УДК 513.88:519.177:519.173:519.816

УСЛОВИЯ ОПТИМАЛЬНОСТИ В ЗАДАЧЕ УПРАВЛЕНИЯ ВХОДНЫМИ ПОТОКАМИ МНОГОКАНАЛЬНЫХ СЕТЕЙ СВЯЗИ

И.Г. Исмаилов

Предпринята попытка строгого математического описания нестационарных многоканальных сетей связи.

Ключевые слова: многоканальная сеть связи, условия оптимальности, оптимальное управление.

ВВЕДЕНИЕ

В каналах связи, таких, например, как беспроводные телефонные каналы, применяются фильтры, предотвращающие интерференцию между различными линиями. Математически такой фильтр представляет собой оператор свертки с добавлением функции внешних шумов: $r(t) = s(t) * h(t) + n(t)$, где $r(t)$ и $s(t)$ — выходной и входной сигналы, $h(t)$ — импульсная характеристика фильтра, $n(t)$ — шум, «звездочкой» обозначена операция свертки. Подводные акустические каналы и ионосферные радиоканалы порождают многолучевое распространение сигналов; здесь импульсная характеристика фильтра зависит от времени: $h = h(\tau, t)$ и определяет реакцию канала в момент t на сигнал, поступивший в момент $t - \tau$. В общем случае зависимость выходного сигнала от входного квазилинейная, т. е. импульсная характеристика зависит от входного сигнала: $h = h(t, s(t - \tau))$. Именно такой общий случай и рассматривается в данной статье.

Исследованию различных моделей многоканальных сетей связи посвящена значительная литература (см., например, работы [1—4]). Основное внимание исследований было направлено на анализ линейных стационарных моделей, однако реальные сети связи являются нестационарными объектами. Это вызвано рядом факторов: изменением нагрузки в сети, перемещением абонентов, выходом из строя и восстановлением элементов сети и др. Отметим также, что методы исследования даже статических моделей зачастую носят эвристический характер. Попытка дать строгое математическое описание функционирования многоканальных сетей связи предпринята в работах автора [5, 6] и более подробно излагается в настоящей статье.

1. НЕЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ. УПРАВЛЕНИЕ ВХОДНЫМИ ПОТОКАМИ

Далее предлагается алгоритм построения оптимального управляющего воздействия в многоканальной сети связи.

Пусть динамика многоканальной сети связи описывается системой нелинейных интегральных уравнений

$$\lambda_j(t) = \sum_{i=1}^{N} \int_0^t P_{ij}(\lambda(\tau))\varphi_{ij}(t - \tau, \lambda_i(\tau))\lambda_i(\tau)d\tau + v_j(t), \quad j = 1,..., N. \tag{1}$$

Здесь $P_{ij}(\cdot)$ — квазилинейная часть интегрального ядра, а $\varphi_{ij}(t - \tau, \cdot)$ — зависящая от времени нелинейность. Систему уравнений (1) перепишем в векторной форме

$$\lambda(t) = \int_0^t \Phi(t - \tau, \lambda(\tau))\lambda(\tau)d\tau + v(t),$$

где $\Phi(t - \tau, \cdot) = \{P_{ij}(\cdot)\varphi_{ij}(t - \tau, \cdot)\}$ — подынтегральная матрица, $\lambda(t)$ — поток в узлах и очередях многоканальной сети связи, $v(t)$ — входной поток (управляющее воздействие). Изучаемая система рассматривается на временном промежутке $[0,\ T]$.

Запишем в общем виде критерий качества:

$$f(\lambda,\ v) = \int_0^T F(\tau,\ \lambda(\tau),\ v(\tau))d\tau.$$

Для удобства функция F соответствует взятой со знаком «минус» пропускной способности сети связи, поэтому оптимизационная задача формулируется следующим образом: минимизировать функционал $f(\lambda,\ v)$, выбирая подходящий управляющий параметр $v(t)$.

Итак, формальная запись задачи без учета ограничений на поток $v(t)$ имеет вид:

$$f(\lambda(t),\ v(t)) = \int_0^T F(\tau,\ \lambda(\tau),\ v(\tau))d\tau \to \min, \qquad (2)$$

$$\lambda(t) = \int_0^T \Phi(t - \tau,\ \lambda(\tau))\lambda(\tau))d\tau + v(t), \qquad (3)$$

при интегральном ограничении на внешний поток

$$\int_0^T v^2(\tau)d\tau \leqslant M. \qquad (4)$$

Далее выводятся необходимые условия оптимальности в задаче оптимального управления системой связи (2)—(4).

Предположим, что ядро $\Phi(t,\ u)$ векторного интегрального уравнения (3) симметрично и при каждом управляющем воздействии $v(t)$ уравнение (3) имеет единственное непрерывное решение $\lambda(t)$, определенное на промежутке $[0,\ T]$.

Через $B(v)$ обозначим оператор, ставящий в соответствие внешнему потоку $v(t)$ в силу системы (3) функцию $\lambda(t)) = B(v(t))$.

Тогда задача оптимального управления (2)—(4) эквивалентна минимизации функционала

$$\varphi(v(t)) = f(B(v(t)),\ \mathrm{v}(t)) = \int_0^T F(\tau,\ B(v(\tau)),\ v(\tau))d\tau$$

при ограничении

$$\int_0^T v^2(\tau)d\tau \leqslant M.$$

Рассмотрим функциональное пространство $L_2[0,\ T]$ вектор-функций $v(t)$, определенных на промежутке $[0,\ T]$ и суммируемых с квадратом:

$$\int_0^T v^2(\tau)d\tau < \infty.$$

Пространство $L_2[0,\ T]$ — гильбертово, скалярное произведение и норма в нем определяются, соответственно, формулами

$$(u,\ v) = \int_0^T u(\tau)v(\tau)d\tau, \quad \|v\| = \left(\int_0^T v^2(\tau)d\tau\right)^{1/2}.$$

Вычислим формальный градиент $\nabla\varphi(v_0)$ функционала $\varphi(v)$ в точке $v_0 = v_0(t)$ пространства $L_2[0,\ T]$. Пусть $\lambda_0(t) = B(v_0(t))$.

$$\begin{aligned}\varphi(v_0 + h) - \varphi(v_0) &= \int_0^T [F(\tau,\ B(v_0(\tau) + h(\tau)),\\ &v_0(\tau) + h(\tau)) - F(\tau,\ B(v_0(\tau)),\ v_0(\tau))]d\tau =\\ &= \int_0^T \left[\left(\frac{\partial F(\tau,\ \lambda_0(\tau),\ v_0(\tau))}{\partial\lambda}\right) B'(v_0(\tau))h(\tau)\right] d\tau +\\ &+ \int_0^T \left(\frac{\partial F(\tau,\ \lambda_0(\tau),\ v_0(\tau))}{\partial v}\right) h(\tau)d\tau + \omega(v_0,\ h), \end{aligned} \qquad (5)$$

где

$$\lim_{\|h\| \to 0} \|h\|^{-1}|\omega(v_0,\ h)| = 0. \qquad (6)$$

Из выражений (5) и (6) следует, что значение скалярного произведения $(\nabla\varphi(v_0),\ h)$ определяется равенством:

$$\begin{aligned}(\nabla\varphi(v_0),\ h) &= \int_0^T [B'(v_0(\tau))]\left(\frac{\partial F(\tau,\ \lambda_0(\tau),\ v_0(\tau))}{\partial\lambda}\right) h(\tau)d\tau +\\ &+ \int_0^T \left(\frac{\partial F(\tau,\ \lambda_0(\tau),\ v_0(\tau))}{\partial v}\right) h(\tau)d\tau. \end{aligned} \qquad (7)$$

Вычислим производную Фреше оператора $B(v)$ в точке v_0. Для этого введем в рассмотрение оператор

$$R(v,\ \lambda) = v(t) + \int_0^t \Phi(t - \tau,\ \lambda(\tau))\lambda(\tau)d\tau - \lambda(t).$$

По определению оператора $B(v)$

$$R(v,\ B(v)) \equiv 0. \qquad (8)$$

Продифференцируем тождество (8) по v в точке (v_0, λ_0), где $\lambda_0 = B(v_0)$ Имеем:

$$R'_v(v_0, \lambda_0) + R'_\lambda(v_0, \lambda_0)B'(v_0) \equiv 0.$$

Отсюда следует, что

$$B'(v_0) = -[R'_\lambda(v_0, \lambda_0)]^{-1}R'_v(v_0, \lambda_0).$$

Найдем теперь вид операторов $R'_v(v_0, \lambda_0)$ и $R'_\lambda(v_0, \lambda_0)$. Имеем:

$$R'_v(v_0, \lambda_0)h \equiv h.$$

Поэтому

$$R'_v(v_0, \lambda_0) = I,$$

где I — единичная матрица.

Следовательно,

$$B'(v_0) = -[R'_\lambda(v_0, \lambda_0)]^{-1}. \qquad (9)$$

Далее,

$$R'_\lambda(v_0, \lambda_0)h = \int_0^t\left(\frac{\partial\Phi(t-\tau, \lambda_0(\tau))}{\partial\lambda}\right)h(\tau)\lambda_0(\tau)d\tau + \int_0^t\Phi(t-\tau, \lambda_0(\tau))h(\tau)d\tau - h(t). \qquad (10)$$

Поэтому, для того чтобы найти значение оператора $B'(v_0)$ на элементе u_0, надо составить уравнение

$$R'_\lambda(v_0, \lambda_0)x + u_0 = 0 \qquad (11)$$

и решить его относительно x. С учетом выражений (9) и (10) уравнение (11) будет иметь вид

$$x(t) = \int_0^t\left(\frac{\partial\Phi(t-\tau, \lambda_0(\tau))}{\partial\lambda}\right)x(\tau)\lambda_0(\tau)d\tau + \int_0^t\Phi(t-\tau, \lambda_0(\tau))x(\tau)d\tau + u_0(t).$$

Вернемся теперь к формуле (7). Из нее следует, что

$$\nabla\varphi(v_0) = B'(v_0(\tau))\left(\frac{\partial F(t, \lambda_0(t), v_0(t))}{\partial\lambda}\right) + \frac{\partial F(t, \lambda_0(t), v_0(t))}{\partial v}. \qquad (12)$$

Таким образом, из формулы (12) следует, что градиент $\nabla\varphi(v_0)$ функционала $\varphi(v)$ в точке v_0 определяется равенством

$$\nabla\varphi(v_0) = x_0(t) + \frac{\partial F(t, \lambda_0(t), v_0(t))}{\partial v}, \qquad (13)$$

где $x_0(t)$ — решение линейного интегрального уравнения Вольтерра

$$x(t) = \int_0^t\left(\frac{\partial\Phi(t-\tau, \lambda_0(\tau))}{\partial\lambda}\right)x(\tau)\lambda_0(\tau)d\tau + \int_0^t\Phi(t-\tau, \lambda_0(\tau))x(\tau)d\tau + \frac{\partial F(t, \lambda_0(t), v_0(t))}{\partial\lambda},$$

а $\lambda_0(\tau)$ — решение нелинейного интегрального уравнения Вольтерра

$$\lambda(t) = \int_0^t\Phi(t-\tau, \lambda(\tau))\lambda(\tau)d\tau + v_0(t).$$

В силу проведенных рассуждений справедлив следующий принцип оптимальности в задаче (2)—(4), т. е. задаче оптимального управления многоканальной сетью связи с помощью управляющих воздействий — внешних потоков. Этот принцип сформулируем в виде следующего алгоритма.

Для того чтобы найти экстремальные управляющие воздействия, нужно составить систему трех уравнений

$$\lambda(t) = \int_0^t\Phi(t-\tau, \lambda(\tau))\lambda(\tau)d\tau + v(t),$$

$$x(t) = \int_0^t\left(\frac{\partial\Phi(t-\tau, \lambda(\tau))}{\partial\lambda}\right)x(\tau)\lambda(\tau)d\tau + \int_0^t\Phi(t-\tau, \lambda(\tau))x(\tau)d\tau + \frac{\partial F(t, \lambda(t), x(t))}{\partial\lambda},$$

$$x(t) + \frac{\partial F(t, \lambda(t), v(t))}{\partial v} = 0,$$

решить ее и среди решений $\{\lambda(t), x(t), v(t)\}$ выбрать те, компоненты $v(t)$ которых удовлетворяют условию

$$\int_0^T v^2(\tau)d\tau \leqslant M.$$

Множество компонент $v(t)$ таких решений обозначим через S_0. Далее нужно составить систему четырех уравнений

$$\lambda(t) = \int_0^t \Phi(t-\tau, \lambda(\tau))\lambda(\tau)d\tau + v(t),$$

$$x(t) = \int_0^t \left(\frac{\partial\Phi(t-\tau, \lambda(\tau))}{\partial\lambda}\right) x(\tau)\lambda(\tau)d\tau +$$

$$+ \int_0^t \Phi(t-\tau, \lambda(\tau))x(\tau)d\tau + \frac{\partial F(t, \lambda(t), v(t))}{\partial\lambda},$$

$$x(t) + \frac{\partial F(t, \lambda(t), v(t))}{\partial v} + \mu v(t) = 0,$$

$$\int_0^T v^2(\tau)d\tau \leqslant M,$$

решить ее и среди решений $\{\lambda(t), x(t), v(t), \mu\}$ выбрать те, компоненты μ которых неотрицательны. Множество компонент $v(t)$ таких решений обозначим через S_1.

Множество $S = S_0 \cup S_1$ является множеством элементарных управлений, т. е. если управление $v(t)$ является оптимальным в задаче (2)—(4), то $v(t) \in S$.

Пользуясь формулой (13), найдем необходимые условия оптимальности при различных ограничениях на управляющие воздействия.

2. ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ОГРАНИЧЕНИЯ ТИПА НЕРАВЕНСТВ НА КОМПОНЕНТЫ ВНЕШНЕГО ПОТОКА

Речь идет о следующих ограничениях:

$$\int_0^T v_i(\tau)d\tau \leqslant v_i, \quad i = 1, ..., N. \qquad (14)$$

Запишем условия оптимальности.

Если управляющее воздействие

$$v_*(t) = \{v_1^*(t), ..., v_N^*(t)\}$$

оптимально в задаче (2), (3), (14), то найдутся такие неотрицательные $\lambda_1^*, ..., \lambda_N^*$, для которых

$$x_*(t) + \frac{\partial F(t, \lambda_*(t), v_*(t))}{\partial v} + \begin{bmatrix} \lambda_1^* \\ \vdots \\ \lambda_N^* \end{bmatrix} = 0,$$

$$\lambda_1^*\left(\int_0^T v_1^*(\tau)d\tau - v_1\right) = 0,$$

$$...$$

$$\lambda_N^*\left(\int_0^T v_N^*(\tau)d\tau - v_N\right) = 0,$$

где $x_*(t)$ — решение линейного интегрального уравнения Вольтерра

$$x(t) = \int_0^t \left(\frac{\partial\Phi(t-\tau, \lambda_*(\tau))}{\partial\lambda}\right) x(\tau)\lambda_*(\tau)d\tau +$$

$$+ \int_0^t \Phi(t-\tau, \lambda_*(\tau))x(\tau)d\tau + \frac{\partial F(t, \lambda_*(t), v_*(t))}{\partial\lambda}, \qquad (15)$$

а $\lambda_*(t)$ — решение нелинейного интегрального уравнения Вольтерра

$$\lambda(t) = \int_0^t \Phi(t-\tau, \lambda(\tau))\lambda(\tau)d\tau + v_*(t). \qquad (16)$$

3. ИНТЕГРАЛЬНОЕ ОГРАНИЧЕНИЕ ТИПА НЕРАВЕНСТВА НА СУММАРНЫЙ ВНЕШНИЙ ПОТОК

Запишем его:

$$\sum_{i=1}^N \int_0^T \alpha_i v_i(\tau)d\tau \leqslant V, \qquad (17)$$

где α_i — веса компонент потока $v(t)$. Найдем необходимое условие оптимальности.

Если управляющее воздействие

$$v_*(t) = \{v_1^*(t), ..., v_N^*(t)\}$$

оптимально в задаче (2), (3), (17), то найдется такое а $\lambda_* \geqslant 0$, для которого

$$x_*(t) + \frac{\partial F(t, \lambda_*(t), v_*(t))}{\partial v} + \lambda_* \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_N \end{bmatrix} = 0,$$

$$\lambda_*\left(\sum_{i=1}^N \int_0^T \alpha_i v_i^*(\tau)d\tau - V\right) = 0,$$

где $x_*(t)$ — решение уравнения (15), а $\lambda_*(t)$ — решение уравнения (16).

4. ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ОГРАНИЧЕНИЯ ТИПА РАВЕНСТВ НА КОМПОНЕНТЫ ВНЕШНЕГО ПОТОКА

Ограничения имеют вид:

$$\int_0^T v_i(\tau)d\tau = v_i,\ i = 1, ..., N. \qquad (18)$$

Найдем условия оптимальности.

Если управление

$$v_*(t) = \{v_1^*(t), ..., v_N^*(t)\}$$

оптимально в задаче (2), (3), (18), то найдутся такие неотрицательные $\lambda_1^*(t), ..., \lambda_N^*(t)$, для которых

$$x_*(t) + \frac{\partial F(t, \lambda_*(t), v_*(t))}{\partial v} + \lambda_* \begin{bmatrix} \lambda_1^* \\ \vdots \\ \lambda_N^* \end{bmatrix} = 0,$$

$$\int_0^T v_i^*(\tau)d\tau = v_i,\ i = 1, ..., N,$$

где $x_*(t)$ — решение уравнения (15), а $\lambda_*(t)$ — решение уравнения (16).

5. ИНТЕГРАЛЬНОЕ ОГРАНИЧЕНИЕ ТИПА РАВЕНСТВА НА СУММАРНЫЙ ВНЕШНИЙ ПОТОК

Запишем его:

$$\sum_{i=1}^{N} \int_0^T \alpha_i v_i(\tau)d\tau = V, \qquad (19)$$

где α_i — веса компонент потока $v(t)$. Представим условие оптимальности.

Если управление

$$v_*(t) = \{v_1^*(t), ..., v_N^*(t)\}$$

оптимально в задаче (2), (3), (19), то найдется такое $\lambda_* \geqslant 0$, для которого

$$x_*(t) + \frac{\partial F(t, \lambda_*(t), v_*(t))}{\partial v} + \lambda_* \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_N \end{bmatrix} = 0,$$

$$\sum_{i=1}^{N} \int_0^T \alpha_i v_i^*(\tau)d\tau = V,$$

где $x_*(t)$ — решение уравнения (15), а $\lambda_*(t)$ — решение уравнения (16).

Таким образом, мы получили явный вид необходимых условий оптимальности управляющих воздействий для многоканальной сети связи.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Полученные нами условия являются необходимыми, но не достаточными условиями оптимальности управления многоканальной сетью связи. Классический подход к отысканию достаточных условий состоит в использовании функции Лагранжа, для которой рассматривается вторая вариация (производная Фреше) при специальных наборах множителей. Мы предлагаем другой метод: определенная итерационная процедура, в которой используются решения вспомогательных задач, как будет показано в следующей публикации, сходится к оптимальному управлению.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гуревич И.М.* Методика оценки времени передачи сообщений. Методическое пособие. — М.: Мос. ФАП АСУ, 1980.
2. Протоколы и методы коммутации в вычислительных сетях / Под ред. С.И. Самойленко. — М., 1986.
3. *Гуревич И.М.* Автоматизированные системы управления связью. Автоматизация проектирования. — М.: ИПК МЛСС, 1987.
4. *Гуревич И.М.* Проектирование специальных систем связи. Динамические модели управления связью. — М., 1989.
5. *Исмаилов И.Г.* О приближенном построении оптимальных управлений многоканальными сетевыми системами // VI Всесоюзное совещание «Управление многосвязными системами». — Суздаль, 1990. — С. 67—68.
6. *Исмаилов И.Г.* Управление динамической моделью многоканальной сети связи // III Всесоюзное совещание по распределенным автоматизированным системам массового обслуживания. — Винница, 1990.

Статья представлена к публикации членом редколлегии В.Н. Бурковым.

Исмаилов Илхам Гусейнкулу оглы — канд. физ.-мат. наук, ст. науч. сотрудник, Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, г. Москва,
☎ (495) 334-79-00, ✉ iig07@mail.ru.