УДК 51-77+330.4 DOI: http://doi.org/10.25728/pu.2021.6.3

ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ МОДЕЛИ ТЕХНОЛОГИЧЕСКОГО ЯДРА КРУПНОМАСШТАБНОЙ ЭКОНОМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

В.Б. Гусев

Аннотация. Предметом исследования являются модель технологического ядра экономической системы, а также математические методы ее анализа. В качестве формализованного критерия эффективности структурных инноваций предложен показатель продуктивности. Формализована постановка оптимизационной задачи поиска равновесного состояния, доставляющего экстремум продуктивности технологического ядра экономики. Разработан метод эквивалентного преобразования модели с учетом достигнутых значений показателей. Доказан ряд утверждений о свойствах равновесного состояния. Это позволило построить многоэтапный процесс расчета траектории, приближающей экономическую систему к равновесному состоянию. Разработанная модель использует межотраслевой баланс национальных счетов экономики. Анализ модели заключается в определении предпочтительной структуры выпусков на этапах развития технологического ядра экономической системы. На основе данных для РФ приведен пример расчета поэтапного процесса изменения структуры выпусков, асимптотически приводящего технологическое ядро к максимуму продуктивности. Полученные результаты позволили оценить потенциал роста продуктивности экономики в рамках существующего технологического уклада, достигаемый путем ликвидации структурных диспропорций.

Ключевые слова: структурные диспропорции, технологическое ядро экономики, экстремум продуктивности, планы поэтапного развития, равновесное состояние.

ВВЕДЕНИЕ

Несмотря на имеющийся высокий потенциал развития, современная экономика Российской Федерации сталкивается с кризисными явлениями. На макроуровне это низкий темп роста ВВП, критическая зависимость экономики от экспорта нефти и газа, неустойчивость и недооцененность валютного курса, малая доля обрабатывающей промышленности, зависимость от внешних санкций, неэффективность механизмов управления. Действие этих факторов обусловливает неполную реализацию потенциала экономики. Приведенные в настоящей статье результаты демонстрируют возможности повышения эффективности экономики, основанные на планомерной модификации структуры ее технологического ядра.

Предметом анализа является эффективное использование существующего технологического потенциала экономической системы и определение путей его развития [1, 2]. Сравнение таких показателей, как производительность труда и темпы роста экономики в развитых странах, демонстрирует, что использование в них сопоставимых технологических процессов может приводить к разным результатам. В определенной степени такое различие можно объяснить структурными особенностями экономики этих стран. «Применительно к России все в большей степени приходит осознание того, что основные ограничения экономического роста в стране обусловлены структурой экономики: это неэффективная структура производства, непродуктивная структура доходов, отсталая структура экспорта, нерациональная региональная структура размещения производительных сил» [2]. Один из путей ускорения экономического роста может заключаться в поиске предпочтительной структуры видов экономической деятельности и путей реализации этой структуры. Как показывают расчеты, такая возможность обоснована.

Рассматриваемый метод анализа использует модель технологического ядра многоотраслевой экономической системы. Под технологическим ядром экономической системы будем понимать совокупность доступных для наблюдения и измерения видов экономической деятельности, а также затрат, производимых для достижения результатов этой деятельности, достаточную для адекватного представления состояния этой системы. Примером технологического ядра является совокупность факторов, используемых Росстатом при формировании межотраслевого баланса в системе национального счетоводства [3, 4]. Модель технологического ядра описывает статическую картину влияния видов экономической деятельности на объемы поставляемых услуг и продукции. Параметры этого влияния характеризуют достигнутый уровень технологического развития экономики и возможные пределы его использования. Модели подмножеств технологического ядра могут иметь несколько разновидностей, включая либо только товары и услуги, либо также расходы на конечное потребление, накопление, чистый экспорт. В зависимости от разновидности модели интерпретации результатов будут разными. Основной источник данных – межотраслевой баланс – отражает объемы товаров и услуг, потребляемые разными отраслями и видами деятельности [5].

Существенно, что анализируемые технологические связи образуют устойчивую матрицу Шура удельных затрат полного ранга [6]. Это позволяет определять потенциал продуктивности (превышения выпусков над затратами в режиме автономности), а также получить способ повышения эффективности функционирования технологического ядра экономики путем вариации объемов выпуска и цен. Можно также осуществлять поиск «узких мест» в системе технологических взаимодействий: определять, какие услуги, переделы, отрасли на данный момент ограничивают рост ВВП (без их роста в остальных отраслях эффект роста отсутствует) и к какому эффекту может привести наращивание производства именно в этих критических отраслях. Решение этих вопросов базируется на применении оптимизационных задач с целевой функцией продуктивности технологического ядра экономики и различными типами ограничений [7]. В полученных решениях потенциальный спрос уравновешен предложением [8], а потому оптимальные объемы выпусков являются равновесными.

Развитие новых технологий – проблема с большой долей неопределенности. Не все, а скорее лишь малая часть инноваций эффективны и встраиваются в технологическую структуру экономики. Оценка потенциала новых технологий позволяет принимать решения по их включению в структуру экономики. Кроме того, модель позволяет определять допустимое наращивание выпуска отраслей, значимых по неэкономическим критериям.

С помощью модели воспроизводства [9] многопродуктовой системы определяется мультипликатор выпусков (и показатель продуктивности экономической системы) как функция структурных пропорций выпусков и цен на производимые продукцию и услуги отраслей. Максимизация этого показателя, отображающего соотношение выпуска и затрат, определяет потенциал технологического ядра и сбалансированную структуру выпусков и цен в режиме воспроизводства.

Реализация на практике расчетных параметров структуры выпусков должна учитывать инерционный характер экономических процессов. С этой целью рассмотрена процедура расчета индикативного прогноза индексов выпуска [9]. Сформулированы и доказаны утверждения, определяющие необходимые свойства применяемых расчетных процедур. Приведен пример результатов расчета для структуры межотраслевого баланса Российской Федерации, который демонстрирует перспективность предлагаемого подхода.

1. ИНДИКАТОРЫ СТАБИЛЬНОГО РАЗВИТИЯ

Рассматриваются модели и методы управления, ориентированные на описание стабильного самодостаточного развития экономики. Для этой цели используется замкнутая модель «затраты – выпуск» Леонтьевского типа [3].

Продуктивность однопродуктовой (скалярной) модели экономической системы определим как $\pi = Y/Z$, где Z – суммарные промежуточные затраты, Y – валовая добавленная стоимость (ВВП). Обозначим валовой выпуск V, материалоемкость $a = Z/V$. Если валовой выпуск представить в виде суммы $V = Y + Z$, то продуктивность равна

$$\pi = (V - Z)/Z = 1/a - 1. \qquad (1)$$

Здесь и далее предполагается, что все показатели представлены в стоимостной форме при сопоставимых ценах базового года. В этой скалярной модели продуктивность экономики зависит только от параметра материалоемкости: чем она меньше, тем больше продуктивность.

Для многопродуктовой (векторной) модели экономики различные конфигурации векторов затрат $\mathbf{Z}$ и выпусков $\mathbf{V}$ дают разную продуктивность. При этом значение имеют не абсолютные, а относительные величины компонент этих векторов. Поэтому можно рассматривать задачу выбора параметров модели с наибольшим значением продуктивности, варьируя структуру этих векторов.

Потенциал продуктивности многопродуктовой экономической системы определяется как максимум продуктивности по допустимым в рамках естественных ограничений векторам выпусков $\mathbf{V}$ и затрат $\mathbf{Z}$:

$$\pi^* = \max_{\mathbf{V},\mathbf{Z}} \pi.$$

При переходе к модели многопродуктовой экономики предполагается, что заданы прямые затраты Z_{ij} отрасли j на выпуск продукции или услуг вида i и выпуски V_j продукции и услуг вида j. На основе этих данных вычисляются коэффициенты удельных затрат

$$a_{ij} = Z_{ij} / V_j, \ i = 1,\ldots,n, \ j = 1,\ldots,n,$$

которые образуют технологическую матрицу $\mathbf{A}$. Здесь n – количество отраслей. Сумма затрат отрасли i определяется как

$$Z_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} V_j, \ i = 1,\ldots, n.$$

Тогда продуктивность отрасли i определим по аналогии с формулой (1) как долю добавленной стоимости от стоимости промежуточного потребления, а продуктивность ядра экономической системы – как минимум продуктивности отраслей:

$$\pi = \min_i Y_i / Z_i = \min_i \left\{ (V_i - Z_i) / Z_i \right\}.$$

Модель «затраты – выпуски» может быть представлена равенством, определяющим соотношения сбалансированности между выпусками (предложением) и суммарными затратами (спросом) отраслей:

$$V_i(t) = \gamma_i \sum_{j=1}^{n} a_{ij} V_j(t), \ i = 1,\ldots, n, \qquad (2)$$

где γ_i – мультипликатор выпуска отрасли i, $\gamma_i \geq 1$.

Рассмотрим формулировку оптимизационной задачи для структуры выпусков V_i с критерием максимума нижней границы мультипликаторов выпусков

$$\gamma = \min_i \gamma_i,$$

которая имеет вид

$$\gamma^* = \max_{\gamma,\mathbf{V}} \gamma, \qquad (3)$$

с технологическим ограничением балансировки выпусков продукции, соответствующим условию (2). Смысл этого ограничения состоит в том, что прямые затраты должны включать в себя затраты всех видов деятельности и не могут быть меньше объема определенной регулируемой доли выпусков продукции:

$$V_i(t) \geq \gamma \sum_{j=1}^{n} a_{ij} V_j(t). \qquad (4)$$

Соотношения (3), (4) представляют собой задачу билинейного программирования. Выпуски, удовлетворяющие условию (4), будем называть сбалансированными. Таким образом, задача сводится к поиску сбалансированного вектора выпусков $\mathbf{V}$ с максимальной нижней границей мультипликатора γ.

Если решение задачи (3), (4) есть $\mathbf{V}$, γ, то максимум показателя продуктивности может быть определен из решения этой задачи как $\pi^* = \gamma - 1$. Он представляет собой долю добавленной стоимости в стоимости промежуточного потребления при экстремальном сбалансированном режиме технологического развития экономической системы. Поскольку $\pi \leq \pi^*$, то всегда $\gamma \geq 1/a$; в экстремальном сбалансированном режиме имеем:

$$a = 1/\gamma.$$

Для иллюстрации приведем пример двумерной задачи поиска оптимальной структуры выпусков. Условие балансировки (4) имеет вид:

$$\begin{aligned} V_1 &\geq \gamma(a_{11}V_1 + a_{12}V_2), \\ V_2 &\geq \gamma(a_{21}V_1 + a_{22}V_2). \end{aligned} \qquad (4`)$$

Пусть $\mathbf{V}$, γ – решение задачи (3), (4`) в естественном предположении $\gamma a_{11} < 1$, $\gamma a_{22} < 1$, что необходимо для того, чтобы технологическое ядро было продуктивным; значения удельных затрат $a_{ij}$ и компонент вектора выпусков $V_i$ положительны. Будем решать систему неравенств (4`), которая выполняется при условии

$$(1 - \gamma a_{11})(1 - \gamma a_{22}) \leq \gamma^2 a_{21} a_{12}.$$

Допустимым решением для этой системы неравенств являются собственный вектор $\mathbf{V}^*$ и мультипликатор $\gamma^* = 1/a^*$, соответствующий собственному значению a^* матрицы $\mathbf{A} = \left[a_{ij} \right]$, $i, j = 1, 2$. Будем называть его собственным мультипликатором. Для него справедливо равенство

$$\gamma^* = \left((a_{11} + a_{22}) / 2 \pm \sqrt{(a_{11} - a_{22})^2 / 4 + a_{12} a_{21}} \right) / \\ / \left(a_{11} a_{22} - a_{21} a_{12} \right) = \\ = \frac{2}{\left(a_{11} + a_{22} \right) \mp \sqrt{(a_{11} + a_{22})^2 - 4\left(a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21} \right)}}.$$

Далее рассматривается ситуация, когда параметры модели имеют экономический смысл:

$$1 < \gamma < \min(1/a_{11}, 1/a_{22}).$$

Будем обозначать $\gamma_{\min}, \gamma_{\max}$ соответственно минимальное и максимальное значения собственного мультипликатора γ^*.

В случае сильного влияния межотраслевых связей, когда

$$a_{11}a_{22} < a_{21}a_{12},$$

собственные мультипликаторы действительны и имеют разные знаки, а ограничения (4`) выполняются при условии $\gamma_{\min} \le \gamma \le \gamma_{\max}$. Тогда для значения мультипликатора имеем:

$$\gamma_{\max} = \frac{2}{(a_{11}+a_{22}) + \sqrt{(a_{11}+a_{22})^2 - 4(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})}} <$$

$$< \frac{2}{(a_{11}+a_{22}) + \sqrt{(a_{11}+a_{22})^2 - 4(a_{11}a_{22})}} < \frac{1}{\max(a_{11},\, a_{22})},$$

$$\gamma_{\min} < 0,$$

$$\gamma_{\max} > 0.$$

Поскольку $\gamma_{\max} < 1/\max(a_{11},\, a_{22})$, то условие (3) удовлетворяется, соотношения (4`) выполняются на строгом равенстве и $\gamma^* = \gamma_{\max}$.

При условии

$$a_{11}a_{22} = a_{21}a_{12}$$

имеем

$$\gamma^* = 1/(a_{11}+a_{22}),$$

ограничения (4`) выполняются при $\gamma \le \gamma^*$. Решением задачи (3), (4`) является $\gamma = \gamma^*$ и соотношения (4`) выполняются на строгом равенстве.

При условии

$$a_{11}a_{22} > a_{21}a_{12},$$

которое можно интерпретировать как малое влияние межотраслевых связей, значения $\gamma_{\min}, \gamma_{\max}$ положительны,

$$\gamma_{\max} = \frac{2}{(a_{11}+a_{22}) - \sqrt{(a_{11}+a_{22})^2 - 4(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})}} >$$

$$> \frac{1}{\max(a_{11},\, a_{22})}.$$

Всегда

$$\gamma_{\min} = \frac{2}{(a_{11}+a_{22}) + \sqrt{(a_{11}+a_{22})^2 - 4(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})}} <$$

$$< \frac{1}{\max(a_{11},\, a_{22})}$$

и ограничения (4`) выполняются при условиях $\gamma \le \gamma_{\min}$, $\gamma \ge \gamma_{\max}$. Поскольку $\gamma_{\max} \ge 1/\max(a_{11},\, a_{22})$, что характерно для слабых межотраслевых связей, то решением является $\gamma^* = \gamma_{\min}$.

Таким образом, в каждом случае, если решение существует, оно совпадает с собственным мультипликатором, а для получения корректного решения задачи оптимизации продуктивности технологического ядра (3), (4`) можно вместо условия (4`) использовать ограничения типа равенств

$$V_1 = \gamma(a_{11}V_1 + a_{12}V_2),$$

$$V_2 = \gamma(a_{21}V_1 + a_{22}V_2).$$

Если значения мультипликатора γ^* действительны и $\gamma_{\min} > 1$, то матрица $\mathbf{A} = [a_{ij}],\ i,\ j = 1, 2$, устойчива (является шуровской) [6].

Для поиска собственного вектора $\mathbf{V}^*$ решается система неравенств (4`), к которой необходимо добавить условие нормировки, например, задав одну из границ его значений:

$$\mathbf{V}_i' \le \mathbf{V}_i \le \mathbf{V}_i'',\ i = 1, 2.$$

Построение моделей и анализ результатов расчета удобно вести с применением безразмерных относительных цен. В таком виде модели и интерпретация результатов становятся более компактными и наглядными.

2. РАВНОВЕСНЫЕ ИНДЕКСЫ ВЫПУСКОВ

Рассмотрим операции преобразования технологической матрицы в текущих ценах к матрице в относительных ценах и обратно.

Обозначим $\mathbf{D}(\mathbf{X})$ диагональную матрицу с диагональю $X_1, X_2, ..., X_n$: $\mathbf{D} = \mathrm{diag}(\mathbf{X})$; $\mathbf{C}(\mathbf{X})$ – диагональную матрицу с диагональю $1/X_1, 1/X_2, ..., 1/X_n$.

При изменении объемов выпусков изменяются оценки удельных затрат $\boldsymbol{a_{ij}}$. Для того, чтобы зафиксировать результаты изменения объемов $\boldsymbol{V_i}$ предыдущего этапа, производится пересчет коэффициентов прямых затрат:

$$\bar{a}_{ij} = a_{ij}\, V_j / V_i,\ i = 1, \ldots, n,\ j = 1, \ldots, n,$$

или

$$\bar{\mathbf{A}} = \mathbf{D}(\mathbf{V})\mathbf{A}\mathbf{C}(\mathbf{V}). \qquad (5)$$

Утверждение 1. *Если λ – некоторое собственное значение, $\mathbf{V}$ – соответствующий собственный вектор матрицы $\mathbf{A}$ и все $X_i \ne 0,\ i = 1, ..., n$, то преобразованная матрица $\bar{\mathbf{A}}$ имеет то же собственное значение, а собственный вектор $\mathbf{v}$ равен исходному с точностью до преобразования растяжения $\mathbf{D}(\mathbf{X})$:*

$$\mathbf{v} = \mathbf{D}(\mathbf{X})\mathbf{V}.$$

Доказательства этого и последующих утверждений приведены в приложении.

Очевидно, обратное к $\mathbf{D}(\mathbf{X})$ преобразование будет иметь вид:

$$\mathbf{V} = \mathbf{D}(\mathbf{X})^{-1}\mathbf{v} = \mathbf{C}(\mathbf{X})\mathbf{v}.$$

Величины v_i интерпретируются как пропорции (индексы) объемов продукции и выполняемых услуг. Таким образом, преобразование (5) не изменяет собственного значения матрицы удельных затрат (технологической матрицы $\mathbf{A}$) при переходе к шкале пропорций выпусков $\bar{\mathbf{A}}$, а соответствующий собственный вектор подвергается растяжению $\mathbf{D}(\mathbf{X})$. Будем называть это преобразование технологической матрицы преобразованием *деформации*.

Пусть для перехода к ценам в относительной шкале (пропорциям цен) используется собственный вектор выпусков $\mathbf{V}^0$ в абсолютной шкале путем деформации технологической матрицы

$$\mathbf{A}^1 = \mathbf{C}(\mathbf{V}^0)\mathbf{A}\mathbf{D}(\mathbf{V}^0). \tag{6}$$

В таком случае собственный вектор технологической матрицы после деформации становится единичным. Можно говорить, что векторы $\mathbf{V}^0$, $\mathbf{v}^0$ описывают равновесное состояние выпусков в разных шкалах.

Сформулируем проблему поиска структуры выпусков, обеспечивающей наибольшее значение мультипликаторов выпуска при выполнении условий сбалансированности выпусков и затрат. В относительной шкале пропорций выпусков формулировка соответствующей оптимизационной задачи для структуры выпусков v_i имеет вид

$$\max_{v_i} \gamma, \tag{7}$$

с технологическим ограничением на выпуски продукции

$$v_i(t) \geq \gamma \sum_{j=1}^{n} \bar{a}_{ij} v_j(t),\ i = 1,\ldots,n, \tag{8}$$

где t – текущий момент времени. Условие (8) эквивалентно условию (4), поскольку в векторном виде, умножив его слева на положительную матрицу $\mathbf{D} = \mathbf{D}(\mathbf{V})$, получим

$$\mathbf{v} = \mathbf{DV} \geq \mathbf{D}\gamma\mathbf{AV} = \gamma\mathbf{DACDV} = \gamma\bar{\mathbf{A}}\mathbf{v}.$$

При расчетах установим нижнюю границу индексов объемов, равную μ. Тогда ограничение на них имеет вид

$$v_i(t) \geq \mu > 0,\ i = 1,\ldots,n. \tag{9}$$

Это ограничение является нормирующим, позволяет установить масштаб индексов и не отражается на их отношениях. Экономический смысл такого ограничения состоит в том, что для равновесного вектора выпусков нельзя допускать чрезмерного падения объемов выпуска для тех отраслей, которые мало задействованы в технологических цепочках, но имеют большое значение помимо экономики (социальная сфера, безопасность, экология и др.).

Рассматриваемое решение имеет экономическую интерпретацию, если матрица $\bar{\mathbf{A}}$ является шуровской (ее максимальное собственное значение по модулю меньше 1, т. е. полученное значение мультипликатора $\gamma > 1$), ее элементы и компоненты ее собственного вектора неотрицательны.

Утверждение 2. *Пусть матрица* $\bar{\mathbf{A}}$ *– положительная шуровская с действительными собственными значениями. Тогда положительное решение задачи* (7), (8) *реализуется на равенстве*

$$v_i(t) = \gamma^* \sum_{j=1}^{n} \bar{a}_{ij} v_j(t),\ i = 1,\ldots,n,$$

и представляет собой собственный вектор этой матрицы и мультипликатор γ^*, *соответствующий собственному значению*

$$a^* = 1/\gamma^* > \max_i \{a_{ii}\}.$$

Решение, реализуемое на равенстве, будем называть равновесным, а соответствующее состояние системы – технологическим равновесием. Экономическую целесообразность имеют именно равновесные состояния, поскольку если не выполняется строгое равенство, то

$$\exists i : \overline{\Delta V}_i = V_i - \gamma \sum_{j=1}^{n} a_{ij} V_j > 0,$$

что означает избыточный выпуск соответствующей продукции.

Собственный вектор матрицы $\bar{\mathbf{A}}$ может не удовлетворять условию экстремальности (7) или на выпуски помимо (8) могут быть наложены дополнительные ограничения, такие, что условие равновесия нарушается. В этом случае продуктивность технологического ядра окажется ниже ее потенциального значения $\pi^* = \gamma^* - 1$.

Показатель технологичности экономической системы $u = \pi/\pi^*$ определяет степень близости системы к состоянию технологического равновесия. Очевидно,

$$0 \leq u \leq 1,\ \max u = 1.$$

3. ИНДИКАТИВНЫЙ ПЛАН-ПРОГНОЗ СОВМЕСТНОГО РАЗВИТИЯ ОТРАСЛЕЙ

Если экстремальные значения выпусков существенно различаются с текущими значениями, реализовать скачком или за короткое время изменение структуры выпусков в соответствии с условиями (7)–(9) невозможно. Будем определять рамочную (директивную) оптимальную траекторию выпусков, соответствующую дополнительным условиям реализуемости, путем введения дополнительных ограничений на изменения объемов выпусков на этапах планирования. Реалистичность таких ограничений должна обеспечиваться организационными возможностями и наличием ресурсов для наращивания выпусков соответствующих отраслей. От этих возможностей также зависит календарная продолжительность каждого из этапов плана-прогноза.

Для того, чтобы определить более рациональный план развития отраслей, можно воспользоваться следующей постановкой локальной задачи, добавив к выражениям (6)–(9) ограничение на допустимое изменение индексов выпуска с темпом $0 > \theta > 1$ на один этап плана:

$$v_i(t) \le \theta v_i(t-1), \quad i = 1, \ldots, n.$$

Повторяя процедуры поиска оптимального решения и пересчета матрицы прямых затрат от этапа к этапу, получим индикативный многоэтапный план-прогноз совместного развития отраслей технологического ядра экономики. В процедуре расчета индикативного плана используются величины абсолютных и относительных выпусков. Если $\mathbf{V}^1$ – вектор текущих выпусков, то на первом шаге для перехода к относительным выпускам $\mathbf{v}^1$ применяется деформация технологической матрицы

$$\mathbf{A}^2 = \mathrm{diag}(\mathbf{V}^1)^{-1} \mathbf{A}\, \mathrm{diag}(\mathbf{V}^1).$$

Соответствующим преобразованием осуществляется обратный переход для векторов промежуточных вычислений $\mathbf{v}$:

$$\mathbf{V} = \mathrm{diag}(\mathbf{V}^1)\,\mathbf{v}\,.$$

Далее решаются задачи поиска вектора относительных объемов выпуска $\mathbf{v}^k$

$$\max_{\gamma^k, \mathbf{v}^i} \gamma^k, \tag{10}$$

где $k = 1, 2, \ldots$ – номер этапа, путем введения технологического ограничения на выпуски продукции

$$\mathbf{v}^k \le \gamma^k \bar{\mathbf{A}}^k \mathbf{v}^k \tag{11}$$

и условия роста относительных выпусков с темпом $\theta > 1$ на один этап плана

$$\mu \mathbf{I} \le \mathbf{v}^k \le \theta \mathbf{I}\,, \tag{12}$$

где $\mathbf{I}$ – единичный вектор. Тогда для расчета индикативного плана-прогноза совместного развития отраслей можно применить следующие утверждения.

Утверждение 3. *Последовательность* $\mathbf{V}^k$ *и оценка* γ^k *за конечное число шагов стремятся к решению задачи* (7)–(9).

Замечание. Пусть $\mathbf{V}^*$ – решение задачи (7)–(9). При преобразовании технологической матрицы $\mathbf{A}$ с помощью деформации матрицей $\mathbf{D} = \mathrm{diag}(\mathbf{v}^*)$ решение задачи планирования становится тривиальным: $\mathbf{v} = \gamma \mathbf{I}$, где $\mathbf{v} = \mathbf{D}^{-1}\mathbf{V} = \mathbf{C}\mathbf{V}$. То есть при достижении технологического экстремума структура выпусков становится равновесной и ее дальнейшего изменения не происходит.

Утверждение 4. *Если существует решение локальных задач при* $k \ge 1$*, на этапе* i *могут быть получены объемы индикативных выпусков в абсолютных единицах вида*

$$\mathbf{V}^k = \prod_{j=k}^{1} \mathrm{diag}(\mathbf{v}^j) \cdot \mathbf{V}^0\,. \tag{13}$$

Утверждение 5. *Если для всех этапов коэффициент* $\theta > 1$ *постоянный, относительный прирост выпусков, начиная с некоторого этапа, становится одинаковым. Это свойство аналогично магистральному свойству оптимизационных моделей экономической динамики* [9].

Рассмотрим экстремальный вектор выпусков для задачи (10)–(12). Отметим, что получаемая в результате решения этой задачи структура выпусков $\mathbf{v}^k$ на начальных этапах отличается от равновесной и при фиксированной технологической матрице $\mathbf{A}$ не является устойчивой. Однако изменение структуры выпусков должно приводить к изменению этой матрицы в соответствии с формулой (5)

$$\bar{\mathbf{A}}^k = \mathbf{D}(\mathbf{v}^k)\mathbf{A}\mathbf{C}(\mathbf{v}^k)\,,$$

в результате чего полученная структура выпусков от этапа к этапу планирования стремится к равновесной и устойчивой структуре (см. замечание к утверждению 3).

Для перехода от полученных индексов к выпускам в стоимостной форме следует применить преобразование (13).

4. РАСЧЕТ ИНДИКАТИВНОГО ПЛАНА-ПРОГНОЗА

Рассматривается численная модель технологического ядра экономики (10)–(12). Источник данных – доступный в настоящее время в открытом доступе [5] межотраслевой баланс РФ 2016 г., который отражает объемы товаров и услуг, потребляемые разными отраслями и видами деятельности (базовые таблицы «затраты – выпуск» разрабатываются один раз в пять лет за годы, оканчивающиеся на 1 и 6). При расчетах для решения задач математического программирования использовалась библиотека Excel, аналог которой описан в работе [10].

Ниже приведен график изменения коэффициента продуктивности технологического ядра при балансировке выпусков на последовательных этапах индикативного планирования, где верхний предел изменения пропорций выпусков изменялся с темпом $\theta = 1{,}5$ на этап. Оценка продуктивности может быть представлена в виде $\pi = (\gamma - 1) \cdot 100\%$.

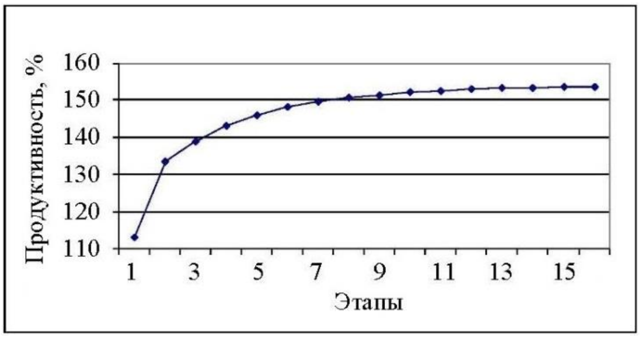

Рис. 1. Изменение коэффициента продуктивности технологического ядра при оптимизации пропорций выпусков на последовательных этапах индикативного планирования

На рис. 2 приведен график индикативной динамики пропорций выпусков некоторых отраслей при решении задачи на последовательных этапах индикативного планирования на основе данных, характеризующих о российскую экономику. Для значительной части видов экономической деятельности индексы выпусков сразу выходят на уровень $\theta = 1{,}5$ и остаются на нем на всех последующих этапах. Представлены графики для первых восьми рядов из 98 видов экономической деятельности таблицы межотраслевого баланса, для которых

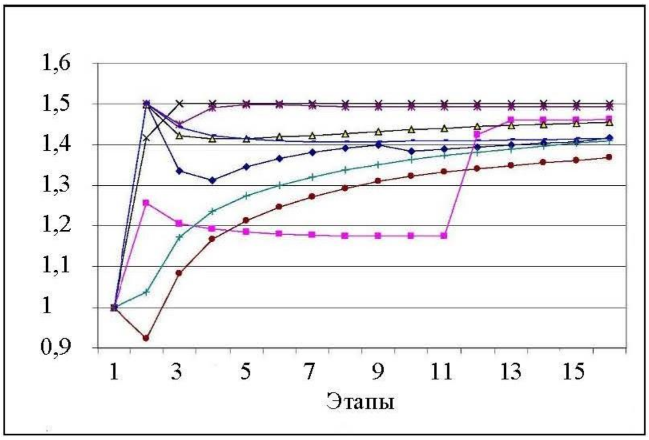

Рис. 2. Индикативная динамика пропорций выпусков некоторых отраслей на последовательных этапах индикативного планирования на основе данных, характеризующих российскую экономику:

– продукция сельского хозяйства;

– услуги, связанные с охотой, ловлей и разведением диких животных;

– рыба и прочая продукция рыболовства и рыбоводства; услуги, связанные с рыболовством и рыбоводством;

– нефть, включая нефть, получаемую из битуминозных минералов; сланцы горючие (битуминозные) и песчаники битуминозные;

– продукция горнодобывающих производств прочая

– мясо, продукты мясные и прочая продукция переработки животных;

– рыба и продукты рыбные переработанные и консервированные;

– фрукты, овощи и картофель переработанные и консервированные

расчетные значения индексов выпуска при $k > 1$ отличны от $\theta = 1{,}5$.

На рис. 1 и 2 демонстрируется магистральное свойство [11] модели развития технологического ядра российской экономики, состоящее в том, что при достаточном времени функционирования индексы выпусков продукции выходят на постоянный уровень. При этом, в соответствии с формулой (13), объемы выпусков в стоимостном выражении возрастают с темпом v_i, $i = 1,\ldots, n$.

Приведенные расчеты позволяют оценить потенциал роста технологического ядра экономической системы. Они показывают, что изменение структуры выпусков позволяет существенно повысить показатель продуктивности. Для того, чтобы оценить возможности реализации имеющегося потенциала технологического ядра, необходимо в условия балансировки включить также ряд дополнительных условий: ограничение на трудовые и сырьевые ресурсы, затраты на конечное потребление, накопление, фондообразование, экспортно-импортные потоки. Таким образом, полученная динамика индексов выпуска может служить оценкой верхней границы этих индексов.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Исходя из данных Росстата и полученных результатов расчета, состояние российской экономики не является равновесным, поскольку реальная продуктивность технологического ядра (112% – первая точка на рис. 1) заметно ниже ее потенциального значения (более 152% – асимптотического значения продуктивности), что вселяет надежду в возможность существенного повышения показателя продуктивности в реальности. Практическая реализация такой возможности должна быть связана с разработкой стратегических планов развития экономики, и наряду с выбором приоритетных направлений развития технологического ядра требует применения адекватных методов прогнозирования многоотраслевой динамики, учитывающих все основные аспекты хозяйственной деятельности: фондообразование, накопление, конечное потребление государства и домашних хозяйств, экспортно-импортные потоки [12–14]. Планирование на новом уровне также предполагает применение соответствующих организационных механизмов [15].

Помимо прикладного содержания, изложенные результаты иллюстрируют специфику предложенной методологии, предполагающей применение релевантного инструментария расчетов и анализа. Класс задач, рассмотренных выше, имеет ряд специфических особенностей. Реальный интерес в макроэкономических разработках рассматриваемого рода представляют модели большой размерности (перечень анализируемых видов экономической деятельности может исчисляться сотнями). Кроме того, для практического применения моделей технологического ядра требуется задействовать эффективные алгоритмы решения задач математического программирования рассматриваемого типа [16–18] и лингвистические средства управления расчетами, а также интегрировать их в рабочую среду [10, 19]. Необходим свободный доступ к актуальным верифицированным данным и современным информационным технологиям, включая соответствующую вычислительную среду и устройства интерфейса. Пример применения аналогичного инструментария открытого доступа (Thread Pool Executor of Akka) для обработки задач большой размерности приведен в статье [20].

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство утверждения 1. Пусть **x**, λ – собственный вектор и собственное значение матрицы **A**:

$$\mathbf{Ax} = \lambda\mathbf{x}.$$

Умножив слева обе части уравнения соответственно на матрицу $\mathbf{D}$, получим

$$\mathbf{DAx} = \mathbf{D}\lambda\mathbf{x}.$$

Поскольку $\mathbf{CD} = \mathbf{E}$ – единичная матрица, то $\mathbf{x} = (\mathbf{CD})\mathbf{x}$ и

$$\mathbf{DA(CD)x} = \lambda(\mathbf{Dx}), \text{ или}$$

$$\mathbf{DAC(Dx)} = \lambda(\mathbf{Dx}),$$

т. е. $\mathbf{Dx}$ – собственный вектор матрицы $\mathbf{DAC}$, а λ – ее собственное значение. ♦

Доказательство утверждения 2. Пусть $\mathbf{V}^*$ – собственный вектор матрицы **A**. Поскольку число неравенств в ограничении совпадает с размерностью вектора выпусков, решение задачи билинейного программирования

$$\max_{\gamma, Vi} \gamma, \qquad (\text{П}.1)$$

$$V_i \ge \gamma \sum_{j=1}^{n} a_{ij} V_j, \qquad (\text{П}.2)$$

достигается на равенстве

$$V_i = \gamma^* \sum_{j=1}^{n} a_{ij} V_j,\ i = 1,\ldots, n, \qquad (\text{П}.3)$$

где $\gamma^* = 1/a^*$, a^* – собственное значение матрицы **A**.

Действительно, учитывая условие $\mathbf{V} > 0$ и следующее из него условие $\gamma < 1/\max_i \{a_{ii}\}$, исключим в системе неравенств (П.2) переменные V_i и придем к неравенству для характеристического полинома $L(\gamma)$ степени n вида

$$L(\gamma) = (1-\gamma a_{11})(1-\gamma a_{22})\ldots(1-\gamma a_{nn}) - a_{12}a_{21} \times$$
$$\times (1-\gamma a_{33})\ldots - a_{13}a_{31}(1-\gamma a_{22})\ldots \ge 0.$$

В результате получена оптимизационная задача

$$\max \gamma,$$

$$L(\gamma) \ge 0,$$

$$1 \le \gamma < 1/\max_i \{a_{ii}\}.$$

Эта задача имеет единственное конечное решение γ^*, совпадающее с одним из корней многочлена $L(\gamma)$, если значение γ^* удовлетворяет равенству (П.3) и наоборот (иначе матрица **A** имела бы более n собственных значений).

Предположим, что утверждение 2 неверно: максимум γ^* достигается на полуинтервале $1 \le \gamma^* < 1/$ $/\max_i \{a_{ii}\}$ на строгом неравенстве $L(\gamma) > 0$. Поскольку аналитическую функцию $L(\gamma)$ в окрестности точки γ^* можно аппроксимировать отрезком ряда Тейлора – Лагранжа

$$L(\gamma) = L(\gamma^*) + L'(\gamma^*)\left(\gamma - \gamma^*\right) + L''\left(\gamma^* + \theta\left(\gamma - \gamma^*\right)\right)\left(\gamma - \gamma^*\right)^2,$$

$$0 < \theta < 1,$$

то в этой окрестности найдется допустимая точка $\gamma^* + \delta$ и константа $\varepsilon > 0$, такие что $L(\gamma^* + \delta) > 0$:

$$0 < \delta < \min\left\{L(\gamma^*)/\left(\left|L'(\gamma^*)\right| + \varepsilon\right),\right.$$
$$\left.\sqrt{L(\gamma^*)/\left(\left|L''(\gamma^*)\right| + \varepsilon\right)},\ 1/\max_i \{a_{ii}\} - \gamma^*\right\}.$$

То есть если $L(\gamma^*) > 0$, значение γ^* не может доставлять максимум полиному $L(\gamma)$ при условии $L(\gamma) \ge 0$. Следовательно, максимальное значение γ достигается на корне полинома $L(\gamma)$, а решение задачи (П.1), (П.2) – на равенстве (П.3). ♦

Доказательство утверждения 3. Рассмотрим вспомогательную задачу билинейного программирования

$$\max_{\mathbf{v}} \gamma$$

с ограничением на выпуски продукции

$$\mathbf{v} \ge \gamma \mathbf{A}^0 \mathbf{v}$$

и условием роста относительных выпусков с неограниченным темпом на один этап плана

$$\mathbf{I} \le \mathbf{v}.$$

Пусть $\mathbf{v}^*$ – решение этой задачи; положим $\theta^* = \max_i v_i^*$. Тогда при $\theta = \theta^*$ утверждение выполняется и

$$\mathbf{V}^1 \le \theta^* \mathbf{V}^0.$$

При $1 < \theta = \theta_1 < \theta^*$ задачу планирования будем решать за два этапа: при $\theta = \theta_1$ и $\theta = \theta_2 = \theta^* / \theta_1$. В результате решения задачи планирования за эти два этапа также будет получено решение $\mathbf{v}^*$. На последнем этапе мы имеем условия предыдущей задачи для одного этапа:

$$\mathbf{I} \le \mathbf{v}^1 \le \theta_1 \mathbf{I},\ \mathbf{v}^2 \le \theta^* / \theta_1 \mathbf{I},$$

$$\mathbf{V}^2 \le \theta^* \mathbf{V}^0.$$

Аналогично рассуждая, можно разделить интервал $\left[1, \theta^*\right]$ на любое конечное число отрезков, а решение задачи планирования – на соответствующее число этапов. ♦

Доказательство утверждения 4. При $i = 1$ имеем $\mathbf{D} = \mathrm{diag}(\mathbf{v}^1)$, $\mathbf{V}^0$ – исходный вектор выпусков, $\mathbf{V}^1$ – вектор выпусков после первого этапа, тогда $\mathbf{V}^1 = \mathbf{D}\mathbf{V}^0$. При $i > 1$ по индукции $\mathbf{V}^i = \mathrm{diag}(\mathbf{v}^i)\mathbf{V}^{i-1}$. Тогда $\mathbf{V}^i = \mathrm{diag}(\mathbf{v}^i)\prod_{j=i-1}^{1} \mathrm{diag}(\mathbf{v}^j)\ \mathbf{V}^0$. ♦

Доказательство утверждения 5. Поскольку величина $\gamma^* = \max_{\mathbf{v}} \gamma$ ограничена, начиная с некоторого шага k^*, мультипликатор выпусков выходит на постоянный уровень γ^* и ограничения типа неравенства

$$\mathrm{v}^k(t) \le \theta \cdot \mathrm{I}$$

при $1 < \theta \le \theta^*$, где $\theta^* = \max_i v_i^*$, в условиях утверждения 3, выполняются на равенстве

$$\mathrm{v}^k(t) = \theta \cdot \mathrm{I},\ k \ge k^*. ♦$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Индикативное* планирование и проведение региональной политики / М.Н. Абдикеев и др. – М.: Финансы и статистика, 2007. – 368 с. [*Indikativnoe* planirovanie i provedenie regional'noi politiki / M.N. Abdikeev i dr. – M.: Finansy i statistika, 2007. – 368 s. (In Russian)]
2. *Узяков М.Н.* Проблемы экономических измерений и возможности структурного анализа // Проблемы прогнозирования. – 2020. – № 1 (178). – С. 3–4. [*Uzyakov, M.N.* Problems of economic measurements and possibilities of structural analysis // Studies on Russian Economic Development. – 2020. – Т. 31. – № 1. – P. 1–2.]
3. *Леонтьев В.В.* Экономические эссе. Теории, исследования, факты и политика. – М.: Политиздат, 1990. [*Leontief, W.W.* Essays in economics. Theories, theorizing, facts, and policies. – New York: Oxford University Press, 1966.]
4. *Саяпова А.Р.* Мировые межотраслевые балансы как инструмент оценки «точек роста» национальной экономики // Научные труды ИНП РАН. – 2019. – Т. 17. – С. 27–39. [*Sayapova, A.R.* World input output tables as a tool for assessing the «Point of growth» of the national economy. – Vol. 17. – P. 27–39. (In Russian)]
5. *Базовые* таблицы «затраты-выпуск» Российской Федерации за 2016 год (в текущих ценах, млн. руб.) Опубликовано Росстатом. 30 января 2020 года. – https://rosstat.gov.ru/storage/mediabank/baz-tzv-2016.xlsx [*Bazovye* tablitsy «zatraty-vypusk» Rossiiskoi Federatsii za 2016 god (v tekushchikh tsenakh, mln. rub.) Opublikovano Rosstatom. 30 yanvarya 2020 goda. – https://rosstat.gov.ru/storage/mediabank/baz-tzv-2016.xlsx (In Russian)]
6. *Поляк Б.Т., Хлебников М.В., Рапопорт Л.Б.* Математическая теория автоматического управления. – М.: Издательство URSS, 2019. – 500 с. [*Polyak, B.T., Khlebnikov, M.V., Rapoport, L.B.* Matematicheskaya teoriya avtomaticheskogo upravleniya. – M.: Izdatel'stvo URSS, 2019. – 500 c. (In Russian)]
7. *Гусев В.Б.* Равновесные модели многоресурсных саморазвивающихся систем // Проблемы управления. – 2007. – № 3. – С. 18–25. [*Gusev, V.B.* Equilibrium Models of Multi-Resource Self-Developing Systems // Control Sciences. – 2007. – No. 3. – P. 18–25. (In Russian)]
8. *Самуэльсон, П.* Экономика. Том 1. – М.: МГП «АЛГОН» ВНИИСИ, 1992. – 333 с. [*Samuelson, P.A.* Economics. – New York: McGraw-Hill, 1989.]
9. *Гусев В.Б.* Модели автономного управления в развивающихся системах // Проблемы управления. – 2018. – № 6. – С. 2–17. [*Gusev, V.B.* Models of Autonomous Control in the Developing Systems // Control Sciences. – 2018. – No. 63. – P. 2–17. (In Russian)]
10. *Mason, A.J.* OpenSolver – An Open Source Add-in to Solve Linear and Integer Progammes in Excel. – Operations Research Proceedings 2011, eds. Klatte, D., Lüthi, H.-J., Schmedders, K. – Berlin, Heidelberg: Springer. – 2012. – P. 401–406. – http://dx.doi.org/10.1007/978-3-642-29210-1_64.
11. *Dorfman, R., Samuelson, P.A., Solow, R.M.* Linear Programming and Economic Analysis. – New York: McGraw-Hill, 1958.
12. *Гусев В.Б.* Достаточные условия стабильного развития при диверсификации экономики // Друкеровский вестник. – 2015. – № 3 (7). – С. 91–98. [*Gusev, V.* The Sufficient Conditions for Stable Development During the Diversification of the Economy // Drukerovskii vestnik. – 2015. – No. 3 (7). – P. 91–98. (In Russian)]
13. *Однопродуктовая* модель долгосрочного прогноза ВВП / В.И. Антипов и др. – М.: Ин-т пробл. управл. РАН, 2005. [*Odnoproduktovaya* model' dolgosrochnogo prognoza VVP / V.I. Antipov i dr. – M.: In-t probl. upravl. RAN, 2005. (In Russian)]
14. *Прикладное* прогнозирование национальной экономики: учебное пособие / под ред. И.А. Буданова, В.В. Ивантера, А.Г. Коровкина, В.С. Сутягина. – М.: Экономистъ, 2007. – 896 с. [Prikladnoe prognozirovanie natsional'noi ekonomiki: uchebnoe posobie / pod red. I.A. Budanova, V.V. Ivantera, A.G. Korovkina, V.S. Sutyagina. – M.: «Ekonomist», 2007. – 896 s. (In Russian)]
15. *Антипов В.И.* ГОСПЛАН. Вчера, сегодня, завтра. – М.: Концептуал, 2019. – 208 с. [*Antipov, V.I.* GOSPLAN. Vchera, segodnya, zavtra. – M.: Kontseptual, 2019. – 208 s. (In Russian)]
16. *Поляк Б.Т.* Введение в оптимизацию. – М.: Наука Главная редакция физико-математической литературы, 1983. – 384 с. [*Polyak B.T.* Vvedenie v optimizatsiyu. – M.: Nauka

Glavnaya redaktsiya fiziko-matematicheskoi literatury, 1983. – 384 s. (In Russian)]
17. *Fox, W.P., Burks, R*. Mathematical programming: linear, integer, and nonlinear optimization in military decision-making. In: Applications of Operations Research and Management Science for Military Decision Making. – New York: Springer, 2019. – P. 137–191.
18. *Bergstra, J., Bardenet, R., Bengio, Y., Kégl, B*. Algorithms for hyper-parameter optimization // Proceedings of the 24th International Conference on Neural Information Processing Systems, ser. NIPS'11. – Red Hook, NY, USA: Curran Associates Inc., 2011. – P. 2546–2554.
19. *Doumic, M., Perthame, B., Ribes, E.*, et al. Toward an integrated workforce planning framework using structured equations // European Journal of Operational Research. – 2017. – Vol. 262, iss. 1. – P. 217–230.
20. *Hai, T.N., Tien, V.D., Csaba, R*. Optimizing the resource usage of actor-based systems // Journal of Network and Computer Applications. – 2021. – Vol. 190:103143. – DOI: https://doi.org/10.1016/j.jnca.2021.103143.

Статья представлена к публикации членом редколлегии В.В. Клочковым.

Поступила в редакцию 19.02.2021,
после доработки 21.09.2021.
Принята к публикации 7.10.2021.

Гусев Владислав Борисович – канд. физ.-мат. наук, Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, г. Москва, ✉ gusvbr@mail.ru.

THE TECHNOLOGICAL CORE MODEL OF A LARGE-SCALE ECONOMIC SYSTEM: OPTIMAL CHARACTERISTICS

V.B. Gusev

Trapeznikov Institute of Control Sciences, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

✉ gusvbr@mail.ru

Abstract. This paper considers the technological core model of an economic system and mathematical methods of its analysis. As a formalized criterion for the effectiveness of structural innovations, an indicator of productivity is proposed. The problem of finding an equilibrium state that optimizes the productivity of the technological core of the economy is formally stated. The method of equivalent transformation of the model considering the achieved value of indicators is developed. Several propositions on the properties of the equilibrium state are proved. A multi-stage process for calculating the trajectory that brings the economic system closer to the equilibrium state is constructed. The developed model uses the intersectoral balance of national accounts of the economy. The model is analyzed by determining the preferred structure of outputs at the development stages of the economic system's technological core. The phased process of changing the structure of outputs that asymptotically brings the technological core to the productivity maximum is calculated on an example of Russia's data. The results allow assessing the potential growth of economic productivity within the existing technological order by eliminating structural disproportions.

Keywords: structural disproportions, technological core of the economy, productivity optimum, plans for phased development, equilibrium state.