

СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ПРОЦЕДУР ПЕРЕВЫБОРКИ ПРИ РЕАЛИЗАЦИИ ФИЛЬТРОВ ЧАСТИЦ

А. М. Исаев

АО «Концерн «ЦНИИ «Электроприбор», г. Санкт-Петербург

✉ itmo_student@mail.ru

Аннотация. Рассматриваются алгоритмы решения нелинейных задач фильтрации, основанные на последовательных методах Монте-Карло. Приведена схема построения простейшего фильтра частиц и пояснена основная проблема, возникающая при его реализации, – вырождение алгоритма. Описана суть процедур существенной перевыборки, предназначенных для преодоления этого недостатка. Проведен обзор получивших наибольшее распространение при решении задач обработки навигационной и траекторной информации процедур перевыборки. Приведен критерий, используемый для определения момента времени проведения перевыборки. Выполнено аналитическое сопоставление процедур перевыборки путем анализа соответствующих им псевдокодов. На примерах решения задачи оценивания процесса, представляющего собой сумму полинома и второго интеграла от белого шума, по нелинейным измерениям и решения задачи траекторного слежения проведено численное сопоставление схем перевыборки путем проведения моделирования с применением метода статистических испытаний.

Ключевые слова: байесовский стохастический подход, нелинейная фильтрация, методы Монте-Карло, последовательная существенная перевыборка, фильтры частиц.

ВВЕДЕНИЕ

Специфика задач, связанных с обработкой навигационной информации, наведения и траекторного слежения, заключается в необходимости получения при их решении не только оценок вектора неизвестных параметров, но и количественных характеристик, определяющих точность, с которой они получены. В связи с этим алгоритмы, синтезируемые для их решения, в большинстве случаев строятся в рамках так называемого байесовского стохастического подхода [1–7], обеспечивающего возможность вычисления оптимальной в среднеквадратическом смысле оценки и соответствующей ей расчетной матрицы ковариаций погрешностей оценивания. В случае, когда расчетные матрицы ковариаций согласованы с их действительными значениями, алгоритм принято называть состоятельным [5].

Многие задачи обработки навигационной и траекторной информации являются нелинейными,

и для их решения в общем случае не удастся построить алгоритм, вырабатывающий оптимальную оценку в режиме реального времени по причине его высокой вычислительной сложности. В связи с этим разработчики синтезируют различные субоптимальные алгоритмы, основанные на тех или иных упрощениях. При построении субоптимальных алгоритмов стараются, чтобы они были простыми в вычислительном отношении, состоятельными, а их точность была бы близка к потенциальной точности, т.е. к точности, соответствующей оптимальному алгоритму.

Наиболее сложными для решения практическими задачами традиционно считаются те, в которых апостериорная функция плотности распределения вероятности (ФПРВ) в процессе своей эволюции принимает сложный многоэкстремальный вид [8]. Алгоритмы калмановского типа (АКТ) [4, 9], получившие наибольшее распространение в задачах обработки навигационной и траекторной информации, при их решении зачастую



оказываются неработоспособными. Для решения таких задач широкое применение получили так называемые последовательные методы Монте-Карло (ММК), называемые также фильтрами частиц (ФЧ), и их различные модификации [10–16]. Отличительная особенность ФЧ заключается в возможности анализировать методическую ошибку, порожденную используемой аппроксимацией, в ходе нахождения оценки, и добиваться нужной точности за счет изменения соответствующих настроек фильтра [17]. При достижении ФЧ точности, близкой к потенциальной, алгоритм также является состоятельным.

При всех своих достоинствах ФЧ обладают рядом недостатков. Основной из них, называемый проблемой вырождения [18], заключается в том, что по мере обработки измерений значение одного из весов неизбежно станет близким к единице, а значения остальных – близкими к нулю; ФЧ в таком случае оказывается неработоспособным. Преодолеть проблему вырождения можно увеличением количества используемых в алгоритме частиц, однако вычислительная сложность ММК в таком случае становится значительной [19]. Это не только затрудняет реализацию ФЧ в режиме реального времени, но в ряде случаев делает невозможным применение алгоритма даже в режиме камеральной обработки.

Преодолеть упомянутый недостаток ФЧ в большинстве случаев удается благодаря применению так называемых процедур существенной переверборки [20], основная суть которой заключается в перераспределении частиц из областей близких к нулю значений ФПРВ в области, где эти значения отличны от нуля. Анализ современных публикаций показал, что наиболее широкое применение при построении ФЧ получили мультиномиальная [21], стратифицированная [22], систематическая [23], остаточная [24] и остаточная систематическая [19] переверборки. При этом следует отметить, что вопросу отличия этих процедур друг от друга, а также их преимуществ и недостатков должного внимания в литературе не уделяется. Заметим, что в отечественных изданиях не было выявлено ни одной работы по обсуждаемой тематике, что в том числе послужило мотивацией для написания настоящей статьи.

Работа посвящена описанию перечисленных выше процедур существенной переверборки, изложению общих принципов их реализации при построении ФЧ, а также проведению их сравнительного анализа. Результаты исследования могут быть полезны разработчикам, имеющим дело с обработ-

кой измерительной информации, как для анализа точности субоптимальных алгоритмов фильтрации, так и при построении алгоритмов решения сложных нелинейных задач, в которых традиционные АКТ оказываются неработоспособны.

Структура работы следующая. В § 1 в общем виде формулируется постановка рассматриваемой задачи нелинейной фильтрации, а также оптимальный алгоритм ее решения. Построению простейшего ФЧ, основанного на последовательных методах Монте-Карло, посвящен § 2 настоящей работы. В § 3 описываются различные процедуры существенной переверборки, традиционно применяемые при построении ФЧ, а § 4 посвящен их сопоставлению. Основные выводы приведены в заключении.

1. ПОСТАНОВКА ИССЛЕДУЕМОЙ ЗАДАЧИ И ЕЕ ОПТИМАЛЬНОЕ РЕШЕНИЕ

1.1. Постановка задачи

В работе рассматривается следующая задача нелинейной фильтрации n -мерной марковской случайной последовательности

$$x_k = f_k(x_{k-1}) + \Gamma_k w_k, \quad (1)$$

где k – индекс дискретного времени; x_0 – n_x -мерный случайный гауссовский вектор с ФПРВ $p(x_0) = N(x_0; \bar{x}_0, P_0)$, здесь и далее обозначение $N(a; \bar{a}, A)$ используется для ФПРВ гауссовского случайного вектора a с математическим ожиданием $\bar{a}$ и матрицей ковариаций A ; w_k – n_w -мерный центрированный дискретный гауссовский белый шум с известной матрицей ковариаций Q_k размерности $n_w \times n_w$, не зависящий от x_0 ; $f_k(\cdot)$ – известная нелинейная n_x -мерная вектор-функция, описывающая динамику вектора состояний; Γ_k – известная матрица размерности $n_x \times n_w$.

Ставится задача оценивания последовательности (1) по m_y -мерным дискретным измерениям вида

$$y_k = h_k(x_k) + v_k, \quad (2)$$

где $h_k(\cdot)$ – известная нелинейная m_y -мерная вектор-функция, описывающая модель измерений; v_k – m_y -мерный центрированный дискретный гауссовский белый шум, не зависящий от x_0 и w_k , с известной матрицей ковариации R_k .

1.2. Оптимальное решение

Известно, что при решении задачи фильтрации в рамках байесовского подхода оптимальная в среднеквадратическом смысле оценка и соответствующая ей условная матрица ковариаций $P_k^{\text{opt}}(Y_k)$ определяются в виде [2, 4]:

$$\hat{x}_k^{\text{opt}}(Y_k) = \int x_k p(x_k / Y_k) dx_k, \quad (3)$$

$$P_k^{\text{opt}}(Y_k) = E_{p(x_k / Y_k)} \left\{ (x_k - \hat{x}_k^{\text{opt}}(Y_k)) (x_k - \hat{x}_k^{\text{opt}}(Y_k))^T \right\}, \quad (4)$$

где $p(x_k / Y_k)$ – апостериорная (условная) к набору измерений $Y_k = [y_1^T, y_2^T, \dots, y_k^T]^T$ ФПРВ для вектора x_k , а E – знак математического ожидания с нижним индексом, поясняющим, по какой ФПРВ оно вычисляется. Подчеркнем, что такая оптимальная оценка минимизирует условную (4) и безусловную матрицу ковариаций погрешностей оценивания, определяемую как [4]

$$\bar{P}_k^{\text{opt}} = E_{p(x_k, Y_k)} \left\{ (x_k - \hat{x}_k^{\text{opt}}(Y_k)) (x_k - \hat{x}_k^{\text{opt}}(Y_k))^T \right\}. \quad (5)$$

В приведенных выше соотношениях условная матрица ковариаций (4) характеризует текущую погрешность оценивания, соответствующую конкретной реализации измерений Y_k , а безусловная матрица ковариаций (5) – погрешность, рассчитанную путем вероятностного осреднения по всему возможному набору измерений.

Ясно, что для нахождения оценки вида (3) необходимо располагать апостериорной ФПРВ $p(x_k / Y_k)$, для которой справедливо выражение

$$p(x_k / Y_k) = \frac{p(y_k / x_k) p(x_k / Y_{k-1})}{\int p(y_k / x_k) p(x_k / Y_{k-1}) dx_k}, \quad (6)$$

где $p(y_k / x_k)$ – функция правдоподобия; $p(x_k / Y_{k-1})$ – плотность прогноза.

2. ФИЛЬТРЫ ЧАСТИЦ

2.1. Простейший последовательный метод Монте-Карло при решении задач оценивания

При решении задач оценивания ММК трактуется как метод аппроксимации самой апостериорной ФПРВ, которую на каждом шаге k можно представить в виде [10]

$$p(x_k / Y_k) \approx \sum_{n=1}^N \tilde{\omega}_k^{(n)} \delta(x_k - x_k^{(n)}), \quad \sum_{n=1}^N \tilde{\omega}_k^{(n)} = 1, \quad (7)$$

где $\delta(\cdot)$ – многомерная дельта-функция; $x_k^{(n)}$ – набор из $n = \overline{1, N}$ независимых реализаций случайного вектора, в простейшем случае $x_k^{(n)} \sim p(x_k / x_{k-1}^{(n)}, Y_{k-1})$; $\tilde{\omega}_k^{(n)}$ – нормированные веса, определяемые как

$$\tilde{\omega}_k^{(n)} = \omega_k^{(n)} / \sum_{n=1}^N \omega_k^{(n)},$$

а $\omega_k^{(n)}$ – ненормированные веса, для которых, используя рекуррентное соотношение для апостериорной ФПРВ (6) и учитывая марковский характер оцениваемой последовательности (1), можно получить рекуррентное выражение

$$\omega_k^{(n)} = p(y_k / x_k^{(n)}) \omega_{k-1}^{(n)},$$

где $p(y_k / x_k^{(n)})$ вычисляется с точностью до нормирующей константы c согласно выражению

$$p(y_k / x_k^{(n)}) = c \exp \left\{ -0.5 \left((y_k - h_k(x_k^{(n)}))^T R^{-1} (y_k - h_k(x_k^{(n)})) \right) \right\}.$$

Подставляя аппроксимацию (7) в выражения (3) и (4) и используя свойства дельта-функции, несложно показать, что для нахождения оптимальной оценки и соответствующей ей матрицы ковариаций могут быть применены приближенные равенства

$$\hat{x}_k^{\text{opt}}(Y_k) \approx \hat{x}_k(Y_k) = \sum_{n=1}^N \tilde{\omega}_k^{(n)} x_k^{(n)}, \quad (8)$$

$$P_k^{\text{opt}}(Y_k) \approx P_k(Y_k) = \sum_{n=1}^N \tilde{\omega}_k^{(n)} x_k^{(n)} (x_k^{(n)})^T - \hat{x}_k(Y_k) (\hat{x}_k(Y_k))^T.$$

Алгоритм, основанный на приведенных выше выражениях, в котором реализации $x_k^{(n)}$ имеют вид $x_k^{(n)} \sim p(x_k / x_{k-1}^{(n)}, Y_{k-1})$, является по своей сути простейшим фильтром частиц. Псевдокод для такого алгоритма можно найти, например, в работе [25].

При этом следует отметить, что при формировании реализаций $x_k^{(n)}$ в формуле (7) можно использовать другую, отличную от $p(x_k / Y_{k-1})$, функцию $\pi(x_k / Y_k)$, которая получила название существенной функции. Как отмечается в работе [26], выбор вида существенной функции весьма важен при построении ФЧ, однако этот вопрос выходит за рамки настоящей работы. Особенности применения различных существенных функций обсуждаются в ряде работ (см., например, [27]).



2.2. Проблема вырождения

Основное достоинство ФЧ, основанных на ММК, заключается в том, что при $N \rightarrow \infty$ погрешность вычисления оценки (3) и матрицы ковариаций (4) стремится к нулю, что создает предпосылки для достижения ФЧ любой точности, вплоть до потенциальной, соответствующей оптимальному в среднеквадратическом смысле алгоритму. Однако при всех своих преимуществах ФЧ обладают также и рядом недостатков. Основной из них – так называемая проблема вырождения алгоритма. Поясним далее ее основную суть.

Ясно, что при формировании на каждом k -м шаге алгоритма выборки $x_k^{(n)}$ часть ее реализаций неизбежно будет попадать в области с близкими к нулю значениями апостериорной ФПРВ. Веса $\omega_k^{(n)}$, соответствующие таким реализациям, также будут близки к нулю. Как показано в работе [18], при увеличении числа измерений число реализаций $x_k^{(n)}$, веса которых существенно отличны от нуля, неизбежно будет сокращаться, пока не останется лишь одна, нормированный вес которой будет близок к единице. Понятно, что вычисленная таким образом оценка (8) ничего общего с оптимальной оценкой иметь не будет.

Проблема вырождения алгоритма может быть преодолена путем увеличения числа моделируемых в ФЧ реализаций. Однако в таком случае существенно возрастает вычислительная сложность алгоритма, что затрудняет его реализацию не только в режиме реального времени, но зачастую и в режиме камеральной обработки, не накладывающем жестких ограничений на объем вычислений.

Другой путь преодоления проблемы вырождения – использование при построении ФЧ процедур существенной перевыборки, о которых далее и пойдет речь.

3. ПРОЦЕДУРЫ СУЩЕСТВЕННОЙ ПЕРЕВЫБОРКИ

3.1. Основная суть процедур существенной перевыборки

Основная суть существенной перевыборки заключается в перераспределении частиц $x_k^{(n)}$, $n = \overline{1, N}$, т. е. в «размещении» их в области, где апостериорная ФПРВ существенно отлична от нуля, что определяется соответствующими значениями весов $\tilde{\omega}_k^{(n)}$. Это достигается путем моделирования новой выборки (путем перевыборки) ча-

стиц $\tilde{x}_k^{(m)}$, $m = \overline{1, M}$, в соответствии с дискретным законом распределения, заданным в виде набора из N частиц $x_k^{(n)}$, $n = \overline{1, N}$, и соответствующих им вероятностей (весов) $\Pr(\tilde{x}_k^{(m)} = x_k^{(n)}) = \tilde{\omega}_k^{(n)}$. Важно подчеркнуть, что перевыборка $\tilde{x}_k^{(m)}$, $m = \overline{1, M}$, формируется из исходного набора $x_k^{(n)}$, $n = \overline{1, N}$, что позволяет сохранить рекуррентный характер алгоритма.

Отметим, что в общем случае объем исходной выборки N и объем получаемой выборки M могут быть разными, однако на практике в большинстве случаев принимают $M = N$. Поскольку вид новой выборки $\tilde{x}_k^{(m)}$, $m = \overline{1, M}$, соответствует виду аппроксимации (7), то в результате для нее можем записать новую аппроксимацию с равными весами в виде

$$p(x_k / Y_k) \approx \sum_{m=1}^M \tilde{q}_k^{(m)} \delta(x_k - \tilde{x}_k^{(m)}), \quad \tilde{q}_k^{(m)} = 1/M. \quad (9)$$

Отметим, что в начальный момент времени ($k = 0$), веса, соответствующие реализациям $x_0^{(n)}$, также будут одинаковы, т. е. по сути ФПРВ $p(x_0)$ представляется в виде аппроксимации (9). Таким образом, процедуру существенной перевыборки можно трактовать как своего рода перезапуск ФЧ.

К настоящему времени предложено множество разнообразных способов организации процедур повторной перевыборки [20]. Наиболее широкое применение при построении ФЧ получили мультиномиальная [21], стратифицированная [22], остаточная [24], систематическая [23] и остаточная систематическая [19] перевыборки. Как показал детальный анализ ключевых работ, в которых эти схемы были предложены, отличаются они между собой лишь способом формирования реализаций $\tilde{x}_k^{(m)}$. Далее приведем описание перечисленных выше процедур перевыборки, получивших наибольшее распространение при решении задач обработки навигационной и траекторной информации.

3.2. Мультиномиальная, стратифицированная и систематическая процедуры перевыборки

Мультиномиальная повторная перевыборка (*multinomial resampling*) – один из первых предложенных способов проведения повторной перевыборки. Иногда такую процедуру также называют

простой случайной перевыборкой (*simple random resampling*). Основная ее идея заключается в моделировании набора из M реализаций $u_k^{(m)}$, $m = \overline{1, M}$, случайной величины u_k , равномерно распределенной на интервале $U = (0, 1]$. Далее для каждой реализации $u_k^{(m)}$ перебираются реализации $x_k^{(n)}$, $n = \overline{1, N}$, до тех пор, пока не находится такая, для которой соответствующий ей нормализованный вес $\tilde{\omega}_k^{(n)}$ удовлетворял бы выражению

$$S_k^{(n-1)} < u_k^{(m)} \leq S_k^{(n)}, \text{ где } S_k^{(n)} = \sum_{n=1}^n \tilde{\omega}_k^{(n)}. \quad (10)$$

Стратифицированная перевыборка (*stratified resampling*) и систематическая перевыборка (*systematic resampling*) – еще два распространенных варианта организации процедуры повторной существенной перевыборки. Для моделирования реализаций $\tilde{x}_k^{(m)}$ в них, как и в описанной ранее мультиномиальной перевыборке, используется выражение (10). Основное же их отличие друг от друга заключается в способе формирования реализаций $u_k^{(m)}$.

В стратифицированной перевыборке интервал $U = (0, 1]$ делится на M равных полуинтервалов $U^{(m)}$, $m = \overline{1, M}$, называемых стратами:

$$U = U^{(1)} \cup U^{(2)} \cup \dots \cup U^{(M)} = \\ = (0, 1/M] \cup (1/M, 2/M] \cup \dots \cup (1-1/M, 1].$$

Каждая реализация $u_k^{(m)}$, $m = \overline{1, M}$, формируется независимо как равномерно распределенная на соответствующей страте величина.

В систематической перевыборке $u_k^{(1)}$ вычисляется аналогичным стратифицированной перевыборке образом, т. е. как равномерно распределенная на интервале $(0, 1/M]$ случайная величина, а все остальные реализации $u_k^{(m)}$, $m = \overline{2, M}$, рассчитываются детерминированным образом как

$$u_k^{(m)} = u_k^{(1)} + \frac{m-1}{M}, \quad m = \overline{2, M}.$$

Заметим, что в систематической перевыборке количество обращений к датчику случайных чисел существенно меньше, чем в стратифицированной и мультиномиальной, следовательно, можно сделать предположение, что она экономичнее с точки зрения объема вычислений.

3.3. Остаточная и остаточная систематическая процедуры перевыборки

Остаточная перевыборка (*residual resampling*) [24] – еще один вариант перевыборки, который принято относить к традиционным. Она состоит из двух этапов.

На первом этапе такой процедуры каждая реализация $x_k^{(n)}$, $n = \overline{1, N}$, воспроизводится (выбирается в качестве реализации $\tilde{x}_k^{(m)}$) $M_{1,k}^{(n)}$ раз, где

$$M_{1,k}^{(n)} = \left\lfloor M \tilde{\omega}_k^{(n)} \right\rfloor, \quad (11)$$

а символ $\left\lfloor \cdot \right\rfloor$ означает округление до ближайшего целого числа в меньшую сторону.

Из анализа выражения (11) можно заметить, что частицы, веса которых $\tilde{\omega}_k^{(n)} < 1/M$, воспроизводиться не будут, так как величина $M_{1,k}^{(n)}$, соответствующая им, будет равна нулю. Общее количество частиц, полученное на первом этапе, будет

$$M_{1,k} = \sum_{n=1}^N M_{1,k}^{(n)}.$$

Второй этап процедуры остаточной перевыборки основан на использовании так называемых остаточных весов $\{\tilde{\omega}_k^{(n)}\}$, для которых справедливо выражение

$$\{M \tilde{\omega}_k^{(n)}\} = M \tilde{\omega}_k^{(n)} - \left\lfloor M \tilde{\omega}_k^{(n)} \right\rfloor. \quad (12)$$

Заменив в формуле (12) $\left\lfloor M \tilde{\omega}_k^{(n)} \right\rfloor$ на $M_{1,k}^{(n)}$ и разделив левую и правую часть на M , получим:

$$\{\tilde{\omega}_k^{(n)}\} = \tilde{\omega}_k^{(n)} - \frac{M_{1,k}^{(n)}}{M}. \quad (13)$$

На втором этапе процедуры остаточной перевыборки для получения оставшихся $M_{2,k} = M - M_{1,k}$ реализаций $\tilde{x}_k^{(m)}$ используется любая из описанных ранее случайных повторных перевыборок (мультиномиальная или стратифицированная), для чего остаточные веса (13) предварительно нормируются с использованием выражения

$$\{\tilde{\omega}_k^{(n)}\}^* = \{\tilde{\omega}_k^{(n)}\} \frac{M}{M - M_{1,k}}.$$

Интуитивно понятно, что двухэтапный характер остаточной перевыборки влечет за собой дополнительные вычислительные затраты. Для пре-



одоления такого недостатка была предложена остаточная систематическая перевыборка.

Остаточная систематическая перевыборка (*residual systematic resampling*) – модификация остаточной перевыборки, на втором этапе которой используется не случайная, а систематическая перевыборка. В таком случае можно объединить два этапа перевыборки в один, в котором каждая реализация $x_k^{(n)}$, $n = \overline{1, N}$, воспроизводится $M_k^{(n)} = M_{1,k}^{(n)}$ раз в соответствии с выражением

$$M_k^{(n)} = \left\lfloor M \left(\tilde{\omega}_k^{(n)} - \Delta u^{(n)} \right) \right\rfloor + 1,$$

$$\Delta u^{(n)} = \Delta u^{(n-1)} + \frac{M_{1,k}^{(n-1)}}{M} - \tilde{\omega}_k^{(n-1)},$$

где $\Delta u_k^{(1)}$ вычисляется аналогичным для $u_k^{(1)}$ в систематической перевыборке образом, т. е. как равномерно распределенная на полуинтервале $(0, 1/M]$ случайная величина.

Как отмечено в работе [19], результаты формирования реализаций $\tilde{x}_k^{(n)}$ в систематической и остаточной систематической перевыборках будут полностью совпадать, а отличия этих процедур могут проявиться лишь в уровне их вычислительной загрузки: так как в остаточной систематической перевыборке не требуется проверять выполнение неравенства (10), а количество рассчитываемых значений $\Delta u^{(n)}$ существенно меньше, чем $u^{(n)}$, ожидается, что и уровень вычислительной сложности такой процедуры будет ниже.

3.4. Критерий проведения перевыборки

Отметим, что проведение перевыборки на каждом k -м шаге, во-первых, увеличивает и без того значительную вычислительную сложность ФЧ, а во-вторых, может привести к ситуации, когда выборка будет состоять из одного единственного элемента с весом $1/N$, который в выборке повторяется N раз. Эта проблема известна как «обеднение» выборки (*sample impoverishment*) [20], на практике для определения моментов времени проведения перевыборки рассчитывают специальные критерии. Наибольшее распространение получил так называемый критерий эффективного размера выборки (*effective sample size*)

$$N_k^E \approx \left(\sum_{n=1}^N (\tilde{\omega}_k^{(n)})^2 \right)^{-1}.$$

Процедуру перевыборки запускают, когда критерий N_k^E принимает значение ниже заданного порога N_k^{Th} . Как отмечается в работе [20], критерий может принимать значения $1 \leq N_k^E \leq N$. При выборе $N_k^{Th} = N$ перевыборка будет выполняться на каждом шаге. С другой стороны, в случае выбора $N_k^{Th} < 1$ процедура перевыборки не запустится никогда. Величина N_k^E характеризует количество элементов выборки, веса для которых существенны (весами которых нельзя пренебречь при построении оценок).

4. СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ПРОЦЕДУР ПЕРЕВЫБОРКИ

4.1. Аналитическое сопоставление

Далее проведем сравнение описанных выше процедур существенной перевыборки. Сделаем это сначала аналитически, анализируя соответствующие им псевдокоды, которые можно найти, например, в работе [20]. Основные выявленные отличия сопоставляемых процедур приведены в таблице.

Сопоставляя отличия приведенных в таблице схем перевыборки, можно заметить, что в систематической и остаточной систематической процедурах количество обращений к датчику случайных чисел наименьшее. Помимо этого, такие схемы наиболее простые с точки зрения количества вычислений.

4.2. Методический пример

Далее проведем сопоставление ФЧ, построенных с использованием различных процедур перевыборки, на примере решения задачи оценивания процесса, представляющего собой сумму полинома первой степени и второго интеграла от централизованного белого шума, по нелинейным измерениям.

Конкретизируем оцениваемую последовательность (1) в виде

$$x_k = \Phi x_{k-1} + \Gamma w_k, \quad (14)$$

где для матриц Φ , Γ и матрицы ковариаций Q централизованного гауссовского порождающего белого шума w_k можем записать:

$$\Phi = \begin{bmatrix} 1 & \Delta t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \Gamma = q\sqrt{\Delta t} \begin{bmatrix} \frac{\Delta t}{\sqrt{3}} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \quad Q = q^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Отличия процедур существенной перевыборки

Критерии сопоставления	Процедура существенной перевыборки				
	Мультиноми- альная	Стратифициро- ванная	Систематическая	Остаточная	Остаточная систематическая
Количество этапов процедуры перевыборки	1	1	1	2	1
Количество обращений к датчику случайных чисел	M	M	1	$M_{2,k}$	1
Асимптотическая вычислительная сложность	$O(MN)$	$O(M)$	$O(M)$	$O(N) + O(M_{2,k})$	$O(N)$
Минимальное количество воспроизведений любой из частиц	0	если $\tilde{\omega}_k^{(n)} > 1/M$, то $\lfloor M\tilde{\omega}_k^{(n)} \rfloor - 1$, иначе 0	$\lfloor M\tilde{\omega}_k^{(n)} \rfloor$	$\lfloor M\tilde{\omega}_k^{(n)} \rfloor$	$\lfloor M\tilde{\omega}_k^{(n)} \rfloor + 1$
Максимальное количество воспроизведений любой из частиц	N	$\lfloor M\tilde{\omega}_k^{(n)} \rfloor + 2$	$\lfloor M\tilde{\omega}_k^{(n)} \rfloor + 1$	$\lfloor M\tilde{\omega}_k^{(n)} \rfloor + M_{2,k}$	$\lfloor M\tilde{\omega}_k^{(n)} \rfloor + 1$

Здесь q^2 – интенсивность исходного белого шума; Δt – интервал дискретизации. Такая модель, в частности, нередко используется для описания ошибок измерителей, например погрешностей навигационной системы счисления пути по каждой координате [28], а также для приближенного описания аномалий уклонений силы тяжести (УСТ) в задаче определения УСТ [29].

Предположим, что нелинейные дискретные измерения имеют вид

$$y_k = h(x_k) + v_k = a_1 + a_2 x_{1,k} + a_3 x_{1,k}^2 + a_4 x_{1,k}^3 + v_k,$$

где a_1, a_2, a_3, a_4 – известные величины.

Моделирование проведем, используя параметры $\bar{x}_0 = [-5 \ 0.5]^T$, $P_0 = \text{diag}[\sigma_{0,1}^2 \ \sigma_{0,2}^2]$, $\sigma_{0,1} = 2,5$, $\sigma_{0,2} = 0,05$, $q = 0,05$, $\Delta t = 1$, $k = \overline{1, 30}$, $r = 0,1$, $a_1 = 0,0875$, $a_2 = -0,1825$, $a_3 = 0,01$, $a_4 = 0,01$.

Реализуем следующие алгоритмы:

- ФЧ без процедур перевыборки при $N = 10000$ ($\mu = 1$, далее – алгоритм 1);
- ФЧ с различными процедурами перевыборки при $N = 1000$, $N_k^{Th} = N^{Th} = 0,2 \cdot N$;
 - ФЧ ($\mu = 2$, далее – алгоритм 2) с процедурой мультиномиальной перевыборки;
 - ФЧ ($\mu = 3$, далее – алгоритм 3) с процедурой стратифицированной перевыборки;
 - ФЧ ($\mu = 4$, далее – алгоритм 4) с процедурой систематической перевыборки;
 - ФЧ ($\mu = 5$, далее – алгоритм 5) с процедурой остаточной перевыборки;

– ФЧ ($\mu = 6$, далее – алгоритм 6) с процедурой остаточной систематической перевыборки.

Сопоставление алгоритмов будем проводить с применением метода статистических испытаний по методике, описанной в работе [30]. Для каждого реализованного μ -го алгоритма будем вычислять действительные G_k^μ и расчетные $\tilde{G}_k^\mu$ матрицы ковариаций

$$G_k^\mu \approx \frac{1}{L} \sum_{j=1}^L (x_k^{(j)} - \hat{x}_k^{\mu(j)}(Y_k^{(j)}))(x_k^{(j)} - \hat{x}_k^{\mu(j)}(Y_k^{(j)}))^T, \quad (15)$$

$$\tilde{G}_k^\mu \approx \frac{1}{L} \sum_{j=1}^L P_k^\mu(Y_k^{(j)}), \quad (16)$$

где $x_k^{(j)}, Y_k^{(j)}, j = \overline{1, L}$ – реализации случайных последовательностей, полученные путем моделирования согласно выражениям (1) и (2); L – общее число реализаций, $\hat{x}_k^\mu(Y_k^{(j)}), P_k^\mu(Y_k^{(j)})$ – оценки и соответствующие им расчетные матрицы ковариаций для алгоритма с индексом μ .

Для оценки вычислительных затрат сопоставляемых алгоритмов будем рассчитывать коэффициент

$$\Delta T^\mu = \frac{\tau^\mu - \tau^*}{\tau^*}, \quad \tau^\mu = \frac{1}{L} \sum_{j=1}^L t_j^\mu, \quad \tau^* = \frac{1}{L} \sum_{j=1}^L t_j^*,$$

где t_j^μ – время, затраченное вычислителем на решение задачи оценивания с использованием анализируемого алгоритма, а t_j^* – время, соответствующее алгоритму, относительно которого проводится сопоставление вычислительной сложности.

На рис. 1 приведены результаты вычисления на основе выражений (15), (16) действительных ($\sqrt{[G_k^\mu]_{1,1}}$, сплошные линии) и расчетных ($\sqrt{[\tilde{G}_k^\mu]_{1,1}}$, пунктирные линии) среднеквадратических погрешностей (СКП) оценивания первой компоненты вектора x_k для каждого из реализованных алгоритмов при $L=1\,000$. Обозначение $[A]_{i,i}$ здесь и далее используется для i -го диагонального элемента матрицы A . Красный цвет соответствует алгоритму 1, черный – алгоритму 2, синий – алгоритму 3, пурпурный – алгоритму 4, зеленый – алгоритму 5, оранжевый – алгоритму 6.

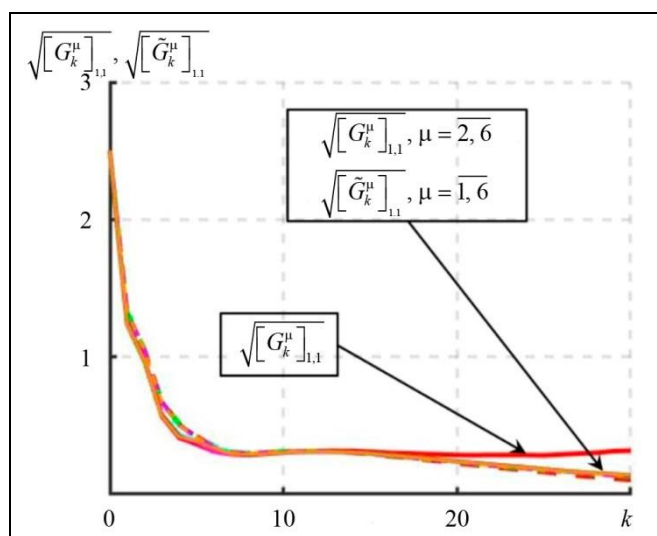


Рис. 1. Результаты вычисления действительных и расчетных СКП

Результаты моделирования показывают, что все ФЧ, построенные с использованием различных процедур переывборки при $N^*=1\,000$, обеспечивают необходимую точность и являются состоятельными. При уменьшении количества частиц все алгоритмы перестают удовлетворять свойству состоятельности, а их точность снижается. Увеличение же количества частиц по сравнению с N^* в ФЧ, построенных с использованием процедур переывборки, не оказывает влияния на результаты моделирования, что подтверждает факт достижения ими потенциальной точности.

Построенный без процедур переывборки даже при $N=10\,000$ ФЧ уступает в точности ФЧ с переывборкой и не обеспечивает выполнение свойств состоятельности.

Анализ вычислительных затрат показал, что среди ФЧ, построенных с использованием процедур существенной переывборки, наиболее простыми являются Алг. 4 и Алг. 6, вычислительная нагрузка которых сопоставима. Вычислительные нагрузки Алг. 2, Алг. 3 и Алг. 5 также близки между собой и на $\approx 5\%$ выше, чем вычислительная нагрузка ФЧ, построенных на основе систематических переывборок.

Отметим, что при увеличении размерности решаемой задачи и времени моделирования разница в вычислительной нагрузке также может измениться. В связи с этим далее проведем сопоставление, аналогичное описанному выше, на примере решения задачи траекторного слежения в ее простейшей постановке, описанной, например, в работах [5,31].

4.3. Применение ФЧ при решении задачи слежения за подвижным объектом

Рассмотрим правостороннюю трехмерную локальную декартову систему координат (рис. 2) с началом в точке O , оси OX и OY которой перпендикулярны и лежат в горизонтальной плоскости, а ось OZ ортогональна им и направлена вверх. Считается, что в начале системы координат расположен некий радар, способный в дискретные моменты времени k измерять дальность d_k до подвижных объектов, их угол места ψ_k и азимут θ_k .

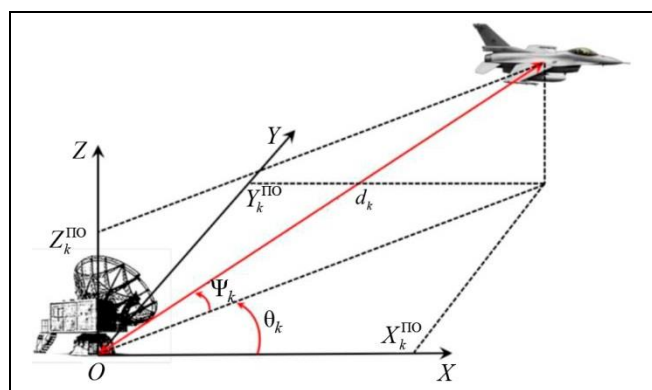


Рис. 2. Расположение радара и подвижного объекта в системе координат $OXYZ$

В начальный момент времени ($k=0$) радар обнаруживает некоторый объект с неизвестными координатами $X_0^{PO}, Y_0^{PO}, Z_0^{PO}$, динамика которого может быть описана с использованием уравнения (14) [31], где

$$x_k = \begin{bmatrix} X_k^{PO} & Y_k^{PO} & Z_k^{PO} & V_k^X & V_k^Y & V_k^Z \end{bmatrix}^T, \\ \Phi = \begin{bmatrix} I_3 & \Delta t I_3 \\ 0_3 & I_3 \end{bmatrix}, \quad \Gamma = \begin{bmatrix} \frac{\Delta t^2}{2} I_3 \\ \Delta t I_3 \end{bmatrix}, \quad (14) \\ Q = I_3(\sigma^a)^2,$$

V_k^X, V_k^Y, V_k^Z – проекции неизвестного вектора скорости объекта на оси OX, OY и OZ соответственно, I_3 и 0_3 – единичная и состоящая из нулей матрицы размерности три, а σ^a – известная величина.

Учитывая расположение радара в начале системы координат, для измерений y_k запишем:

$$y_k = \begin{bmatrix} d_k \\ \theta_k \\ \psi_k \end{bmatrix} = h_k(x_k) + v_k = \begin{bmatrix} \sqrt{(X_k^{\text{ПО}})^2 + (Y_k^{\text{ПО}})^2 + (Z_k^{\text{ПО}})^2} \\ \arctan(Y_k^{\text{ПО}} / X_k^{\text{ПО}}) \\ \arctan\left(\frac{Z_k^{\text{ПО}}}{\sqrt{(X_k^{\text{ПО}})^2 + (Y_k^{\text{ПО}})^2}}\right) \end{bmatrix} + v_k. \quad (18)$$

Требуется по измерениям (18) оценить координаты $X_0^{\text{ПО}}$, $Y_0^{\text{ПО}}$, $Z_0^{\text{ПО}}$ объекта, являющиеся компонентами вектора x_k , описываемого выражениями (14), (17).

Моделирование проведем, используя следующие параметры: истинные начальные координаты объекта: $X_k^{\text{И}} = Y_k^{\text{И}} = 50$ км, $Z_0^{\text{И}} = 5$ км; проекции истинной скорости на оси OX , OY и OZ в начальный момент времени: $V_0^{X,\text{И}} = V_0^{Y,\text{И}} = 250$ м/с, $V_0^{Z,\text{И}} = 0$ м/с; считается, что проекции вектора скорости объекта V_0^X , V_0^Y , V_0^Z являются независимыми равномерно распределенными случайными величинами $p(V_0^{XO}) \sim U[150; 350]$ м/с, $p(V_0^{YO}) \sim U[150; 350]$ м/с, $p(V_0^{ZO}) \sim U[0; 40]$ м/с, где $p(V) \sim U[a; b]$ означает равномерное распределение на интервале $[a; b]$; $\sigma^a = 15$ м/с²; $\Delta t = 0,1$ с; время моделирования $T = 30$ с, т. е. $k = \overline{1, 300}$; $R = \text{diag}[(\sigma^d)^2 (\sigma^\theta)^2 (\sigma^\psi)^2]$, $\sigma^d = 25$ м, $\sigma^\theta = \sigma^\psi = 0,3^\circ$.

При построении ФЧ для формирования реализаций $X_0^{\text{ПО},(n)}$, $Y_0^{\text{ПО},(n)}$, $Z_0^{\text{ПО},(n)}$ привлечем измерения y_0 дальности, угла места и азимута, снятые в начальный момент времени (при обнаружении объекта). Для этого сначала сформируем набор реализаций $\chi^{(n)} = [d_0^{(n)} \theta_0^{(n)} \psi_0^{(n)}]^T$

$$\chi^{(n)} \sim y_0 + v^{\chi,(n)},$$

где $v^{\chi,(n)} \sim N(v^\chi; 0, 2R)$ – погрешности измерений (18), полученные путем моделирования с увеличенными в два раза среднеквадратическими отклонениями (СКО) для учета того факта, что y_0 содержит в своем составе погрешность $v \sim N(v; 0, R)$.

Далее сформируем набор реализаций, соответствующих местоположению объекта в рассматриваемой декартовой системе координат

$$X_0^{\text{ПО},(n)} = d_0^{(n)} \cos(\psi_0^{(n)}) \cos(\theta_0^{(n)}),$$

$$Y_0^{\text{ПО},(n)} = d_0^{(n)} \cos(\psi_0^{(n)}) \sin(\theta_0^{(n)}),$$

$$Z_0^{\text{ПО},(n)} = d_0^{(n)} \sin(\psi_0^{(n)}).$$

Понятно, что полученные реализации $X_0^{\text{ПО},(n)}$, $Y_0^{\text{ПО},(n)}$, $Z_0^{\text{ПО},(n)}$ в полной мере соответствовать реальной ФПРВ для координат не будут, однако в совокупности они покрывают зону их неопределенности.

Моделирование проведем в соответствии с методикой, изложенной в работе [30], с осреднением по $L = 1\,000$ реализациям. При этом, используя полученные в соответствии с формулами (15), (16) матрицы ковариаций, рассчитаем действительные $\sqrt{G_k^{P,\mu}}$ и расчетные $\sqrt{\tilde{G}_k^{P,\mu}}$ радиальные СКП оценивания координат

$$\sqrt{G_k^{P,\mu}} = \sqrt{[G_k^\mu]_{1,1} + [G_k^\mu]_{2,2} + [G_k^\mu]_{3,3}}, \quad (19)$$

$$\sqrt{\tilde{G}_k^{P,\mu}} = \sqrt{[\tilde{G}_k^\mu]_{1,1} + [\tilde{G}_k^\mu]_{2,2} + [\tilde{G}_k^\mu]_{3,3}}. \quad (20)$$

Реализуем те же алгоритмы, которые были построены при решении методического примера ранее, с одинаковым количеством частиц $N = 10\,000$ и $N_k^{\text{Th}} = N^{\text{Th}} = 0,6N$. На рис. 3 приведены результаты вычисления согласно (19), (20) радиальных действительных (сплошные линии) и расчетных (пунктирные линии) СКП для каждого из реализованных алгоритмов. Соответствие цветов и алгоритмов на рисунке то же, что было принято в п. 4.2.

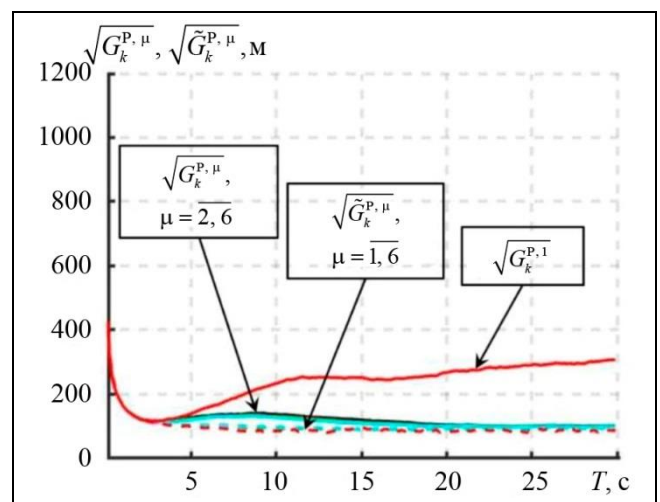


Рис. 3. Результаты вычисления действительных и расчетных радиальных СКП



Результаты моделирования аналогичны полученным для методического примера: ФЧ, построенные с использованием различных процедур переывборки, при одинаковых настройках (количестве частиц и величине N^{th}) обеспечивают близкие между собой уровни точности и состоятельности. При этом для достижения потенциальной точности и выполнения свойства состоятельности ФЧ, построенному без процедур переывборки, требуется значительно больше частиц, чем ФЧ, их использующим.

Анализ вычислительных затрат подтвердил результаты, полученные в п. 4.2. Наиболее простыми среди ФЧ, построенных с использованием процедур переывборки, оказались Алг. 4 и Алг. 6, вычислительная загрузка которых сопоставима. Однако, в отличие от результата, полученного ранее, при решении задачи траекторного слежения их выигрыш в смысле вычислительной загрузки по отношению к Алг. 2, Алг. 3 и Алг. 5 оказался незначительным и составил $\approx 0,5\%$. Это объясняется тем фактом, что при увеличении размерности оцениваемого вектора вычислительная загрузка ФЧ (без переывборки) существенно возрастает. Затраты же на процедуры переывборки, хотя тоже увеличиваются, на этом фоне становятся незначительными.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проведено сопоставление различных схем существенной переывборки, используемых при построении фильтров частиц. Полученные результаты показали, что все рассмотренные процедуры, реализующие процесс переывборки, приводят к заметному сокращению числа частиц по сравнению с обычным ММК. Каких-либо существенных преимуществ с точки зрения достигаемой ФЧ точности или выполнения ими свойств состоятельности из-за выбора при их построении той или иной схемы переывборки, описанной в настоящей работе, получить не удастся. С точки зрения объема вычислений систематическая и остаточная систематическая переывборки оказываются несколько проще, чем остальные рассмотренные схемы, однако в большей степени эти преимущества проявляются при решении задач с небольшой размерностью вектора состояния.

Результаты проведенного исследования могут быть полезны разработчикам при построении алгоритмов фильтрации для решения сложных нелинейных задач обработки измерительной информации, возникающих в современных системах управления, навигации и траекторного слежения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Стратонович Р.Л. Условные процессы Маркова // Теория вероятности и ее применение. – 1960. – Т. 5, № 2. – С. 172–195. [Stratonovich, R.L. Conditional Markov Processes // Theory of Probability and Its Applications. – 1960. – Vol. 5, no 2. – P. 156–178.]
2. Jazwinski, A. H. Stochastic Process and Filtering Theory. – New York: Academic Press, 1970. – 376 p.
3. Applied Optimal Estimation / Ed. by A. Gelb. – Cambridge: MIT. Press, 1974. – 374 p.
4. Степанов О.А. Применение теории нелинейной фильтрации в задачах обработки навигационной информации. – СПб.: ГИЦ РФ ЦНИИ «Электроприбор», 2003. – 369 с. [Stepanov, O.A. Primenenie teorii nelineinoy fil'tratsii v zadachakh obrabotki navigatsionnoi informatsii. – Saint-Petersburg: GNTS RF TSNII «Ehlektrypribor», 2003. – 369 p. (In Russian)]
5. Bar-Shalom, Y., Li, X., Kirubarajan, T. Estimation with Applications to Tracking and Navigation. – New York: Wiley-Interscience, 2001. – 584 p.
6. Simon, D. Optimal State Estimation: Kalman H_∞ and Nonlinear Approaches. – NJ: John Wiley & Sons, Inc, 2006. – 526 p.
7. Särkkä, S. Bayesian Filtering and Smoothing. – Cambridge: Cambridge University Press, 2013. – 232 p.
8. Isaev, A., Stepanov, O., Litvinenko, Y. Comparative Analysis of Recursive and Nonrecursive Linearization-Based Estimation Algorithms // Int. J. Dynam. Control. – 2025. – Vol. 13. – Art. no. 95.
9. Степанов О.А., Литвиненко Ю.А., Исаев А.М. Сравнительный анализ квазилинейных алгоритмов калмановского типа в задаче оценивания марковской последовательности при нелинейностях в формирующем фильтре и уравнениях измерений // Мехатроника, автоматизация, управление. – 2024. – Т. 25, № 11. – С. 585–595. [Stepanov, O.A., Litvinenko, Yu.A., Isaev, A.M. Comparative analysis of quasi-linear Kalman-type algorithms in estimating a Markov sequence with nonlinearities in the system and measurement equations // Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie. – 2024. – Vol. 25, no. 11. – P. 585–595. (In Russian)]
10. Doucet, A., de Freitas, N., Gordon, N. Sequential Monte Carlo Methods in Practice. – New-York: Springer-Verlag, 2001. – 582 p.
11. Коновалов А.А. Основы траекторной обработки радиолокационной информации. – СПб.: Изд-во СПбГЭТУ «ЛЭТИ», 2014. – Ч. 2. – 180 с. [Kononov, A.A. Osnovy traektornoj obrabotki radiolokatsionnoi informatsii. – SPb.: Izd-vo SPBGENTU «LEHTI», 2014. – Ch. 2. – P. 180. (In Russian)]
12. Matousek, J., Dunik, J., Straka, O. Density Difference Grid Design in a Point-Mass Filter // Energies. – 2020. – Vol. 13, no. 16. – Art. no. 4080.
13. Хмарский П.А. Обработка результатов измерений координат и параметров движения в системах мониторинга воздушной и наземной обстановки. – Минск: Беларуская навука, 2025. – 261 с. [Khmarskii, P.A. Obrabotka rezul'tatov izmerenii koordinat i parametrov dvizheniya v sistemakh monitoringa vozduшной i nazemnoi obstanovki. – Minsk: Belaruskaya navuka, 2025. – P. 261. (In Russian)]
14. Chopin, N., Papaspiliopoulos, O. An Introduction to Sequential Monte Carlo. – Cham: Springer, 2020. – 378 p.
15. Wills, A.G., Schön, T.B. Sequential Monte Carlo: A Unified Review // Annual Review of Control, Robotics, and Autonomous Systems. – 2023. – Vol. 6, no. 1. – P. 159–182.

16. Cheng Y., Ren W., Xiu C., Li Y. Improved Particle Filter Algorithm for Multi-Target Detection and Tracking // *Sensors*. – 2024. – Vol. 24, no. 14. – Art. no. 4708.
17. Берковский Н.А., Степанов О.А. Исследование погрешности вычисления оптимальной байесовской оценки методом Монте-Карло в нелинейных задачах // *Изв. РАН. ТИСУ*. – 2013. – № 3. – С. 16–27. [Berkovskii, N.A., Stepanov, O.A. Error of Calculating the Optimal Bayesian Estimate Using the Monte Carlo Method in Nonlinear Problems // *J. Comput. Syst. Sci. Int.* – 2013. – Vol. 52. – P. 342–353.]
18. Kong, A., Liu, J.S., Wong, W.H. Sequential Imputations and Bayesian Missing Data Problems // *J. American Statistical Association*. – 1994. – Vol. 89, no. 425. – P. 278–288.
19. Bolić, M., Djurić, S., Hong, P.M. Resampling Algorithms for Particle Filters: A Computational Complexity Perspective // *EURASIP J. on Applied Signal Processing*. – 2004. – no. 15. – P. 2267–2277.
20. Li, T., Bolic, M., Djuric, P.M. Resampling Methods for Particle Filtering: Classification, Implementation, and Strategies // *IEEE Signal Processing Magazine*. – 2015. – Vol. 32, no. 3. – P. 70–86.
21. Gordon, N., Salmond, D., Smith, A. Novel Approach to Nonlinear/Non-Gaussian Bayesian State Estimation // *IEE Proc., F Radar Signal Process.* – 1993. – Vol. 140, no. 2. – P. 107–113.
22. Kitagawa, G. Monte Carlo Filter and Smoother and Non-Gaussian Nonlinear State Space Models // *J. Comput. Graph. Stat.* – 1996. – Vol. 5, no. 1. – P. 1–25.
23. Carpenter, J., Clifford, P., Fearnhead, P. An Improved Particle Filter for Nonlinear Problems // *IEE Proc., Radar Sonar Navigat.* – 1999. – Vol. 146, no. 1. – P. 2–7.
24. Liu, J.S., Chen, R. Sequential Monte-Carlo Methods for Dynamic Systems // *J. Amer. Statist. Assoc.* – 1998. – Vol. 93, no. 443. – P. 1032–1044.
25. Васильев В.А., Исаев А.М., Степанов О.А., Торопов А.Б. Методы Монте-Карло в задачах обработки измерительной информации с использованием процедур перевыборки // *Изв. РАН. ТИСУ*. – 2026. – № 1 – С. 47–72. [Vasiliev, V.A., Isaev, A.M., Stepanov, O.A., Toropov, A.B. Monte Carlo Methods in Measurement Data Processing Using Resampling Procedures // *Journal of Computer and Systems Sciences International*. – 2025. – Vol. 64, no. 6. – P. 900–926]
26. Степанов О.А., Торопов А.Б. Применение последовательных методов Монте-Карло с использованием процедур аналитического интегрирования при обработке навигационной информации // XII Всероссийское совещание по проблемам управления ВСПУ-2014. – Москва, 2014. – С. 3324–3337. [Stepanov, O.A., Toropov, A.B. *Primenenie posledovatel'nykh metodov Monte-Karlo s ispol'zovaniem protsedur analiticheskogo integrirovaniya pri obrabotke navigatsionnoi informatsii* // XII Vserossiiskoe soveshchaniye po problemam upravleniya VSPU-2014. – Moscow, 2014. – P. 3324–3337. (In Russian)]
27. Doucet, A. On Sequential Simulation-Based Methods for Bayesian Filtering: Technical Report. – Cambridge: Cambridge University, 1998. – 26 p.
28. Степанов О.А., Васильев В.А., Исаев А.М. Субоптимальный алгоритм решения задачи коррекции навигационной системы при изменчивом характере ее погрешностей по данным о геофизических полях // *Международный семинар «Навигация и управление движением» (NMC 2023)*. – Санкт-Петербург, 2023. – С. 90–95. [Stepanov, O.A., Vasil'ev, V.A., Isaev, A.M. Suboptimal'nyi algoritm resheniya zadachi korrektsii navigatsionnoi sistemy pri izmenchivom kharaktere ee pogreshnostei po dannym o geofizicheskikh polyakh // *Mezhdunarodnyi seminar «Navigatsiya i upravlenie dvizheniem»* (NMC 2023). – Saint-Petersburg, 2023. – P. 90–95. (In Russian)]
29. Степанов О.А. Основы теории оценивания с приложениями к задачам обработки навигационной информации. Часть 2 Введение в теорию фильтрации. – СПб.: ГИЦ РФ ОАО «Концерн «ЦНИИ «Электронприбор», 2025. – 417 с. [Stepanov, O.A. *Osnovy teorii otsenivaniya s prilozheniyami k zadacham obrabotki navigatsionnoi informatsii. Chast' 2 Vvedenie v teoriyu fil'tratsii*. – Saint-Petersburg, GNTS RF ОАО «Kontsern «TSNII «EhlektronpriboR», 2025. – P. 417. (In Russian)]
30. Степанов О.А., Исаев А.М. Методика сравнительного анализа рекуррентных алгоритмов нелинейных фильтрации в задачах обработки навигационной информации на основе предсказательного моделирования // *Гироскопия и навигация*. – 2023. – Т. 31. – № 3 (122). – С. 48–65. [Stepanov, O.A., Isaev, A.M. A Procedure of Comparative Analysis of Recursive Nonlinear Filtering Algorithms in Navigation Data Processing Based on Predictive Simulation // *GyroscoPy Navig.* – 2023. – Vol. 14. – P. 213–224]
31. Gustafsson, F., Gunnarsson, F., Bergman, N., et al. Particle Filters for Positioning, Navigation and Tracking // *IEEE Transactions on Signal Processing*. – 2002. – Vol. 50, no. 2. – P. 425–437.

Статья представлена к публикации членом редколлегии
Б. В. Павловым.

Поступила в редакцию 13.10.2025,
после доработки 02.02.2026.
Принята к публикации 08.04.2026.

Исаев Алексей Михайлович – мл. науч. сотрудник,
АО «Концерн «ЦНИИ «Электронприбор», г. Санкт-Петербург,
✉ itmo_student@mail.ru
ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0003-2111-0308>

© 2026 г. Исаев А. М.



Эта статья доступна по [лицензии Creative Commons «Attribution» \(«Атрибуция»\) 4.0 Всемирная](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/).



COMPARATIVE ANALYSIS OF RESAMPLING PROCEDURES IN PARTICLE FILTER DESIGN

A. M. Isaev

Concern CSRI Elektropribor, St. Petersburg, Russia

✉ itmo_student@mail.ru

Abstract. Nonlinear filtering algorithms based on sequential Monte Carlo methods are considered. The scheme of an elementary particle filter is presented, and the main challenge of its implementation—the degeneracy of the algorithm—is explained. The essence of importance resampling procedures, intended to settle this challenge, is described. The resampling procedures widely used in navigation data processing and target tracking are reviewed. A criterion for determining the time point of resampling is given. The above resampling procedures are compared by analyzing the corresponding pseudocodes. As illustrative examples, two problems are considered: the estimation of a process representing the sum of a polynomial and the second integral of white noise, based on nonlinear measurements, and target tracking. For these problems, the resampling procedures are compared numerically by simulation using the method of statistical trials.

Keywords: Bayesian stochastic approach, nonlinear filtering, Monte Carlo methods, sequential importance resampling procedures, particle filter.