

# МЕТОД БЕЗУСЛОВНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ ДЛЯ ЗАДАЧИ С НЕСТАЦИОНАРНОЙ ЦЕЛЕВОЙ ФУНКЦИЕЙ, ЗАДАННОЙ НА ДИСКРЕТНОЙ ШКАЛЕ ВРЕМЕНИ

В.Б. Гусев

**Аннотация.** Разрабатывается метод приближения к экстремуму нестационарной целевой функции, заданной на дискретной шкале времени. Метод должен обеспечивать допустимую (контролируемую) величину погрешности. Также требуется определить условия, которым должны удовлетворять шкала времени, используемый целевой показатель, параметры влияния на него внешней среды. Рассмотрена задача поиска безусловного экстремума для нестационарной целевой функции, когда ее значения, зависящие от компонент вектора управления, заданы на дискретном наборе моментов времени. Для поиска решения предложен дискретный градиентный метод безусловной оптимизации. Сформулированы условия его работоспособности. Получена оценка нижней границы погрешности решения, обусловленной величиной шага по времени, скоростью изменения целевой функции и оценками ее производных до второго порядка по компонентам вектора управления. Применение метода демонстрируется на численной модели экстремального регулятора, предназначенного для управления нестационарным объектом с нелинейной целевой функцией. Численные эксперименты показали, что варьирование параметров регулятора в достаточно широком диапазоне не оказывает существенного влияния на качественное поведение расчетной траектории. Разработанный метод может быть применен для расчета управляющей функции экстремального регулятора системы, информация о которой представлена только значениями целевой функции в дискретные моменты времени.

**Ключевые слова:** нестационарная система, экстремальный регулятор, безусловная оптимизация, нижняя граница погрешности.

## ВВЕДЕНИЕ

Целенаправленные развивающиеся системы, такие как национальная и региональная экономика, крупное многоотраслевое хозяйство, применяют механизмы экстремального управления, нацеленного на максимизацию целевого показателя [1]. Таким показателем может быть, например, валовой выпуск, добавленная стоимость, прибыль и др. В кризисной ситуации, при наличии мало предсказуемого внешнего окружения (экономические санкции, финансовые катастрофы, форс-мажорные обстоятельства) методы управления, основанные на знаниях о регулярных хозяйственных процессах, не дают желаемого результата. Так, международное разделение труда, обычно играющее положительную роль, в условиях санкций становится бесполезным. В такой ситуации успешное

ведение хозяйства должно преимущественно ориентироваться на его внутренние возможности, замкнутые внутри экономической системы технологические циклы, т. е. в определенном смысле быть автономным [2].

Математические модели, применяемые в кризисные периоды при управлении развивающимися системами, могут иметь малую точность или вообще отсутствовать. В таких случаях для управления приходится ограничиваться только значениями набора целевых показателей. Кроме того, в имеющейся статистической отчетности обычно приводятся показатели хозяйственной деятельности только для определенных периодов (месяц, квартал, год). Все это ограничивает возможности применения методов, предполагающих использование гладкой целевой функции, и требует учета при разработке соответствующих методов управления и принятия решений.



В условиях неопределенности в отношении законов поведения объекта управления наиболее подходящим методом представляется экстремальное регулирование, состоящее в установлении и поддержании такого режима работы, при котором достигается экстремальное (минимальное или максимальное) значение некоторого критерия, характеризующего качество функционирования объекта. Задача построения механизмов управления для моделей автономных систем имеет много общего с проблемой экстремального регулятора, осуществляющего автоматический поиск и поддержание экстремального значения регулируемой величины. Это обеспечивает определенную устойчивость регулируемого объекта. Ограничением применимости экстремального регулятора является то, что при его функционировании невозможно контролировать долгосрочные последствия управления. Кроме того, в случае ограниченного объема информации об объекте его инерционные свойства могут не учитываться.

В 1960-х гг. экстремальное регулирование оформилось в самостоятельное направление в теории нелинейных систем автоматического управления [3], а экстремальные регуляторы получили широкое применение. Например, они применялись в релейных экстремальных системах [4], импульсных самонастраивающихся и экстремальных системах автоматического управления [5], при настройке резонансных контуров и автоматических измерительных устройств, при отыскании оптимальных параметров настраиваемых моделей, при управлении химическими реакторами, нагревательными установками процессов флотации, дробления [6].

Для построения методов поиска управления в экстремальных регуляторах в зависимости от степени информированности об объекте применяются различные подходы, отличающиеся обоснованностью метода и характером сходимости результата к экстремуму. Так, в работе [7] для моделирования процесса метаболизма предложен эвристический алгоритм экстремального регулирования, осуществляющий случайный поиск лучшего отклика на каждом шаге итераций. Сходимость процесса демонстрировалась на примере для конкретного объекта. В работе [8] управление подачей воздуха  $u$  в топку на основе экстремального регулирования статической характеристики  $f$  инерционного объекта предложен метод вида

$$\Delta u(i + 1) = h \text{sign}[\Delta f(i + 1) \Delta u(i)],$$

где  $u$  — скалярный управляющий параметр;  $f$  — измеряемый параметр отклика (критерий управления);  $i$  — момент времени. Сходимость процесса регулирования в этой работе также демонстрировалась экспериментально. Частный случай экстремального регулятора с нелинейной целевой функ-

цией описан в работе [9] для конкретной линейной динамической системы, описываемой обыкновенным дифференциальным уравнением первого порядка; величина шага регулирования здесь выбиралась постоянной, а его знак — обратен знаку производной по управлению. В упомянутой публикации доказывалась сходимость процесса регулирования в предположении точного знания динамики системы и значений производных целевой функции по времени и управлению. Предлагаемый ниже алгоритм этого не требует.

Пусть в модели нестационарной автономной системы для поиска управления применяется критерий безусловной оптимизации вида

$$F(y, u) \rightarrow \underset{u}{\text{extr}}$$

в каждой точке  $t$ , где  $u(t)$  — вектор управления;  $F(y, u)$  — целевая функция, гладкая и выпуклая по  $u$ ;  $y(t, p, x, u)$  — вектор состояния системы;  $p$  — вектор параметров;  $x(t)$  — вектор состояния внешней среды. Если такое оптимальное управление существует, оно зависит от текущего состояния системы и может определяться, например, с помощью градиентного метода безусловной оптимизации, исходя из необходимого условия экстремума

$$\frac{dF}{du} = 0.$$

Если в соответствующие моменты времени известны только значения целевой функции и текущее состояние системы учитывается в них неявно, для поиска управления по значению этой функции будем использовать такую запись:

$$f(t, u) = F(y(t, p, x(t), u), u).$$

Проблема сходимости градиентного метода безусловной оптимизации для нестационарных задач такого типа рассматривалась в работе [10]. В ней предполагалось точное знание градиента целевой функции, что позволило доказать сходимость итерационного процесса для дискретного времени

$$u(t_{k+1}) = u(t_k) - \gamma_k \nabla_u f(t_k, u(t_k)),$$

где условия сходимости содержат требование:

$$a > 0 : \|u^*(t_{k+1}) - u^*(t_k)\| \leq a,$$

$u^*(t)$  — точка экстремума функции  $f(t, u)$  в момент  $t$ ;  $a$  определяет отклонение предельного значения  $u(t_k)$  от точки экстремума  $u^*(t_k)$  при  $k \rightarrow \infty$ ; величина шага  $\gamma_k$  определяется исходя из свойств матрицы  $\nabla_{uu} f$ . Результаты, полученные в работе [10], развиваются в статье [11] путем ослабления условия сходимости итерационного процесса:

$$\|\nabla_u f(t_{k+1}, u) - \nabla_u f(t_k, u)\| \leq a, \quad a > 0.$$

При рассмотрении нестационарных задач безусловной оптимизации в работах [10, 11] контролировалось как отклонение решения от точного значения в текущий момент  $t$ , так и отклонение в пределе при  $t \rightarrow \infty$ . В качестве недостатка чисто градиентных методов отметим относительно медленную сходимость к точному решению. Возможным объяснением этого является тот факт, что при приближении к точке экстремума целевой функции с гладкими производными норма градиента  $\|\nabla_u f(t_k, u)\|$  может стремиться к нулю быстрее, чем растет шаг  $\gamma_k$ . Поэтому приближенное решение «отстает» от точного на каждом шаге. Методы, предложенные в работах [8, 9], допускают «опережение» точного решения, что не уменьшает их погрешности, но уменьшают время приближения к нему.

В случае, когда замеры значений целевой функции производятся в дискретные моменты времени, оценка производной  $\nabla_u f(t, u)$  может быть получена только приближенно, например, с помощью сплайн-представления функции  $f(t, u)$ , которое не является однозначным. Ожидаемое следствие таких предположений — увеличение погрешности решения по сравнению с методами, использующими точные оценки производных целевой функции. Более того, погрешность решения с течением времени не будет убывать до нуля, т. е. неустранима. Можно ожидать, что ее величина должна увеличиваться с ростом интервала дискретизации временного интервала и скорости изменения целевого показателя. В такой ситуации понятие «отклонение решения от точного значения» (ввиду неоднозначности последнего) некорректно и может быть заменено на «отклонение решения от одного из точных значений» или на «отклонение решения от множества точных значений».

Цель настоящей статьи заключается в разработке метода приближения к экстремуму нестационарной целевой функции, заданной на дискретной шкале времени, обеспечивающего допустимую (контролируемую) величину погрешности. Также требуется определить условия, которым должны удовлетворять шкала времени, используемый целевой показатель, параметры влияния на него внешней среды. Такой метод может быть применен для построения экстремального регулятора системы, определенной в дискретные моменты времени.

## 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть целевая функция  $f(t, u)$  имеет непрерывные производные по аргументам и выпукла по  $u$ , где  $t$  — скаляр,  $u \in R^n$  — вектор, и задана вместе

с вектором  $u(t)$  на дискретном ряде значений  $t_1 < t_2 < \dots < t_i$ .

Рассматривается задача поиска безусловного экстремума целевой функции в момент времени  $t_{i+1}$ :

$$f(t_{i+1}, u) \rightarrow \text{extr.}_u$$

А именно, требуется определить значение вектора управляющей функции  $u = u(t_{i+1})$ , обеспечивающее приближение целевой функции  $f(t_{i+1}, u)$  к экстремальному значению, используя значения  $u(t_j), f(t_j), u(t_j), j \leq i$ , и оценить погрешность полученного результата.

## 2. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Пусть функция  $f(t, u)$  имеет непрерывные частные производные первого порядка по аргументам. Обозначим  $k$ -ю компоненту вектора  $u_i^k = u^k(t_i), k = 1, \dots, n, f_i = f(t_i, u_i), i = 1, 2, \dots$ . Приближения частных производных первого порядка для данных по двум точкам имеют вид:

$$\left. \frac{\partial f}{\partial u^k} \right|_i \cong \frac{f_{i+1} - f_i}{u_{i+1}^k - u_i^k} = \frac{\Delta f_i}{\Delta u_i^k},$$

или в векторной форме

$$\nabla_u f_i \cong \bar{\nabla}_u f_i.$$

Здесь градиент и его приближения относятся к значениям аргументов  $t_i, u_i$ . Обозначим также  $\bar{\nabla}_f u_i$  вектор с компонентами  $\frac{\Delta u_i^k}{\Delta f_i}$ .

**Утверждение 1.** Пусть функция  $f(t, u)$  непрерывно дифференцируема по аргументам, известны ее значения на дискретном наборе значений  $t_i$  с шагом  $\Delta t$ , при каждом  $t_i \left. \frac{\partial f}{\partial t} \right|_{t_i} \neq 0$  и существует точка стационарности функции по аргументу  $u$ .

Найдется величина  $h_i$  такая, что метод расчета

$$u_{i+1} = u_i + h_i \bar{\nabla}_f u_i / (\|\bar{\nabla}_u f_i\| + \alpha_i)$$

$$\text{при } 0 \leq \alpha_i \leq h / \left( \frac{\partial f_i}{\partial t} \Delta t_i \right) - (\|\bar{\nabla}_u f_i\|)$$

реализует последовательность значений  $u_i$ , отклоняющихся от точки стационарности  $\tilde{u}$  так, что знаки разностей компонент  $u_i^k - \tilde{u}^k$  и  $u_{i+1}^k - \tilde{u}^k, k = 1, \dots, n$ , противоположны. Таким образом, ре-



зультат  $u_i$  колеблется вокруг точек стационарности  $\nabla_u f|_{\bar{u}, t_i} = 0$ .

**Утверждение 2.** Пусть в дополнение к условиям Утверждения 1 существуют вторые производные функции  $f(t, u)$  по аргументу  $u$ , которые образуют матрицу  $\nabla_{uu} f$ , для которой выполняется условие сильной выпуклости по  $u$  в каждой точке  $t_i, u_i$ :  $\|\nabla_{uu} f_i\| > 0$ .

При коэффициенте  $|h_i| \geq \left| \frac{\partial f}{\partial t} \|\bar{\nabla}_u f\| \Delta t \right|_i$  и при  $0 \leq \alpha_i \leq h_i \left( \frac{\partial f_i}{\partial t} \Delta t_i \right) - \|\bar{\nabla}_u f_i\|$ , где приближение градиента относится к значениям аргументов  $t_i, u_i$ , метод расчета

$$u_{i+1} = u_i + h_i \bar{\nabla}_f u_i / (\|\bar{\nabla}_u f_i\| + \alpha_i)$$

реализует последовательность значений  $u_i$ , отклоняющихся от точек стационарности поочередно по каждой координате в противоположных направлениях на величину  $\Delta u_i$ , нижняя граница нормы которой  $\inf \|\Delta u_i\| = \frac{|h_i \Delta t_i \|\bar{\nabla}_f u_i\|}{\|\nabla_{uu} f_i\|}^{1/2}$  достигается

при  $|h_i| = \left| \frac{\partial f}{\partial t} \|\bar{\nabla}_u f\| \Delta t \right|_i$ .

**Утверждение 3.** Если решается задача на поиск максимума, выбор знака шага  $h_i$  подчиняется правилу: знак  $h_i$  совпадает со знаком величины  $\left( \Delta f(t_i, u_i) - \Delta t_i \frac{\partial f}{\partial t} \Big|_{\hat{t}_i \in [t_i, t_{i+1}]} \right)$  при  $\Delta f(t_i, u_i) \geq 0$  и имеет противоположный знак при  $\Delta f(t_i, u_i) < 0$ .

Доказательства всех трех утверждений приведены в приложении.

**Замечание 1.** Если задана допустимая погрешность решения  $\delta$ , то допустимый класс функций  $f(t, u)$ , для которых  $\|\Delta u_i\| \leq \delta$ , должен удовлетворять

$$\text{условию } \left| \frac{\frac{\partial f}{\partial t} \Big|_i \Delta t \|\bar{\nabla}_f u_i\| \|\bar{\nabla}_u f_i\|}{\|\nabla_{uu} f_i\|} \right|^{1/2} \leq \delta \text{ на рассматриваемом отрезке времени (или, если необходимо, всей области определения). Из этого следует, что чем}$$

больше величина  $\left| \frac{\partial f}{\partial t} \Big|_i \right|$  и  $\Delta t$ , тем больше погрешность.

**Замечание 2.** Из Утверждения 1 следует, что колебательный процесс обеспечивает приближение к экстремуму уже на первом шаге метода, а из Замечания 1 — что процесс не выходит за пределы трубки  $\|\Delta u_i\| \leq \delta$ .

**Замечание 3.** Утверждение 3 применимо при условии, когда производная  $\frac{\partial f}{\partial t}$  изменяется в интервале  $\Delta t_i$  так, что знак величины  $\left( \Delta f(t_i, u_i) - \Delta t_i \frac{\partial f}{\partial t} \Big|_i \right)$

постоянный при  $t \in [t_i, t_{i+1}]$ . Для оценки  $\Delta t_i \frac{\partial f}{\partial t} \Big|_{\hat{t}_i}$  можно использовать такую оценку приближения по трем точкам, если интервал времени  $\Delta t$  постоянный:

$$\Delta t_i \frac{\partial f}{\partial t} \Big|_{\hat{t}_i} \cong \frac{(f_i - f_{i-1})(u_{i+1} - u_i) - (f_{i+1} - f_i)(u_i - u_{i-1})}{u_{i+1} - 2u_i - u_{i-1}}.$$

Эта оценка может быть получена из системы уравнений

$$f_{i+1} - f_i \cong \frac{\partial f}{\partial u} (u_{i+1} - u_i) + \Delta t_i \frac{\partial f}{\partial t} \Big|_{\hat{t}_i},$$

$$f_i - f_{i+1} \cong \frac{\partial f}{\partial u} (u_i - u_{i+1}) + \Delta t_i \frac{\partial f}{\partial t} \Big|_{\hat{t}_i}$$

в предположении, что производная  $\frac{\partial f}{\partial t}$  мало изменяется за время  $\Delta t$ .

**Замечание 4.** Полагая в методе расчета управления величину  $\alpha$  такой, что  $\alpha_i \geq \alpha = \text{const} \geq 0$ , получим более широкий размах приращения

$$\Delta u_{i+1}(\alpha) = h \bar{\nabla}_f u_i / (\|\bar{\nabla}_u f_i\| + \alpha) \geq \Delta u(\alpha_i),$$

для которого знаки разностей  $u_i^k - \hat{u}_i^k$  и  $u_{i+1}^k - \hat{u}_i^k$  также противоположны. Чем больше разность  $\alpha_i - \alpha$ , тем больше размах колебаний  $u_i - \hat{u}_i$ .

Допустимую величину параметров  $\alpha_i$  и  $h_i$  можно выбирать в довольно широком диапазоне, не имея точных оценок величин  $\frac{\partial f}{\partial t} \Big|_i, \|\nabla_{uu} f_i\|$ . Чем ближе значение параметра  $\alpha_i$  к нулю, тем разброс  $\Delta u_i$  будет больше. Уменьшение параметра  $h_i$  уменьшает разброс  $\Delta u_i$ , но при слишком малом  $h_i$  алгоритм расходится (суммарная погрешность нарастает в процессе итераций).

**Замечание 5.** Поскольку влияние внешних факторов на целевую функцию отражается на величине производной  $\frac{\partial f}{\partial t} \Big|_{t_i}$ , то разброс значений управления прямо зависит от величины этого воздействия.

**Замечание 6.** Поскольку значения целевой функции  $f(t, u)$  вычисляются (или измеряются) только

в узлах дискретной сетки времени и для соответствующих значений векторов управления, можно построить сплайн-приближение этой функции нужной гладкости и уже для нее применять точные методы градиентного спуска [10, 11]. Однако точность полученного результата останется конечной, поскольку такая сплайн-аппроксимация не единственна. К тому же вычислительная сложность этого метода будет значительно превышать сложность предложенного подхода.

### 3. ПРИМЕР РАСЧЕТА

В качестве иллюстрации метода приближенного поиска экстремума для нестационарной системы с дискретным временем используется численная реализация модели экстремального регулятора для упрощенной модели выпуска продукции. Она представлена приведенными ниже конечно-разностными соотношениями в дискретном времени. Однако при поиске решения, в соответствии с постановкой задачи, используются только значения целевой функции и управления в предыдущий и текущий моменты времени.

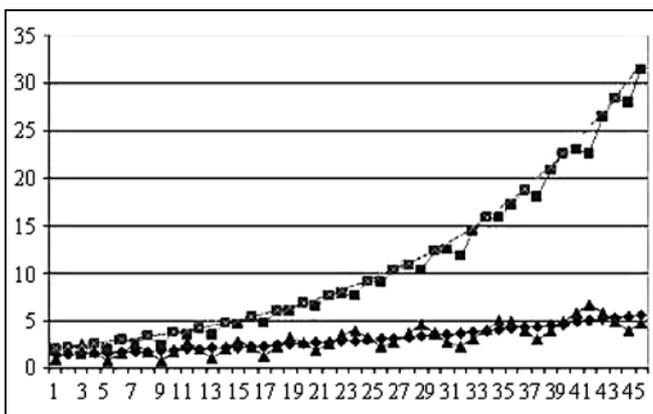
В качестве управления (и одновременно параметра состояния) выступает объем выпуска продукции  $u(t)$ . Целевая функция — прибыль

$$r(t) = f(t, u(t)) = p(t)u(t) - C_0 - cu^2(t) \rightarrow \max_u,$$

где  $t = 0, 1, 2, \dots$ ;  $p(t)u(t)$  — выручка;  $C_0$  — постоянные издержки;  $C_0 + cu^2$  — оценка полных издержек, включающая оценки затрат на фондообразование, оплаты труда и прямых затрат;  $p(t)$  — цена единицы продукции (параметр внешней среды),

$$p(t) = dp(t-1), \quad p(0) = p_0.$$

Здесь  $d$  — коэффициент роста,  $p_0$  — начальная цена.



Результаты расчетов для экстремального регулятора:  $\blacklozenge$  — оптимальное решение;  $\blacktriangle$  — расчетное решение;  $\blacktimes$  — оптимальная прибыль;  $\blacksquare$  — расчетная прибыль

Оценка предельной прибыли (градиента целевой функции по управлению) вычисляется так:

$$e(t) = (r(t) - r(t-1))/(u(t) - u(t-1)).$$

Управление на следующем шаге рассчитывается в соответствии с методом приближения к экстремуму:

$$u(t-1) = u(t) + h/((e(t)(|e(t)| + \alpha)).$$

Здесь  $\delta$  — параметр стабилизации,  $k$  — коэффициент связи.

На рисунке приведены результаты расчетов для модели выпуска продукции с параметрами  $C_0 = 1$ ;  $c = 1$  и экстремального регулятора с параметрами  $\alpha = 0,1$ ;  $h = 1$ . Цена на продукцию с начальным значением  $p_0 = 3$  изменяется с постоянным темпом  $d = 1,03$ . Точное оптимальное решение имеет вид:

$$u(t) = \frac{p(t)}{2c}.$$

Оптимизирующий регулятор выпуска продукции довольно быстро (за один шаг) приближает выпуск продукции к оптимальному и с течением времени отслеживает его оптимальный уровень в рамках погрешности метода.

Размах колебаний вокруг оптимального уровня выпуска обусловлен дискретным характером модели, нестационарным поведением цены на продукцию и неточностью подбора параметров регулятора. С ростом производной цены по времени погрешность решения возрастает, что соответствует приведенной оценке приближения. Величина  $h_i$  на начальных шагах имеет оценку

$$|h_i| = \left| \frac{\partial f}{\partial t} \right| \left\| \bar{\nabla}_u f \right\| \Delta t \Big|_i \cong 1, \text{ знак } + 1; \text{ оценка коэффициента } \alpha_i$$

выбиралась из соображения устойчивости процесса так, чтобы  $\left\| \bar{\nabla}_u f \right\| \gg \alpha_i > 0$ . На траектории их можно уточнять, подбирая экспериментально так, чтобы уровень, достигаемый целевой функцией  $f(t, u(t))$  в течение нескольких шагов дискретного алгоритма, был максимальным. В данном примере значения этих коэффициентов  $\alpha_i$ ,  $h_i$  на всей траектории были постоянными.

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассматриваемый метод мало критичен к выбору параметров  $\delta$ ,  $k$ . Последние можно определять, исходя из условий применения метода в конкретной ситуации, соответствующей условиям прикладной задачи. Так, в приведенном выше примере величина параметров соответствует темпу прироста цены продукции. Кроме того, для оценки  $h$  могут быть применены конечно-разностные приближения производных функции  $f(t, u)$ . Параметр  $\alpha$  тогда может выбираться в соответствии с оценкой  $\alpha \cong \left\| \bar{\nabla}_u f_0 \right\|^2 h / \max_i \left| \frac{\partial f}{\partial t} \right|$ . Численные эксперименты показали, что варьирование параметров регулятора в достаточно широком диапазоне не оказывает существенного влияния на качественное поведение расчетной траектории.



**ПРИЛОЖЕНИЕ**

**Доказательство Утверждения 1.** Используя линейный отрезок ряда Тейлора — Лагранжа для функции  $f(t, u)$  в точке  $t_{i+1}, u_{i+1}$ , где остаточный член задан в промежуточной точке  $t_i \leq \hat{t} \leq t_{i+1}$ ;  $\hat{u}^k \in [u_i^k, u_{i+1}^k]$ , получим

$$f(t_{i+1}, u_{i+1}) - f(t_i, u_i) = \sum_k \frac{\partial f}{\partial u^k} \Big|_{\hat{t}, \hat{u}} (u_{i+1}^k - u_i^k) + \frac{\partial f}{\partial t} \Big|_{\hat{t}, \hat{u}} (t_{i+1} - t_i).$$

По необходимому условию оптимальности положим  $\frac{\partial f}{\partial u^k} \Big|_{\hat{t}, \hat{u}} = 0$ . Тогда

$$\Delta u_i^k = u_{i+1}^k - u_i^k = (t_{i+1} - t_i) \frac{\partial f}{\partial t} \Big|_{\hat{t}, \hat{u}} / \frac{f(t_{i+1}, u_{i+1}) - f(t_i, u_i)}{u_{i+1}^k - u_i^k}.$$

Или в векторном виде

$$\Delta u_i = \Delta t_i \frac{\partial f}{\partial t} \Big|_{\hat{t}, \hat{u}} \bar{\nabla}_f u_i. \tag{1}$$

Приведем метод вычисления, пригодный для численной реализации. Будем определять  $\alpha_i$  и  $h_i$  из соотношения

$$\frac{\partial f_i}{\partial t} = h_i / (\Delta t_i (\|\bar{\nabla}_u f_i\| + \alpha_i)). \tag{2}$$

Тогда вблизи точки стационарности  $\hat{u}_i \in [u_i, u_{i+1}]$  имеем

$$\Delta u_i = h_i \bar{\nabla}_f u_i / (\|\bar{\nabla}_u f_i\| + \alpha_i).$$

Поскольку  $\hat{u}_i$  — внутренняя точка интервала  $[u_i, u_{i+1}]$ , знаки разностей  $u_i^k - \hat{u}_i^k$  и  $u_{i+1}^k - \hat{u}_i^k$  противоположны. Таким образом, результат  $u_i$  покоординатно колеблется вокруг точек стационарности  $\nabla_u f|_{\hat{u}_i} = 0$ .

**Доказательство Утверждения 2.** Обозначим  $\bar{\Delta u}$  погрешность метода на текущем шаге, обусловленную дискретностью шкалы времени. Оценка градиента вблизи точки стационарности имеет вид:

$$\bar{\nabla}_u f_i = \nabla_{uu} f_i \bar{\Delta u}.$$

Если величина производной  $\frac{\partial f}{\partial t}$  известна точно, то для величин  $h, \alpha$ , удовлетворяющих соотношению (2), пользуясь условием (1), получим

$$\|\bar{\Delta u}\| = |h| \Delta t_i \|\bar{\nabla}_f u_i\| / (\|\nabla_{uu} f_i\| \|\bar{\Delta u}\| + \alpha),$$

откуда, решая квадратное уравнение относительно  $\|\bar{\Delta u}\|$ , получим

$$\|\bar{\Delta u}\| = -\frac{\alpha}{2\|\nabla_{uu} f_i\|} + \left( \frac{\alpha^2 + 4|h|\Delta t_i \|\bar{\nabla}_f u_i\| \|\nabla_{uu} f_i\|}{4\|\nabla_{uu} f_i\|^2} \right)^{1/2}.$$

Нетрудно видеть, что функция  $\|\bar{\Delta u}\|$  ( $\alpha$ ) монотонно возрастающая.

Из соотношения (2) также следует:

$$h_i = \frac{\partial f_i}{\partial t} (\|\bar{\nabla}_u f_i\| + \alpha_i) \Delta t_i, \tag{3}$$

$$|h_i| \geq \left| \frac{\partial f}{\partial t} \|\bar{\nabla}_u f\| \Delta t_i \right|.$$

При  $\alpha = 0$  из выражений (2) и (3) следует:

$$\|\bar{\Delta u}\|(\alpha = 0) = \left( \frac{|h| \Delta t_i \|\bar{\nabla}_f u_i\|}{\|\nabla_{uu} f_i\|^2} \right)^{1/2} = \left| \frac{\frac{\partial f}{\partial t} \Delta t_i \|\bar{\nabla}_f u_i\| \|\bar{\nabla}_u f_i\|}{\|\nabla_{uu} f_i\|} \right|^{1/2}.$$

Из последнего равенства тогда следует, что полученная оценка

$$\|\bar{\Delta u}\| = \left| \frac{\frac{\partial f}{\partial t} \Delta t_i \|\bar{\nabla}_f u_i\| \|\bar{\nabla}_u f_i\|}{\|\nabla_{uu} f_i\|} \right|^{1/2}$$

представляет собой нижнюю границу погрешности решения.

**Доказательство Утверждения 3.** Как следует из утверждения 1, интервал  $[u_i, u_{i+1}]$  не содержит точку стационарности, если для каких-либо или всех координат разности  $u_{i+1} - u_i$  имеют одинаковый знак. В этом

случае можно предположить  $\frac{\partial f}{\partial u^k} \Big|_{\hat{t} \in [t_i, t_{i+1}]} \neq 0$ , тогда

$$\Delta u_i^k = u_{i+1}^k - u_i^k = \frac{f(t_{i+1}, u_{i+1}) - f(t_i, u_i) - (t_{i+1} - t_i) \frac{\partial f}{\partial t} \Big|_{\hat{t}}}{\frac{\partial f}{\partial u^k} \Big|_{\hat{t}}}.$$

Или в векторном виде

$$\Delta u = \left( \Delta f(t_i, u_i) - \Delta t_i \frac{\partial f}{\partial t} \Big|_{\hat{t}} \right) \nabla_{f_i} u \Big|_{\hat{t}}.$$

Если решается задача на максимум, при фиксированной абсолютной величине шага  $h$  направление спуска выбирается из условия

$$\text{sign}(h) = \text{sign} \left( \Delta f(t_i, u_i) - \Delta t_i \frac{\partial f}{\partial t} \Big|_{\hat{t}} \right), \text{ если } \Delta f(t_i, u_i) > 0,$$

$$\text{sign}(h) = -\text{sign} \left( \Delta f(t_i, u_i) - \Delta t_i \frac{\partial f}{\partial t} \Big|_{\hat{t}} \right), \text{ если } \Delta f(t_i, u_i) < 0.$$

**ЛИТЕРАТУРА**

1. Гусев В.Б. Согласование критериев принятия решений при целевом планировании // Сибирский журнал индустриальной математики. — 2005. — Т. VIII. — № 2 (22). — С. 32—45. [Gusev, V.B. Soglasovanie kriteriev prinyatiya reshenij pri celevom planirovanii / Sibirskij zhurnal industrial'noj matematiki. — 2005. — T. VIII. — No. 2 (22). — P. 32—45. (In Russian)]

2. Гусев В.Б. Модели автономного управления в развивающихся системах // Проблемы управления. — 2018. — № 6. — С. 2–17. [Gusev, V.B. Models of autonomous control in the developing systems / Control Sciences. — 2018. — No. 6. — P. 2–17. (In Russian)]
3. Красовский А.А. Динамика непрерывных самонастраивающихся систем. — М., 1963. — 468 с. [Krasovskij, A.A. Dinamika nepreryvnyh samonastroyayushchihya sistem. — M., 1963. — 468 s. (In Russian)]
4. Моросанов И.С. Релейные экстремальные системы. — М., 1964. — 267 с. [Morosanov, I.S. Relejnye ekstremal'nye sistemy. — M., 1964. — 267 s. (In Russian)]
5. Кунцевич В.М. Импульсные самонастраивающиеся и экстремальные системы автоматического управления. — Киев: Техника, 1966. — 282 с. [Kuncevich, V.M. Impul'snye samonastroyayushchiesya i ekstremal'nye sistemy avtomaticheskogo upravleniya. — Kiev: Tekhnika, 1966. — 282 s. (In Russian)]
6. Растринин Л.А. Системы экстремального управления. — М., 1974. — 630 с. [Rastrigin, L.A. Sistemy ekstremal'nogo upravleniya. — M., 1974. — 630 s. (In Russian)]
7. Xi, Y., Wang, F. Extreme pathway analysis reveals the organizing rules of metabolic regulation // PLOS ONE. — 2019. — Vol. 14, no. 2. — DOI: 10.1371/journal.pone.0210539.
8. Селезнева С.В., Коновалова И.И. Моделирование алгоритма экстремального регулятора подачи воздуха в топку // Электронный научный журнал «APRIORI. Серия: естественные и технические науки». — 2014. — № 3. — 6 с. [Selezneva, S.V., Konovalova, I.I. Modelling of Algorithm the Extreme Supply Regulator of Air in the Firebox // Electronic scientific journal «APRIORI. Series: Natural and technical sciences». — 2014. — No. 3. — 6 p. (In Russian)]
9. Егоров А.И. Основы теории управления. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. — 504 с. [Egorov, A.I. Osnovy teorii upravleniya. — M.: FIZMATLIT, 2004. — 504 s. (In Russian)]
10. Поляк Б.Т. Введение в оптимизацию. — М.: Наука, 1983. — 384 с. [Polyak, B.T. Vvedenie v optimizaciyu. — M.: Nauka, 1983. — 384 s. (In Russian)]
11. Попков А.Ю. Градиентные методы для нестационарных задач безусловной оптимизации // Автоматика и телемеханика. — 2005. — № 6. — С. 38–46. [Popkov, A.Yu. Gradient Methods for Nonstationary Unconstrained Optimization Problems // Automation and Remote Control. — 2005. — Vol. 66. — P. 883–891].

Статья представлена к публикации членом редколлегии М.В. Хлебниковым.

Поступила в редакцию 11.02.2020, после доработки 08.10.2020.  
Принята к публикации 03.11.2020.

Гусев Владислав Борисович — канд. физ.-мат. наук, Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, г. Москва, ✉ gusvbr@mail.ru.

## UNCONSTRAINED OPTIMIZATION OF A TIME-VARYING OBJECTIVE FUNCTION ON A DISCRETE TIME SCALE

V.B. Gusev

V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia  
✉ gusvbr@mail.ru

**Abstract.** This paper develops an approximate method to optimize a time-varying objective function on a discrete time scale. The method should provide an admissible (controllable) error value. The conditions to be satisfied by the time scale, the objective function, and the environment's parameters are established. The unconstrained optimization of a time-varying objective function that depends on the control vector components is considered on a discrete set of time instants. To find a solution, a discrete gradient constrained optimization method is proposed. Efficiency conditions for the gradient method are formulated. A lower bound on the solution error is obtained in terms of the time step, the rate of change of the objective function, and its first- and second-order derivatives with respect to the control vector components. The method is illustrated on a numerical example of an optimal controller design for a time-varying plant with a nonlinear objective function. According to the numerical experiments, the wide-range variations of the controller's parameters have no significant effect on the qualitative behavior of the resulting trajectory. The method can be used to calculate an optimal control function for a system with a discrete-valued objective function.

**Keywords:** time-varying system, optimal controller, unconstrained optimization, lower bound on error.