

ОПТИМИЗАЦИЯ И ПРОСТРАНСТВЕННАЯ АДАПТАЦИЯ В ПРОБЛЕМЕ МНОГОЛЕТНЕГО ВЫЛОВА РЫБНЫХ ПОПУЛЯЦИЙ

В.Г. Ильичев

Проведен теоретический анализ проблемы многолетней оптимизации вылова популяции, совершающей миграции в водоеме. На основе метода динамического программирования и теории монотонных операторов установлены основные свойства оптимального промысла. Процесс миграции задается марковской матрицей, которая под действием модельных процессов адаптации изменяется от начального состояния к некоторому финальному. Численно обнаружены закономерности семейства финальных матриц миграции. Показано, что ключевую роль играет положительный собственный вектор таких матриц, характеризующий время пребывания популяции по районам.

Ключевые слова: дискретная модель, матрица миграции, перроновский вектор, время пребывания, функция Беллмана.

ВВЕДЕНИЕ

В экологических системах управление вызывает адаптивный ответ как отдельных элементов, так и структуры в целом. Так, при длительном многолетнем вылове рыбных популяций происходит изменение маршрута пространственной миграции рыбного стада. Это обстоятельство имеет важное экономическое значение для стран, которые одновременно ведут промысел в общей акватории. Такая ситуация наблюдается в Азовском, Черном, Каспийском и других морях. Поэтому актуально исследование оптимального вылова с учетом адаптивного пространственного поведения рыбных популяций.

Во многих задачах для описания миграции используются системы дифференциальных уравнений, однако это связано со значительными затратами машинного времени при построении асимптотических режимов. В настоящей работе предлагается дискретная схема построения моделей миграции, в которых водоем разделен на несколько (n) районов. А перемещение рыбного стада описывается некоторой положительной матрицей M размера $n \times n$. Под действием факторов среды и управления начальная матрица M_0 может

как-то изменяться (в силу эколого-эволюционных закономерностей) до некоторой уже неизменяемой (*эволюционно-устойчивой*) матрицы M^* .

Ключевой характеристикой матрицы M^* служит ее положительный собственный (так называемый *перроновский*) вектор $\pi = (\pi_1, \dots, \pi_n)$. Можно считать, что сумма его координат равна 1, и тогда π_i характеризует относительное время пребывания популяции в i -м районе.

Ранее в работе [1] были исследованы проблемы адаптации пространственной миграции популяций к движению корма. Хотя финальная матрица миграции существенно зависит от выбора начальной матрицы, тем не менее перроновские векторы всех таких матриц оказались почти одинаковыми. В результате многочисленных компьютерных расчетов установлено: *перроновский вектор и его деформация являются главными факторами пространственной адаптации*.

В данной статье рассмотрены две задачи. В одной из них, посвященной оптимизации, исследуются теоретические аспекты оптимального вылова рыбной популяции, совершающей заданные передвижения в водоеме. Здесь эффективными оказываются методы работы [2] и теория монотонных операторов [3]. А в другой задаче, связанной с



адаптацией, сняты ограничения на «фиксированность» процесса миграции. В результате биологической адаптации к вылову, корму и другим факторам происходит деформация маршрута миграции. В терминах перроновских векторов численно найдены закономерности таких изменений пространственного поведения.

1. МЕХАНИЗМ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ АДАПТАЦИИ ПОПУЛЯЦИИ

Пусть водоем состоит из n районов, тогда в модели передвижение рыбной популяции может быть задано линейным оператором $Y^{t+1} = MY^t$, где i -я компонента вектора $Y = (y_1, \dots, y_n)$ представляет собой текущую биомассу популяции в i -м районе. Предполагается, что временной шаг достаточно большой, поэтому рыбная стая за единицу времени может попасть из одного района в любой другой. Для простоты считаем, что шаг в модели составляет один год.

Отметим, что в соответствующей матрице $M = (m_{ij})$ каждый элемент m_{ij} можно трактовать как вероятность перехода из j -го района в i -й. Очевидно, $m_{ij} \geq 0$ и с учетом закона сохранения массы сумма элементов в каждом столбце матрицы M равна единице. Такие матрицы M будем называть *марковскими*.

Далее, считаем, что воспроизводство в популяции задается нелинейным оператором $Y^{t+1} = F(Y^t)$, в котором компоненты отображения $F = (f_1, \dots, f_n)$ являются монотонно возрастающими, вогнутыми и гладкими функциями одной переменной. Это простейший тип нелинейности, допускающий достаточно полное исследование.

По сути, данная модель воспроизводства системы оказывается набором независимых одномерных разностных уравнений:

$$y_i^{t+1} = f_i(y_i^t), \quad (1)$$

где $i = 1, \dots, n$. Из условия $f_i(0) = 0$ вытекает представление $f_i(y) = y\varphi_i(y)$ при некоторой гладкой функции $\varphi_i(y)$. Кроме того, из вогнутости функции $f_i(y)$ следует, что удельная скорость роста $\varphi_i(y)$ строго уменьшается с ростом y . В качестве примера укажем на «дробную» зависимость $\varphi_i(y) = d + \frac{RK}{K+y}$ и «логарифмическую» зависимость [4] $\varphi_i(y) = d + R \frac{\ln(1+y/K)}{y/K}$.

Далее при расчетах будет использована дробная функция с параметрами $d = 0,5$ (смертность плюс траты на обмен), скоростью роста $R \geq 1$ и количеством корма $K > 0$. Выполняются неравенства $\varphi_i(0) > 1$ и $\varphi_i(\infty) < 1$ — условие медленного роста. Очевидно, при сделанных ограничениях в одномерной модели (1) существует только одно положительное равновесие, глобально устойчивое в R_+ .

Последовательное действие процессов воспроизводства и миграции соответствует модели

$$Y^{t+1} = M \circ F(Y^t). \quad (2)$$

В дальнейшем удобно употреблять краткое обозначение $P = M \circ F$. Введем на точках фазового пространства отношение частичного порядка ($<$). Так, для точек $A = (a_1, \dots, a_n)$ и $B = (b_1, \dots, b_n)$ положим $A < B$, если $a_i < b_i$ для всех i . Непосредственно проверяется, что отображение P сохраняет данное отношение полупорядка: из $A < B$ следует $P(A) < P(B)$. Такие операторы принято называть монотонными.

Ниже будет принята чебышевская метрика в R_+^n :

$$\|A - B\| = \max\{|a_1 - b_1|, \dots, |a_n - b_n|\}.$$

А под термином *глобальная устойчивость* положительного равновесия (θ) будем подразумевать его способность притягивать к себе все фазовые точки из положительного конуса R_+^n . Пусть M — положительная матрица, тогда имеет место

Утверждение 1. В системе (2) существует положительное равновесие θ , которое глобально устойчиво в R_+^n . ♦

Обоснование этого и других утверждений приведено в Приложении.

Каждую матрицу $M = (m_{ij})$ размера $n \times n$ можно изобразить точкой в евклидовом пространстве размерности n^2 , координаты которой составлены из всех строк M . Например, для $n = 2$ одно из таких соответствий имеет вид:

$$\begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix} \rightarrow (m_{11}, m_{12}, m_{21}, m_{22}).$$

Множество всех точек представляет собой замкнутый и выпуклый многогранник (S). А семейство вершин компакта S образует специальные матрицы $\{E_i\}$. Легко показать, что марковская матрица является вершиной S , если (и только если) в каждом ее столбце находится лишь одна единица, а остальные элементы данного столбца нулевые. Каждая точка S является выпуклой комбинацией его вершин. Поэтому «матричные вершины» (ко-

личество которых равно n^n) составляют своеобразный базис в семействе марковских матриц.

Всякая базисная матрица $M = (m_{ij})$ задает «свой» маршрут передвижения в графе из n вершин согласно правилу: при $m_{ij} = 1$ строим стрелку из j -й вершины в i -ю вершину, а при $m_{ij} = 0$ никаких переходов не происходит. Основная характеристика маршрута — это его набор поглощающих состояний и циклов. Спустя конечное время популяция попадает в одну из поглощающих структур (состояние или цикл). При $n = 2$ существуют четыре «базисных» матрицы:

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Приведем геометрическую трактовку данных матриц: маршрут E_1 означает поглощение состоянием 1; маршрут E_2 — это цикл; маршрут E_3 — это полный покой; маршрут E_4 — это поглощение состоянием 2.

Предположим, что корм также описывается вектором $Q = (k_1, \dots, k_n)$, который преобразуется своей матрицей K . Для простоты считаем, что популяция-хищник потребляет, но не выедает компоненты Q (т. е. все k_i сразу восстанавливаются).

Механизм пространственной адаптации популяции можно реализовать посредством задания конкурентного отбора в сообществе исходной популяции (X_0) и ее мутантов $\{X_1, \dots, X_m\}$. Такой подход соответствует идеологии эволюционного моделирования [5]. Более конкретно, обозначим через $\{\mu_1, \dots, \mu_m\}$ маршруты миграции мутантов, которые мало отличаются от M_0 -маршрута исходной популяции. Разумеется, таких матриц мутантов существует бесконечное множество. Поэтому следует выделить конечный, но представительный набор таких матриц. Например, положим:

$$\mu_i = (1 - \delta)M_0 + \delta E_i, \quad (3)$$

где δ — положительно и мало, а E_i — некоторая базисная матрица.

Несмотря на довольно ограниченный выбор возможных направлений изменения матрицы, тем не менее справедливо [4]

Предложение 1. Любую марковскую матрицу μ можно сколь угодно точно получить из матрицы M_0 с помощью подходящей композиции формул вида (3). ♦

Далее, когда биомасса одного из мутантов, например X_1 , существенно (например, в 10 раз) превышает биомассу исходной популяции X_0 , то в этом случае маршрут мутанта в эволюционном смысле «лучше» маршрута исходной популяции. Поэтому деформируем матрицу M_0 в сторону матрицы «успешного» мутанта, например, μ_1 :

$$M_0 \rightarrow (1 - \varepsilon)M_0 + \varepsilon\mu_1, \quad (4)$$

где скорость адаптации ε положительна и мала. Если таких доминирующих мутантов оказывается несколько штук, то выбираем мутанта с наибольшей биомассой. Здесь реализуется одна из возможных ветвей эволюционного процесса.

Наконец, когда данный процесс генерации не приводит к возникновению успешных мутантов, то поиск так называемой *эволюционно-устойчивой* матрицы M^* прекращается. По сути, исходная популяция с маршрутом M^* не проигрывает своим близким мутантам в конкурентной борьбе.

Здесь актуальна открытая проблема: насколько количество генерируемых мутантов влияет на траекторию и исход эволюционного процесса.

2. ЗАКОНОМЕРНОСТИ ОПТИМАЛЬНОГО ВЫЛОВА

В ряде работ на примере дискретной однобуксовой модели исследована проблема о стратегии оптимального многолетнего вылова [6, 7]. Разумеется, когда водоем представлен лишь одним районом, то, конечно, не возникает постановки задачи об анализе пространственной адаптации рыбной популяции при вылове.

Пусть теперь водоем состоит из двух районов. Считаем, что процесс воспроизводства в первом районе задается функцией f , а во втором районе — функцией g . А миграция определяется марковской матрицей

$$M = \begin{pmatrix} 1 - a & b \\ a & 1 - b \end{pmatrix} \text{ при некоторых } a, b \in [0, 1].$$

Перроновский вектор данной матрицы M имеет вид $\pi = \begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix}$. После естественной нормировки (сумма компонент равна единице) данный вектор принимает вид:

$$\pi = \begin{pmatrix} b/c \\ a/c \end{pmatrix} \text{ при } c = a + b.$$

Матрицу M удобно представлять в виде точки (a, b) из единичного квадрата. Очевидно, все мат-



рицы с заданным перроновским вектором лежат на «своем» луче в плоскости (a, b) .

Теперь модель динамики рыбной популяции с учетом воспроизводства и миграции задается системой:

$$\begin{aligned}x_{t+1} &= H(x_t, y_t) = (1 - a)f(x_t) + bg(y_t), \\y_{t+1} &= G(x_t, y_t) = af(x_t) + (1 - b)g(y_t),\end{aligned}\quad (5)$$

где x_t, y_t — биомассы рыбного стада в первом и во втором районах в момент t . Когда заданы начальные значения x_0, y_0 , последующие значения фазовых переменных определяются однозначно. Пусть u_t, v_t — валовые объемы вылова рыбы в данных районах при допустимых ограничениях $0 \leq u_t \leq x_t$ и $0 \leq v_t \leq y_t$. В этом случае система (5) модифицируется к виду

$$\begin{aligned}x_{t+1} &= H(x_t - u_t, y_t - v_t), \\y_{t+1} &= G(x_t - u_t, y_t - v_t).\end{aligned}\quad (6)$$

Обозначим через $r(z)$ — функцию полезности от z — количества выловленной рыбы. Как обычно, будем считать: функция r монотонно возрастает, строго выпукла вверх и $r(0) = 0$. Без нарушения общности полагаем $r'(0) = 1$, например, далее будет использована функция $r(z) = z/(1 + z)$.

Пусть $\{u_t\}$ и $\{v_t\}$ — две бесконечные последовательности допустимых выловов, тогда доход «рыбака» определяется суммой

$$\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t [r(u_t) + r(v_t)].\quad (7)$$

Здесь β — заданный коэффициент дисконтирования из интервала $(0, 1)$. Отметим, что в сумме (7) можно взять разные функции полезности r_1 и r_2 для u и v , соответственно. И в этом случае излагаемые далее результаты, как правило, сохраняют свою силу.

При традиционной постановке задачи управления требуется так выбирать выловы, чтобы сумма (7) принимала максимальное значение. Разумеется, размер дохода должен зависеть от начальных значений переменных в модели (6), которую обозначим через $B(x_0, y_0)$. Данную функцию (функцию Беллмана) можно построить последовательно на основе метода динамического программирования [8]. Так, положим $B_T(x_0, y_0)$ — максимально возможное значение конечной суммы (7), в которой верхний индекс суммирования равен T . Тогда $B_0(x_0, y_0) = r(x_0) + r(y_0)$ и выполняется рекурсия функций Беллмана:

$$B_{T+1}(x, y) = \max\{r(u) + r(v) + \beta B_T[\tilde{x}, \tilde{y}]\}$$

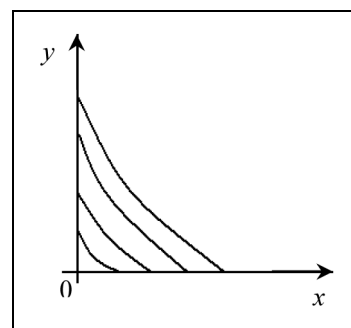


Рис. 1. Чем ближе линия уровня к началу координат, тем меньше на ней значение функции Беллмана

по всем $u \in [0, x]$ и $v \in [0, y]$. Здесь $\tilde{x} = H(x - u, y - v)$ и $\tilde{y} = G(x - u, y - v)$, а нижние индексы у фазовых переменных, для краткости, опущены.

Имеет место следующее простое

Свойство 1. Каждая функция $B_T(x, y)$ строго вогнута и строго возрастает [2]. ♦

Отсюда вытекает, что линии уровня функции Беллмана представляют собой семейство кривых, выпуклых к началу координат (рис. 1). Действительно, пусть точки (x_1, y_1) и (x_2, y_2) принадлежат одной линии уровня со значением B , равным, например, 1. Тогда из строгой вогнутости, в частности, получаем:

$$B(x_{12}, y_{12}) > [B(x_1, y_1) + B(x_2, y_2)]/2 = 1$$

для переменных $x_{12} = (x_1 + x_2)/2$ и $y_{12} = (y_1 + y_2)/2$. Значит, точка (x_{12}, y_{12}) лежит вне этой линии уровня. В силу строгой монотонности функции B по каждой переменной, она находится на линии уровня с большим значением B .

Далее сформулируем три технических результата о «непрерывности», которые часто используются при решении экстремальных задач (см. работу [9] и др.).

А именно, пусть $R(x, y, u, v)$ — непрерывная функция при ограничениях $0 \leq u \leq x$ и $0 \leq v \leq y$. Построим функцию $J(x, y) = \max R(x, y, u, v)$ по всем $u \in [0, x]$ и $v \in [0, y]$.

Свойство 2. Функция $J(x, y)$ непрерывная. ♦

Пусть теперь непрерывная функция $R(x, y, u, v)$ является и строго вогнутой по каждой переменной u и v . Обозначим через $u(x, y)$ и $v(x, y)$ управления, при которых достигается максимум функции $R(x, y, u, v)$ при заданных x, y .

Свойство 3. Функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ непрерывные. ♦

Пусть $Q = \{(x, y): 0 \leq x \leq K, 0 \leq y \leq K\}$ является квадратом в фазовом пространстве при достаточ-

но большом K . На семействе $C(Q)$ непрерывных функций, определенных на Q , зададим чебышевскую метрику. А именно, для функций $Z = Z(x, y)$ и $W = W(x, y)$ из $C(Q)$ положим:

$$\|Z - W\| = \max_{\text{по всем } (x, y) \text{ из } Q} |Z(x, y) - W(x, y)|$$

Известно, что с данной метрикой $C(Q)$ — полное метрическое пространство [10].

Справедливо

Утверждение 2. *Последовательность функций Беллмана сходится [2].* ♦

Напомним что в простейшей ситуации (когда водоем состоит из одного района) оптимальный вылов равен нулю, если биомасса рыбного стада мала [2].

Пусть теперь водоем включает в себя два района. И здесь справедлив «принцип неприкосновенности» малого размера популяции. Так, для оптимальных управлений модели (6) выполняется

Утверждение 3. *Пусть $f'(0) > 1/\beta$ и $g'(0) > 1/\beta$, тогда $u(x, y) = 0$ и $v(x, y) = 0$ при одновременно малых x и y .* ♦

Простая и важная связь между оптимальным управлением и функцией Беллманом сформулирована в следующем результате.

Утверждение 4. *Пусть в точке (x, y) оптимальный вылов $u = u(x, y)$ положителен, тогда выполняется соотношение*

$$B'_x(x, y) = r'(u) < 1. \quad \diamond \quad (8)$$

Покажем, что функция $u(x, y)$ возрастает по «своей» переменной x . Действительно, обозначим через q обратную функцию к r' . Поскольку r вогнута, то q убывает. Из соотношения (8) следует

$$u(x, y) = q \circ B'_x(x, y). \quad (9)$$

С учетом вогнутости функции $B(x, y)$ по x заключаем, что ее производная $B'_x(x, y)$ — убывающая функция переменной x при фиксированном y . Поэтому из соотношения (9) устанавливаем рост u при увеличении x .

Аналогично доказывается и следующее

Утверждение 5. *Если $v = v(x, y) > 0$, то существует частная производная $B'_y(x, y)$ и выполняется соотношение*

$$B'_y(x, y) = r'(v) < 1. \quad \diamond \quad (10)$$

Согласно формулам (8) и (10) функция $B(x, y)$ непрерывно дифференцируема и ее частные производные меньше единицы при всех достаточно больших аргументах. Вероятно, $B(x, y)$ является дифференцируемой функцией и при всех положительных парах (x, y) . Будем использовать более

слабое свойство. А именно, согласно теореме Лебега [10] всякая монотонная функция дифференцируема почти всюду. Поэтому существуют частные производные $B'_x(x, y)$ и $B'_y(x, y)$ для почти всех точек (x, y) из пространства R_+^2 .

В статье [2] предложена и обоснована экономическая трактовка частных производных функции Беллмана. Так, $B'_x(x, y)$ и $B'_y(x, y)$ названы внутренними ценами популяций x и y , соответственно. Там же предложены экономические механизмы построения оптимального вылова (u и v). Для этого «рыбаку» достаточно решить две задачи нахождения максимума:

$$\max\{r(u) - u B'_x(x, y)\} \text{ по всем } u \in [0, x];$$

$$\max\{r(v) - v B'_y(x, y)\} \text{ по всем } v \in [0, y].$$

В целом, поиск оптимальных управлений в глобальной проблеме (7) свелся к решению двух локальных задач.

Отметим, что, например, для $B'_x(x, y) \geq 1$ оптимальное управление u будет обязательно равно нулю. Это связано с тем, что «внешняя цена» $r'(u) < 1$ при всех $u > 0$.

Оценим производные функции Беллмана при малых аргументах. Так, при $x = 0$ и всех y , очевидно, $u = 0$. А из формулы (П.10) Приложения следует

$$B'_x(+0, y) \geq r'(0) = 1. \quad (11)$$

Аналогично, верно неравенство

$$B'_y(x, 0) \geq 1. \quad (12)$$

И, более того, справедливо

Утверждение 6. *При $f'(0) > 1/\beta$ и $g'(0) > 1/\beta$ имеют место оценки:*

$$B'_x(+0, +0) = \infty \text{ и } B'_y(+0, +0) = \infty. \quad \diamond$$

Следовательно, при малых значениях аргумента внутренняя цена оказывается больше «внешней» (рыночной), и поэтому ловить рыбу невыгодно. Это согласуется и с выводами теории оптимального управления.

3. РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ

На основе компьютерных экспериментов модели «оптимальный вылов плюс миграция» обнаружен ряд гипотетических закономерностей. Приведем некоторые из них.

- Функция $u(x, y)$ является, в целом, возрастающей по всем аргументам. При каждом $y > 0$

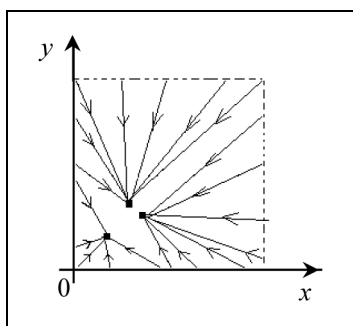


Рис. 2. Три равновесия и области их притяжения

существует свой «неприкосновенный запас» x^* , т. е. из $x \leq x^*$ следует $u(x, y) = 0$.

- Положительных равновесий в модели оптимального вылова с миграцией может быть несколько. Встречались случаи с одним, двумя и тремя равновесиями. На рис. 2 представлены итоги расчетов при $a = b = 0,1$, $f(z) = g(z) = z \left[\frac{1}{2} + \frac{3}{2(1+z)} \right]$ и $r(z) = z/(1+z)$.

Напротив, в модели для водоема, состоящего из одного района, было показано, что существует только одно положительное равновесие, глобально устойчивое в пространстве R_+ [2].

- Компьютерная реализация параллельных процессов оптимизации в адаптации заключается в многократной последовательности двух шагов:
 - 1) в блоке «Оптимизация» при заданной матрице миграции определяются оптимальные управления $u(x, y)$ и $v(x, y)$ согласно § 2;

2) в блоке «Адаптация» при заданных управлениях определяется эволюционно-устойчивая матрица миграции согласно § 1. Если в результате работы данного блока матрица миграции не изменяется, то данный итерационный процесс прекращается. В противном случае возвращаемся к шагу 1. Эксперименты показали, что такой поиск управлений и миграции завершается за конечное число шагов.

Так, в рамках модели (5) зададим функции воспроизводства в первом и во втором районах «универсальным образом»:

$$f(z) = h(z, R_1, K_1) \text{ и } g(z) = h(z, R_2, K_2),$$

где $h(z, R, K) = z \left[\frac{1}{2} + R \frac{K}{K+z} \right]$, z и K — биомасса рыбного стада и корма в конкретном районе, R — скорость прироста биомассы рыбы. Функцию полезности от вылова u определим в форме $r(u) = u/(1+u)$.

Пусть теперь заданы параметры a и b в положительной матрице миграции $M = \begin{pmatrix} 1-a & b \\ a & 1-b \end{pmatrix}$.

Каждый из них варьируется в диапазоне $[0,1; 0,9]$ с шагом 0,1. Всякой такой паре параметров соответствует «свой» узел (один из 81) дискретной решетки в единичном квадрате. Под действием процессов воспроизводства, оптимизации и адаптации происходит движение данных параметров от начального состояния к финальному (рис. 3). Финальному состоянию параметров соответствует некоторая эволюционно-устойчивая матрица со сво-

им перроновским вектором $\pi = \begin{pmatrix} \pi_1 \\ \pi_2 \end{pmatrix}$.

Какие общие свойства присущи данным перроновским векторам? В зависимости от выбора параметров K и R численно обнаружено следующее.

При $R_1 = R_2 = 2$, $K_1 = 2$ и $K_2 = 1$ первый район в два раза более продуктивен, чем второй. Для подавляющего числа узлов решетки первый район существенно более предпочтителен для рыбной популяции. Так, обозначим $\eta = \pi_1/\pi_2$. Установлено, что всегда выполняется соотношение $\eta \geq 2$. Кажется, из $K_1/K_2 = 2$ следует, что значение $\eta = 2$ будет встречаться в подавляющем большинстве случаев. Однако это не так. «Нелинейность» модели и «оптимальность» управления вызывают следующие неожиданные оценки:

- значение $\eta \approx 3$ встречается в чуть менее половины случаев;
- значение $\eta \approx 4$ реализуется в чуть более четверти случаев;
- вместе значения $\eta \approx 2$ и $\eta \approx 8$ встречаются около четверти всех случаев.

Вероятно, в формировании финального перроновского вектора большую роль играют чисто продукционные характеристики районов. Так, при

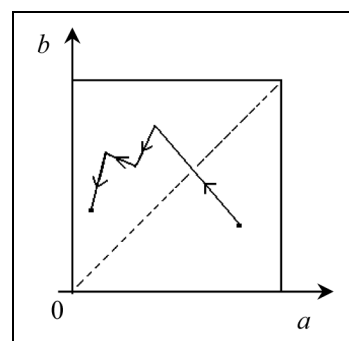


Рис. 3. Типичное адаптивное движение точки (a, b) в единичном квадрате

отсутствии миграции возникает равновесная биомасса рыбного стада в i -м районе:

$$y_i^* = K_i \left(\frac{R_i}{1-d} - 1 \right), \quad i = 1, 2.$$

Тогда при учете миграции представляется естественной

Гипотеза. При $y_1^* > y_2^*$ типично неравенство $\pi_1^* > \pi_2^*$.

4. ОБСУЖДЕНИЕ И ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Резюмируем полученные результаты.

- На основе аппарата марковских цепей предложено теоретически адекватное описание дискретных процессов миграции популяций. Для практического приложения данной схемы, например, к поведению рыб Азовского моря (хамсы, бычка, леща и др.) следует учесть определенные ограничения на передвижения рыб:

- если выбран малый временной шаг в модели, то переходы могут возникать лишь между соседними районами водоема;

- различные виды рыб предпочитают «свою» соленость вод [11]. Поэтому если популяция достаточно терпимо относится к солености, то ее перемещение возможно в любой район. А если она предпочитает пресноватую воду, то в качестве модельного водоема целесообразно выбирать фрагменты Азовского моря вблизи устья рек Дона и Кубани. Разумеется, для моделирования миграции рыб (хамсы и тюльки), обитающих в солоноватых водах, достаточно рассмотреть фрагмент Азовского моря, примыкающий к Керченскому проливу;

- весной некоторые виды рыб (лещ и тарань) поднимаются по рекам Дон и Кубань на нерест, поэтому в качестве дополнительных районов модельного водоема необходимо включить и нерестилища на этих реках.

- В результате модельных экспериментов установлено, что в процессе биологической адаптации основное значение имеет не сама финальная марковская матрица, а ее положительный собственный (перроновский) вектор. Компоненты данного вектора характеризуют относительное время пребывания популяции в конкретном районе. В частности, при оптимальном вылове также устанавливается определенное время пребывания популяции по районам, которое теперь зависит от выбора начального маршрута. Однако набор финальных перроновских векторов сравнительно невелик.

В целом, показано: перестройка времен пребывания — основной адаптивный ответ популяции на промысел с учетом запасов корма.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Обоснование утверждения 1. Для упрощения выкладок рассмотрим двумерный случай. Пусть перемещение популяции задается матрицей $M = \begin{pmatrix} 1-a & b \\ a & 1-b \end{pmatrix}$.

Воспользуемся координатным представлением двумерной версии модели (2) в форме (5). Так, при замене в выражении (5) переменных x, y на y_1, y_2 получаем:

$$y_1^{t+1} = (1-a)f_1(y_1^t) + bf_2(y_2^t), \quad (\text{П.1})$$

$$y_2^{t+1} = af_1(y_1^t) + (1-b)f_2(y_2^t).$$

Отображение, заданное системой (П.1), будем кратко обозначать символом P .

Существование положительного равновесия. В пространстве фазовых переменных построим область (рис. 4)

$$D = \{(y_1, y_2): y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, n \leq y_1 + y_2 \leq N\},$$

где n — положительно и мало; N — велико. Покажем, что на границе области D векторное поле, порожденное системой (П.1), направлено вовнутрь области.

Так, на границе, примыкающей к той или иной из осей координат, это следует из положительности матрицы M и положительности хотя бы одной из величин $f_1(y_1)$ или $f_2(y_2)$. Здесь, для краткости, верхний индекс t у фазовых переменных опущен.

Далее, на границе $y_1 + y_2 = n$ каждая из переменных мала, поэтому $f_1(y_1) > y_1$ и $f_2(y_2) > y_2$. И значит, имеет место неравенство $y_1^{t+1} + y_2^{t+1} > y_1^t + y_2^t$.

Наконец, рассмотрим границу $y_1 + y_2 = N$. Построим верхние мажоранты для каждой из функций воспроизводства следующим образом. Пусть y_i^* — неподвижная точка f_i , которая удовлетворяет соотношению $f_i(y_i^*) = y_i^*$. Тогда, очевидно, для производной $A_i = f_i'(y_i^*)$ выполняется неравенство $0 < A_i < 1$. В точке y_i^* проведем касательную к графику функции f_i . Уравнение касательной имеет вид: $L_i(y) = A_i y + (1 - A_i)y_i^*$. В силу вогнутости

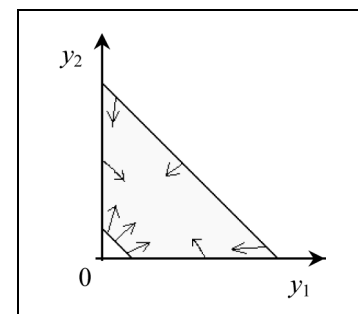


Рис. 4. На границе области D векторное поле отображения P направлено вовнутрь



функции f_i график касательной расположен выше графика данной функции.

Ввиду сказанного, для всех y имеют место оценки:

$$f_1(y) < L_1(y) = A_1 y + (1 - A_1)y_1^* \text{ и}$$

$$f_2(y) < L_2(y) = A_2 y + (1 - A_2)y_2^*.$$

Отсюда получаем неравенства:

$$y_1^{t+1} + y_2^{t+1} < L_1(y_1^t) + L_2(y_2^t) < BN + C, \quad (\text{П.2})$$

где $B = \max\{A_1, A_2\}$ и $C = (1 - A_1)y_1^* + (1 - A_2)y_2^*$. Из $B < 1$ вытекает, что при больших N выполняется соотношение $BN + C < N$. Поэтому из неравенства (П.2) следует требуемое: $y_1 + y_2 < N$.

Итак, непрерывное отображение P преобразует область D в себя и, значит, в данной области существует хотя бы одна неподвижная точка. Такая точка всегда находится внутри D , поскольку на границе D векторное поле отлично от нуля.

Глобальная устойчивость равновесия. Пусть $\hat{Y} = (\hat{y}_1, \hat{y}_2)$ — одна из положительных неподвижных точек отображения P . Зададим какой-либо параметр $\lambda \in (0, 1]$ и построим две точки $A(\lambda) = \lambda \hat{Y}$ и $B(\lambda) = \hat{Y}/\lambda$. Разумеется, четыре точки $B(\lambda), \hat{Y}, A(\lambda)$ и 0 — начало координат лежат на одном луче, при этом выполняются соотношения $A(\lambda) < \hat{Y} < B(\lambda)$ для всех допустимых λ .

Теперь построим λ -параметрическое семейство вложенных кубов:

$$E(\lambda) = \{Y : A(\lambda) < Y < B(\lambda)\}.$$

Отметим, что $E(1) = \hat{Y}$, а при $\lambda \rightarrow 0$ данное семейство заполняет все пространство R_+^2 .

Покажем, что под действием отображения P «самая слабая» точка $A(\lambda)$ становится несколько «сильнее» (идет вперед). Действительно, подставим в левую часть системы (П.1) переменные $y_1^t = \lambda \hat{y}_1$ и $y_2^t = \lambda \hat{y}_2$. С учетом неравенств

$$f_1(\lambda y_1) > \lambda f_1(y_1) \quad \text{и} \quad f_2(\lambda y_2) > \lambda f_2(y_2) \quad \text{при} \quad \lambda < 1,$$

справедливых для данного класса вогнутых функций, окончательно получаем:

$$y_1^{t+1} = (1 - a)f_1(\lambda \hat{y}_1) + bf_2(\lambda \hat{y}_2) > \lambda[(1 - a)f_1(\hat{y}_1) + bf_2(\hat{y}_2)] = \lambda \hat{y}_1,$$

$$y_2^{t+1} = af_1(\lambda \hat{y}_1) + (1 - b)f_2(\lambda \hat{y}_2) > \lambda[af_1(\hat{y}_1) + (1 - b)f_2(\hat{y}_2)] = \lambda \hat{y}_2.$$

Аналогично, при $\mu = 1/\lambda$ следует воспользоваться неравенствами:

$$f_1(\mu y_1) < \mu f_1(y_1) \quad \text{и} \quad f_2(\mu y_2) < \mu f_2(y_2) \quad \text{для} \quad \mu > 1.$$

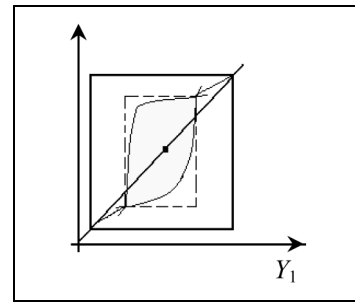


Рис. 5. Криволинейный образ прямоугольника $E(\lambda)$ под действием отображения P

Тогда легко показать: «самая сильная» точка $B(\lambda)$ под действием отображения P становится несколько «слабее» (идет назад).

Последнее. Для каждой точки Y из $E(\lambda)$ выполняется соотношение $A(\lambda) < Y < B(\lambda)$. С учетом предыдущих оценок находим:

$$A(\lambda) < P[A(\lambda)] < P(Y) < P[B(\lambda)] < B(\lambda).$$

Таким образом, под действием отображения P область $E(\lambda)$ переходит строго в себя (рис. 5). Воспользовавшись «процедурой проталкивания предельной точки» [12, зл. 2], устанавливаем глобальную устойчивость данного равновесия.

Разумеется, из глобальной устойчивости вытекает единственность положительного равновесия.

Обоснование утверждения 3. Проведем рассуждение от противного. Пусть (x_0, y_0) — начальная точка с малыми координатами, а (x_1, y_1) — следующая за ней точка оптимальной орбиты.

Далее, обозначим через (u_0, v_0) оптимальный вылов в момент времени $t = 0$, в котором $u_0 > 0$ или $v_0 > 0$; а через (u_1, v_1) — оптимальный вылов в момент времени $t = 1$. Формально положим:

$$x_1 = H(x_0 - u_0, y_0 - v_0), \quad x_2 = H(x_1 - u_1, y_1 - v_1), \\ y_1 = G(x_0 - u_0, y_0 - v_0), \quad y_2 = G(x_1 - u_1, y_1 - v_1). \quad (\text{П.3})$$

Разумеется, все фазовые переменные и управления в соотношениях (П. 3) малы.

Теперь построим новую орбиту с прежним началом и видоизмененной точкой $(\tilde{x}_1, \tilde{y}_1)$, но так, чтобы остальные точки новой и прежней орбит совпали. Очевидно, это достигается при выборе следующих управлений:

$$\tilde{u}_0 = 0, \quad \tilde{u}_1 = u_1 + H(x_0, y_0) - H(x_0 - u_0, y_0 - v_0), \\ \tilde{v}_0 = 0, \quad \tilde{v}_1 = v_1 + G(x_0, y_0) - G(x_0 - u_0, y_0 - v_0). \quad (\text{П.4})$$

В системе (П.4) переменные и выловы также малы. Для остальных моментов времени ($t > 1$) положим $\tilde{u}_t = u_t$ и $\tilde{v}_t = v_t$.

Сравним суммарный вылов за первые два момента времени на новой ($\tilde{\Sigma}$) и прежней (Σ) орбитах. Поскольку

$r(z) = z + O(z^2)$ при малых z , то далее будем кратко писать $r(z) \approx z$. Так, имеем:

$$\Sigma = r(u_0) + r(v_0) + \beta[r(u_1) + r(v_1)] \approx u_0 + v_0 + \beta[u_1 + v_1],$$

$$\begin{aligned} \tilde{\Sigma} &= r(\tilde{u}_0) + r(\tilde{v}_0) + \beta[r(\tilde{u}_1) + r(\tilde{v}_1)] \approx \\ &\approx \tilde{u}_0 + \tilde{v}_0 + \beta[\tilde{u}_1 + \tilde{v}_1]. \end{aligned}$$

Отсюда с учетом системы (П.4) получаем:

$$\begin{aligned} \tilde{\Sigma} - \Sigma &\approx -(u_0 + v_0) + \beta[E(x_0, y_0) - \\ &- E(x_0 - u_0, y_0 - v_0)], \end{aligned} \quad (\text{П.5})$$

где $E(X, Y) = H(X, Y) + G(X, Y) = f(X) + g(Y)$. Осталось оценить выражение в квадратных скобках формулы (П.5):

$$\tilde{\Sigma} - \Sigma \approx -(u_0 + v_0) + \beta[u_0 f'(\zeta) + v_0 g'(\eta)] \quad (\text{П.6})$$

при некоторых $\zeta \in [x_0 - u_0, x_0]$ и $\eta \in [y_0 - v_0, y_0]$, которые также малы. С учетом допущений $\beta f'(0) > 1$ и $\beta g'(0) > 1$ устанавливаем, что правая часть выражения (П.6) положительна.

Обоснование утверждения 4. Напомним соотношение:

$$B(x, y) = r(u) + r(v) + \beta B[\tilde{x}, \tilde{y}]. \quad (\text{П.7})$$

Здесь u, v — оптимальные выловы и $\tilde{x} = H(x - u, y - v)$, $\tilde{y} = G(x - u, y - v)$.

Пусть ε мало, тогда при $u > 0$ вылов $(u + \varepsilon, v)$, допустим, в точке $(x + \varepsilon, y)$. Из уравнения (П.7) следует:

$$B(x + \varepsilon, y) \geq r(u + \varepsilon) + r(v) + \beta B[\tilde{x}, \tilde{y}]. \quad (\text{П.8})$$

После вычитания уравнения (П.7) из уравнения (П.8) получаем:

$$B(x + \varepsilon, y) - B(x, y) \geq r(u + \varepsilon) - r(u). \quad (\text{П.9})$$

Если $\varepsilon > 0$, то после деления неравенства (П.9) на ε (и устремляя ε к нулю) находим:

$$B'_x(x + 0, y) \geq r'(u). \quad (\text{П.10})$$

Аналогично, при $\varepsilon < 0$ находим:

$$B'_x(x - 0, y) \leq r'(u). \quad (\text{П.11})$$

Из неравенств (П.10) и (П.11) находим $B'_x(x + 0, y) \geq B'_x(x - 0, y)$.

С другой стороны, для всякой выпуклой по x функции $B(x, y)$ имеет место неравенство $B'_x(x - 0, y) \geq B'_x(x + 0, y)$. С учетом предыдущих неравенств окончательно устанавливаем требуемое соотношение (8).

Обоснование утверждения 6. Обозначим через $X = B'_x(+0, +0)$ и $Y = B'_y(+0, +0)$. Отметим, что всякая вогнутая функция в каждой точке x имеет производную справа. При малом ε и некотором фиксированном k вычислим производную справа по ε для обеих частей тождества вогнутых двух функций:

$$B(\varepsilon, k\varepsilon) = \beta B[F(\varepsilon, k\varepsilon), G(\varepsilon, k\varepsilon)],$$

где $H(\varepsilon, k\varepsilon) = (1 - a)f(\varepsilon) + bg(k\varepsilon)$ и $G(\varepsilon, k\varepsilon) = af(\varepsilon) + (1 - b)g(k\varepsilon)$. И затем, устремляя $\varepsilon \rightarrow 0$ справа, получаем:

$$X + kY = \zeta[(1 - a)X + aY] + k\eta[bX + (1 - b)Y], \quad (\text{П.12})$$

где $\zeta = \beta f'(0) > 1$ и $\eta = \beta g'(0) > 1$.

Поскольку равенство (П.12) справедливо при любом k , то должны одновременно выполняться соотношения:

$$X = \zeta[(1 - a)X + aY] \text{ и } Y = \eta[bX + (1 - b)Y].$$

Последние два уравнения допускают лишь два решения:

- 1) $X = Y = 0$;
- 2) $X = Y = \infty$.

Но вариант 1 невозможен, так как было показано (см. неравенства (11) и (12)), что $X \geq 1$ и $Y \geq 1$. Остается только вариант 2, который и соответствует требуемым соотношениям.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ильичев В.Г. Конкуренция и адаптация в сообществе мигрирующих рыбных популяций // Биофизика. — 2012. — Т. 57, вып. 2. — С. 356–367.
2. Ильичев В.Г., Рохлин Д.Б., Угольницкий Г.А. Об экономических механизмах управления биоресурсами // Изв. РАН. Теория и системы управления. — 2000. — № 4. — С. 104–110.
3. Опоицев В.И. Нелинейная системостатика. — М.: Наука, 1986.
4. Ильичев В.Г. Гипотезы о закономерностях биологической адаптации. Компьютерные эксперименты // Математ. моделирование. — 2012. — Т. 24, № 10. — С. 15–32.
5. Фогель Л., Оуэнс А., Уолш М. Искусственный интеллект и эволюционное моделирование. — М.: Мир, 1969.
6. Абакумов А.И. Математическая экология. — Владивосток: ДалГУ, 1994.
7. Скалецкая Е.И., Фрисман Е.Я., Шапиро А.П. Дискретные модели динамики численности популяций и оптимизация промысла. — М.: Наука, 1979.
8. Беллман Р. Динамическое программирование. — М.: Инстр. лит., 1960.
9. Ланкастер К. Математическая экономика. — М.: Сов. радио, 1972.
10. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. — М.: Наука, 1976.
11. Васильева С.Д., Лужняк В.Л. Рыбы бассейна Азовского моря. — Ростов-на-Дону: ЮНЦ РАН, 2013.
12. Ильичев В.Г. Устойчивость, адаптация и управление в экологических системах. — М.: Физматлит, 2009.

Статья представлена к публикации членом редколлегии В.Н. Новосельцевым.

Ильичев Виталий Григорьевич — д-р техн. наук, гл. науч. сотрудник, Институт аридных зон Южного научного центра РАН, г. Ростов-на-Дону, ☎ (863) 250-98-05, ✉ vitaly369@yandex.ru.