сводится к построению всех наборов Σ, при которых матрицы D задают циклическую блок-схему [6, 7]. Алгоритм построения циклических блок-схем в дальнейшем именуется Σ-алгоритмом.

Критерием построения в матрице D циклической блок-схемы служит вид матрицы смежности C элементов блок-схемы, которая имеет размерность $N \times N$. В ПРС(N, m, σ) матрица смежности задает число разных путей между любой парой абонентов сети. Матрицу-решение D определяет матрица смежности C, которая содержит значение σ во всех ячейках, кроме ячеек главной диагонали, которая состоит из нулей.

При $\sigma = 1$ получение всех решений требует перебора C_{N-1}^{m-1} вариантов размещения всех чисел a_i в Σ. Используя формулу Стирлинга и учитывая, что $\lim\limits_{N \to \infty} (N/m) = m$, можно показать, что $\lim\limits_{N \to \infty} C_{N-1}^{m-1} = m^{m-1,5} e^{m-1} / \sqrt{2\pi}$. Проверка вида матрицы смежности требует $O(m^4)$ операций сравнения. Поэтому Σ-алгоритм имеет сложность $O(m^{m+2,5} e^{m-1})$ и является NP-сложным по m, а не по N. При $\sigma > 1$ он оказывается NP-сложным по m/σ.

Σ-алгоритм позволяет найти все решения, среди которых много автоморфных. Автоморфизмом является циклический сдвиг столбцов, начиная со второго, матрицы D вправо на любое число позиций. Автоморфизмом является также зеркальное отражение матрицы D.

Σ-алгоритм для невозможных, запрещенных и ациклических блок-схем не находит решений.

2. ОДНОРАСШИРЕННАЯ БЛОК-СХЕМА

Назовем однорасширенной (далее 1-расширенной) блок-схемой $B^*(N^*, m, \sigma|\sigma + 1)$ совокупность из N^* блоков, в которые входят N^* разных элементов так, что в каждый блок входит m разных элементов, каждый элемент входит в m блоков, а каждая пара элементов входит в σ или в $\sigma + 1$ блоков, и значение $N^* < N = m(m - 1)/\sigma + 1$ является максимально возможным.

Однорасширенная блок-схема $B^*(N^*, m, \sigma|\sigma + 1)$ строится в циклической форме с использованием Σ-алгоритма. Она строится в виде матрицы D^* размерности $N^* \times m$, строки которых задают блоки с размещенными в них элементами. Алгоритм построения матриц-решений D^* состоит в переборе всех вариантов размещения циклических последовательностей 1, 2, ..., N^* в столбцах матрицы с отбором тех вариантов, для которых матрица D^* задает циклическую блок-схему. Критерием ее возникновения служит вид матрицы смежности C^* элементов размерности $N^* \times N^*$, которая содержит значения σ или $\sigma + 1$ во всех ячейках, кроме ячеек главной диагонали, которая состоит из нулей. В целях обеспечения однородности вхождения элементов дополнительно требуется, чтобы значения $\sigma + 1$ располагались только на диагоналях параллельных главной диагонали.

Поиск матриц-решений D^* начинается с $N^* = \lfloor N \rfloor$. Если решений нет, то он повторяется для $N^* = N^* - 1$ до тех пор, пока не найдется хотя бы одно решение.

Рассмотрим пример построения 1-расширенной блок-схемы. Блок-схема $B(N, 5, 3)$ не суще-

Таблица 4

Однорасширенная блок-схема $B^*(7, 5, 3|4)$

Блоки	Элементы				
1	**1**	7	6	5	4
2	2	**1**	7	6	5
3	3	2	**1**	7	6
4	4	3	2	**1**	7
5	5	4	3	2	**1**
6	6	5	4	3	2
7	7	6	5	4	3

Таблица 5

Матрица смежности для $B^*(7, 5, 3|4)$ в табличном виде

$i \backslash j$	1	2	3	4	5	6	7
1	0	4	3	3	3	3	4
2	4	0	4	3	3	3	3
3	3	4	0	4	3	3	3
4	3	3	4	0	4	3	3
5	3	3	3	4	0	4	3
6	3	3	3	3	4	0	4
7	4	3	3	3	3	4	0

ствует, так как $N = 5 \cdot 4/3 + 1 = 7{,}66$ не является целым числом. Однако, удается найти несколько 1-расширенных блок-схем $B^*(7, 5, 3|4)$. Одна из них имеет Σ-набор (2, 3, 4, 5) и представлена в табл. 4. Матрица смежности для нее представлена в табл. 5. Она показывает, что некоторые пары элементов (i, j) входят в каждый блок четыре раза, для них $j = (i \pm 1)\mathrm{mod}7$, а остальные — 3 раза.

3. ЭМПИРИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА 1-РАСШИРЕННЫХ БЛОК-СХЕМ

Авторы провели ряд экспериментов по построению 1-расширенных блок-схем $B^*(N^*, m, \sigma|\sigma + 1)$ для случаев, когда симметричная блок-схема $B(N, m, \sigma)$ не существует или еще не построена.

По теореме БРЧ блок-схема $B(43, 7, 1)$ не существует. Однако удалось построить несколько 1-расширенных блок-схем $B^*(39, 7, 1|2)$. Одна из них (первая построенная) имеет Σ-набор (2, 3, 5, 14, 19, 34). Матрица смежности C для блок-схемы $B^*(39, 7, 1|2)$ показывает, что некоторые пары элементов (i, j), для которых $j = (i \pm 1)\mathrm{mod}39$ или $j = (i \pm 2)\mathrm{mod}39$, входят в каждый блок два раза, а остальные пары элементов — один раз.

Аналогично, по теореме БРЧ блок-схемы $B(22, 7, 2)$, $B(29, 8, 2)$ и $B(46, 10, 2)$ не существуют. С помощью Σ-алгоритма удалось построить 1-расширенные блок-схемы $B^*(21, 7, 2|3)$, $B^*(27, 8, 2|3)$ и $B^*(42, 10, 2|3)$ с Σ-наборами, в частности, (2, 3, 5, 9, 12, 17), (2, 3, 4, 7, 11, 17, 22) и (2, 3, 6, 9, 16, 19, 28, 37, 39) соответственно.

В блок-схеме $B^*(21, 7, 2|3)$ некоторые пары элементов (i, j), для которых $j = (i \pm 7)\mathrm{mod}21$ и $j = (i \pm 14)\mathrm{mod}21$, входят в каждый блок три раза, а остальные пары — два раза. В блок-схеме $B^*(27, 8, 2|3)$ пары элементов (i, j), для которых $j = (i \pm 1)\mathrm{mod}27$ и $j = (i \pm 7)\mathrm{mod}27$, входят в каждый блок три раза, а остальные пары — два раза. В блок-схеме $B^*(42, 10, 2|3)$ пары элементов (i, j), для которых $j = (i \pm 3)\mathrm{mod}42$, $j = (i \pm 6)\mathrm{mod}42$, $j = (i \pm 7)\mathrm{mod}42$ и $j = (i \pm 9)\mathrm{mod}42$, входят в каждый блок три раза, а остальные пары — два раза.

Блок-схема $B(56, 11, 2)$ не существует в циклической форме, а в ациклической форме она еще не построена. С помощью Σ-алгоритма удалось построить, в частности, 1-расширенную блок-схему $B^*(51, 11, 2|3)$ с Σ-набором (2, 3, 4, 6, 15, 22, 30, 37, 43, 47). В ней пары элементов (i, j), для которых $j = (i \pm 1)\mathrm{mod}51$, $j = (i \pm 2)\mathrm{mod}51$, $j = (i \pm 7)\mathrm{mod}51$, $j = (i \pm 10)\mathrm{mod}51$ и $j = (i \pm 15)\mathrm{mod}51$, входят в каждый блок три раза, а остальные пары — два раза.

Аналогично, блок-схема $B(45, 12, 3)$ не существует в циклической форме, а в ациклической форме она еще не построена. С помощью расширенного Σ-алгоритма удалось построить, в частности, 1-расширенную блок-схему $B^*(43, 12, 3|4)$ с Σ-набором (2, 3, 4, 6, 11, 15, 18, 26, 28, 34, 40). В ней пары элементов (i, j), для которых $j = (i \pm 2)\mathrm{mod}43$, $j = (i \pm 12)\mathrm{mod}43$ и $j = (i \pm 14)\mathrm{mod}43$, входят в каждый блок четыре раза, а остальные пары — три раза.

В множестве возможных блок-схем [3] имеется подмножество, в котором блок-схемы существуют при любых значениях параметров m и σ. Это подмножество с $m = \sigma$, $m = \sigma + 1$, $m = 2\sigma$ и $m = 2\sigma + 1$. В первых двух случаях блок-схемы существуют всегда в циклической форме, а во вторых двух случаях блок-схемы $B(27, 13, 6)$, $B(27, 14, 7)$, $B(39, 19, 9)$ и $B(39, 20, 10)$ в циклической форме не существуют. Тем не менее, удается построить 1-расширенные блок-схемы $B^*(26, 13, 6|7)$, $B^*(26, 14, 7|8)$, $B^*(38, 19, 9|10)$ и $B^*(38, 20, 10|11)$ в циклической форме. В частности, одна из $B^*(26,13, 6|7)$ имеет Σ-набор (2, 3, 4, 5, 6, 8, 11, 14, 16, 18, 22, 23), и в ней пары элементов (i, j), для которых $j = (i \pm 2)\mathrm{mod}26$, $j = (i \pm 5)\mathrm{mod}26$ и $j = (i \pm 12)\mathrm{mod}26$, входят в каждый блок семь раз, а остальные пары — шесть раз. Аналогично, одна из блок-схем $B^*(26, 14, 7|8)$ имеет Σ-набор (2, 3, 4, 5, 6, 8, 11, 12, 14, 15, 19, 20, 25), и в ней пары элементов (i, j), для которых $j = (i \pm 1)\mathrm{mod}26$, $j = (i \pm 3)\mathrm{mod}26$ и $j = (i \pm 9)\mathrm{mod}26$, входят в каждый блок восемь раз, а остальные пары — семь раз. Аналогично и для блок-схем $B^*(38, 19, 9|10)$ и $B^*(38, 20, 10|11)$, но с другими парами элементов (i, j).

При $\sigma > 2$ число симметричных блок-схем $B(N, m, \sigma)$, которые не существуют по определению, так как N является дробным числом, больше числа возможных блок-схем [3]. Однако, даже в первом подмножестве удается построить 1-расширенные блок-схемы $B^*(N^*, m, \sigma|\sigma + 1)$. В качестве примера рассмотрим блок-схему $B^*(N^*, m, \sigma|\sigma + 1)$ для $m = 8$ и $m = 11$. Удалось, в частности, построить блок-схему $B^*(19, 8, 3|4)$ и $B^*(36, 11, 3|4)$, с Σ-наборами (2, 3, 4, 6, 8, 12, 15) и (2, 3, 5, 7, 13, 14, 15, 20, 24, 34) соответственно. В блок-схеме $B^*(19, 8, 3|4)$ пары элементов (i, j), для которых $j = (i \pm 2)\mathrm{mod}19$, входят в каждый блок четыре раза, а остальные пары — три раза. В блок-схеме $B^*(36, 11, 3|4)$ пары элементов (i, j), для которых $j = (i \pm 1)\mathrm{mod}36$, $j = (i \pm 2)\mathrm{mod}36$ и $j = (i \pm 18)\mathrm{mod}6$, входят в каждый блок четыре раза, а остальные пары — три раза.

Подводя итог эксперимента, можно сказать, что 1-расширенные блок-схемы удалось построить для всех проверенных сочетаний m и σ. Во всех случаях оказалось, что N^* меньше N всего на несколько единиц — имеет место соотношение

Таблица 6

Параметры блок-схем и 1-расширенных блок-схем

$B(N, m, 1) \mid B^*(N^*, m, 1 \mid 2)$											
m	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$N \mid N^*(\delta)$	3	7	13	21	31	$43 \mid 39(4)$	57	73	91	$111 \mid ?(?)$	133
$B(N, m, 2) \mid B^*(N^*, m, 2 \mid 3)$											
m	—	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$N \mid N^*(\delta)$	—	4	7	11	$16 \mid 15(2)$	$22 \mid 21(4)$	$29 \mid 27(4)$	37	$46 \mid 42(8)$	$56 \mid 51(10)$	$67 \mid 63(8)$
$B(N, m, 3) \mid B^*(N^*, m, 3 \mid 4)$											
m	—	—	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$N \mid N^*(\delta)$	—	—	5	$\mid 7(2)$	11	15	$\mid 19(1)$	$25 \mid 23(6)$	$31 \mid 29(6)$	$\mid 36(5)$	$45 \mid 43(6)$
$B(N, m, 4) \mid B^*(N^*, m, 4 \mid 5)$											
m	—	—	—	5	6	7	8	9	10	11	12
$N \mid N^*(\delta)$	—	—	—	6	$\mid 8(2)$	$\mid 11(2)$	15	19	$\mid 22(6)$	$\mid 27(6)$	$34 \mid 33(4)$

$N^* \geqslant N - [m/2]$. Во всех случаях матрица смежности 1-расширенных блок-схем содержит значения $\sigma + 1$ только на парах симметричных диагоналей, число которых много меньше N^*. Теоретического обоснования данных свойств пока не проводилось, поэтому вопрос о существовании 1-расширенных блок-схем в общем случае остается открытым. Однако для практических целей построенных 1-расширенных блок-схем и полученных свойств вполне достаточно. Практические цели — это построение распределенных полных коммутаторов произвольного размера в фиксированном схемном базисе коммутаторов $m \times m$ и РОКm [8].

Результаты эксперимента, кратко представлены в табл. 6, которая построена добавлением в табл. 1 параметров 1-расширенных блок-схем для несуществующих и непостроенных блок-схем. Значение δ для 1-расширенных блок-схем задает число диагоналей со значением $\sigma + 1$ в матрице смежности. Результаты, отмеченные как «?», относятся к продолжающимся экспериментам, для выполнения которых потребовался многопроцессорный кластер (120 ядер — 15 восьмиядерных процессоров) и много времени выполнения (месяцы) даже на нем.

Значение δ задает, также, число элементов, с которыми каждый элемент образует пару в разных блоках $\sigma + 1$ раз. Поэтому необходимым условием существования 1-расширенных блок-схем является выполнение равенства $\delta = m(m - 1) - \sigma(N^* - 1)$. Оно следует из следующих соображений. Каждый элемент образует пару в каждом блоке с $(m - 1)$ элементами, а во всех блоках — с $m(m - 1)$ элементами. С другой стороны, каждый элемент образует σ пар с $\sigma(N^* - 1)$ элементами. Разница между этими выражениями и задает число $\sigma + 1$ пар.

4. ИДЕАЛЬНЫЕ СИСТЕМНЫЕ СЕТИ НА БАЗЕ 1-РАСШИРЕННЫХ БЛОК-СХЕМ

Однорасширенным блок-схемам можно дать ту же сетевую интерпретацию, что и симметричным блок-схемам. Заменим в определении 1-расширенной блок-схемы блок на некоторую исходную СС с m портами — ИсхС(m), элемент — на абонента с m портами, вхождение элемента в блок — на дуплексное подсоединение абонента к одной из ИсхС(m) и, наконец, 1-расширенную блок-схему — на 1-расширенную СС с N^* абонентами. Тогда последняя состоит из N^* копий ИсхС(m), к каждой копии подсоединено m разных абонентов, каждый абонент подсоединен к m копиям ИсхС(m), а между каждой парой абонентов имеется σ или $\sigma + 1$ параллельных каналов, которые проходят через разные ИсхС(m). При этом каждый канал *последовательно* проходит только через одну ИсхС(m). Поэтому расширенная сеть наследует маршрутные свойства ИсхС(m). При этом добавляется как минимум σ-кратное резервирование каналов. Такая расширенная сеть называется простейшей 1-расширенной СС — ПРС$^*(N^*, m, \sigma \mid \sigma + 1)$. Очевидно, что ПРС$^*(N^*, m, \sigma \mid \sigma + 1)$ изоморфна блок-схема $B^*(N^*, m, \sigma \mid \sigma + 1)$. Если ИсхС($m$) задается полным коммутатором $m \times m$, то ПРС$^*(N^*, m, \sigma|\sigma + 1)$ является идеальной СС с резервными каналами.

Заметим, что ПРС$^*(N^*, m, \sigma|\sigma + 1)$ позволяет бесконфликтно реализовать произвольную перестановку пакетов данных между абонентами — путем самомаршрутизации каждого пакета его источником независимо от других источников. Для самомаршрутизации можно воспользоваться, например, червячной маршрутизацией [4]. Эта возможность сохраняется при отказе у каждого абонента любых $\sigma - 1$ каналов. Поэтому ПРС$^*(N^*, m, \sigma|\sigma + 1)$ является $(\sigma - 1)$-отказоустойчивой по каналам СС.

В условиях сохранения работоспособности у каждого абонента $\tau \leqslant \sigma$ каналов ПРС$^*(N^*, m, \sigma|\sigma + 1)$ позволяет бесконфликтно реализовать также произвольную τ-перестановку пакетов данных между абонентами, т. е. одновременно реализовать τ разных перестановок.

Идеальная ПРС$^*(N^*, m, \sigma|\sigma + 1)$ благодаря использованию схем РОКm может быть преобразована в однокаскадный распределенный полный коммутатор $N^* \times N^*$ — РК$_1(N^*, m, \sigma|\sigma + 1)$. Он, в свою очередь, может быть расширен в многокаскадный полный коммутатор с еще бóльшим числом портов [4]. Любой такой коммутатор является неблокируемым и самомаршрутизируемым на произвольной перестановке пакетов данных и сохраняет σ-кратное резервирование каналов.

Таким образом, идеальная ПРС$^*(N^*, m, \sigma|\sigma + 1)$, изоморфная 1-расширенной блок-схеме $B^*(N^*, m, \sigma|\sigma + 1)$, уступает идеальной ПРС$(N, m, \sigma)$, изоморфной симметричной блок-схеме $B(N, m, \sigma)$, только из-за несколько меньшего числа абонентов: $N^* < N$. Однако для ее реализации требуется и меньшее число коммутаторов $m \times m$ и схем РОКm: $N^* < N$.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ. ПОЛУЧЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

В данной работе резко увеличена область применимости метода расширения произвольной системной сети с m абонентами до системной сети с $N^* > m$ абонентами, сохраняющего маршрутные свойства исходной сети и увеличивающий в $\sigma < m$ раз число каналов между любой парой абонентов и работающего, теперь, при любых значениях параметров σ и m. Если исходная сеть представляет собой полный коммутатор $m \times m$, то расширенная сеть образует распределенный полный коммутатор $N^* \times N^*$, являющийся неблокируемой самомаршрутизируемой сетью с прямыми каналами (без промежуточной буферизации) между абонентами — идеальной системной сетью, которая является также $(\sigma - 1)$-отказоустойчивой по каналам при бесконфликтной реализации произвольной перестановке пакетов данных между абонентами.

Метод основывается на использовании 1-расширенных симметричных блок-схем. Дано их определение, задан комбинаторный алгоритм их построения и экспериментально исследованы их свойства. Рассмотрена возможность построения простейших расширенных системных сетей, изоморфных 1-расширенным блок-схемам. Показано, что если эти сети строятся путем расширения полных коммутаторов, то они являются неблокируемыми распределенными полными коммутаторами, т. е. представляют собой идеальные системные сети.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Kumar A., Peh L-S., Kundu P., Jha N.K.* Toward ideal on-chip communication using express virtual channels // IEEE Micro. — 2008. — Jan/Feb. — P. 80—90.
2. *Подлазов В.С., Соколов В.В.* Метод однородного расширения системных сетей многопроцессорных вычислительных систем // Проблемы управления. — 2007. — № 2. — С. 22—27.
3. *Николаев А.Б., Подлазов В.*С. Отказоустойчивое расширение системных сетей многопроцессорных вычислительных систем // Автоматика и телемеханика. — 2008. — № 1. — С. 162—170.
4. *Каравай М.Ф., Подлазов В.С.* Распределенный полный коммутатор как «идеальная» системная сеть для многопроцессорных вычислительных систем // Управление большими системами. — 2011. — Вып. 34. — С. 92—116. URL: http://ubs.mtas.ru/upload/library/UBS3405.pdf (дата обращения 27.06.2012).
5. *Холл М.* Комбинаторика. — М.: Мир, 1970. — Гл. 10—12.
6. *Каравай М.Ф., Пархоменко П.П., Подлазов В.С.* Простые методы построения квазиполносвязных графов (симметричных блок-схем) // Тр. IV междунар. конф. «Параллельные вычисления и задачи управления» PACO'2008, Москва, ИПУ РАН, октябрь 2008 г. — М.: 2008. — С. 232—249.
7. *Каравай М.Ф., Пархоменко П.П., Подлазов В.С.* Комбинаторные методы построения двудольных однородных минимальных квазиполных графов (симметричных блок-схем) // Автоматика и телемеханика. — 2009. — № 2. — С. 153—170.
8. *Каравай М.Ф., Подлазов В.С., Соколов В.В.* Метод расширения полных коммутаторов в фиксированном схемном базисе // Тр. 5-й междунар. конф. «Параллельные вычисления и задачи управления» PACO'2010, Москва, ИПУ РАН, октябрь 2010 г. — М., 2010. — С. 295—305. — URL: http://paco.ipu.ru/pdf/A205.pdf (дата обращения 28.06.2012).

Статья представлена к публикации членом редколлегии чл.-корр. РАН П.П. Пархоменко.

Каравай Михаил Федорович — д-р техн. наук, зав. лабораторией, ☏ (495) 334-90-00, ✉ mkaravay@ipu.ru,

Подлазов Виктор Сергеевич — д-р техн. наук, гл. науч. сотрудник, ☏ (495) 334-78-31, ✉ podlazov@ipu.ru,

Институт проблем управления РАН им. В.А. Трапезникова, г. Москва.